

*Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования*
**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»**

Факультет физики

Бакалавриат

Образовательная программа «Физика» 03.03.02

Дипломная работа

по теме:

***Протекание вязкой электронной жидкости
через щель в барьере***

Выполнил студент группы БФЗ191

Асафов Даниил Александрович

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., к.ф.-м.н., старший научный сотрудник

ИТФ им. Л.Д. Ландау

Тихонов Константин Сергеевич

Москва

5 июня 2023 г.

Аннотация

В данной работе рассматривается проблема гидродинамического электронного транспорта в двумерном образце, разделенном на две полубесконечные плоскости одномерным бесконечным барьером. Данная система важна, поскольку может быть реализована в эксперименте. В работе рассчитаны профиль скорости и распределение температуры в геометрии образца. Также в качестве замечательного свойства геометрии доказано, что единственным физически разумным и непротиворечивым решением является то, которое одновременно выполняет граничные условия ненапряжения и прилипания.

This work addresses the problem of hydrodynamic electronic transport in a two-dimensional sample separated into two semi-infinite planes by a one-dimensional infinite barrier. This system is important since it can be realized in an experiment. In this work, the velocity profile and the temperature distribution in the sample geometry are calculated. Also, as a remarkable property of geometry, it is proven that the only physically sensible and non-self-contradictory solution is the one that fulfills non-stress and non-slip boundary conditions simultaneously.

Содержание

1	Введение	4
2	Модель	7
2.1	Теорема Келдыша-Седова	9
2.2	Решение уравнения Стокса в случае $\lambda \rightarrow \infty$	10
3	Диссипация, Работа поля и Сохранение Энергии	11
4	Решение уравнения Стокса при произвольном параметре λ	15
5	Распределение температуры	19
5.1	Предел малой теплопроводности	19
5.2	Предел большой теплопроводности	24
6	Выводы	26

1 Введение

Развитие нанотехнологий в последние годы привело к созданию сверхчистых баллистических систем, в которых рассеяние на примесях незначительно. В результате этого возрос интерес к электронному транспорту в режиме вязкой гидродинамики, когда движение электронов описывается уравнением Стокса. В последнее десятилетие теоретически были предсказаны различные экзотические и уникальные особенности электронной гидродинамики (обзор можно посмотреть в работах [10, 12, 13, 15]) К ним относятся сверхбаллистический перенос заряда (с проводимостью выше баллистической) через щель [3], а также резкий скачок электрического потенциала на металлических контактах, вызванный вязкостью [19]. Эти предсказания, сильно противоречащие общепринятым представлениям о транспорте в неупорядоченных системах, вдохновили на большое количество экспериментальных исследований, большая часть из которых была сосредоточена на изучении профиля скорости электронной жидкости и распределения электрического потенциала. Развитие методов SQUID-on-tip (tSOT) и криогенной квантовой магнитометрии сделало возможным еще одно интригующее направление исследований — изучение распределения температуры в образце.

[47]) : С теоретической точки зрения решения в гидродинамическом режиме сильно зависят от выбора граничных условий. (1) Физика этих условий связана с силой трения на границе (подробное обсуждение [4] и ссылки там). ам). Очень сильное трение соответствует границе с диффузным рассеянием и обычно описывается краевым условием прилипания с нулевой скоростью вдоль границы

$$\text{no-slip: } v_{\parallel}|_{\text{boundary}} = 0. \quad (1)$$

Для гладкой границы, где трение отсутствует, обычно используется граничное условие нулевого напряжения на границе.

$$\text{no-stress: } \partial_{r_{\perp}} v_{\parallel}|_{\text{boundary}} = 0, \quad (2)$$

Здесь r_{\perp} и v_{\parallel} - направление перпендикулярно границе и скорость вдоль границы соответственно. Было предложено [2, 21] объединить эти два условия граничным условием «частичного проскальзывания» [11]

$$v_{\parallel} \Big|_{\text{boundary}} = \lambda \partial_{r_{\perp}} v_{\parallel} \Big|_{\text{boundary}}. \quad (3)$$

Физически, λ можно интерпретировать как длину проскальзывания частиц на границе. Как правило, решения уравнения Стокса с граничными условиями Eqs. (1) и (2) приводят к различным профилям скорости с различными характеристиками. Ярким примером является течение Пуазейля, которое показывает конечное и нулевое сопротивление для условий отсутствия проскальзывания и напряжения соответственно. Это означает, что в общем случае специфические для системы граничные условия могут быть исследованы экспериментально. В последнее время также ведутся теоретические споры о справедливости этих двух граничных условий в графене [3, 4, 21]. Также стоит отметить, что граничные условия прилипания (1) и отсутствия напряжения (2) связаны с пределами $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ в уравнении Eq. (3), соответственно. Однако в дальнейшем будет показано, что эти два предела могут стать неразличимыми, если обе части уравнения Eq. (3) будут равны нулю. Это приводит к тому, что "Максвелловские" граничные условия выполняются при любом значении параметра λ и профиль скорости также не зависит от этого параметра.

В работе исследуется профиль скоростей и распределение температуры в двумерном (2D) образце, в котором две полуплоскости разделены бесконечно тонким барьером с щелью конечных размеров, как показано на Рис. 1. 1. Такую структуру можно легко реализовать экспериментально, используя определенные конфигурации затвора. Ток через подобные системы и связанные с ним картины диссипации были теоретически изучены в работе [18] для режима с преобладанием беспорядка без учета эффектов вязкости. Совсем недавно эта система рассматривалась в контексте вязкой электронной гидродинамики. [2, 3, 9, 14, 17].

В данной работе пренебрегается сопротивлением образца, вызванным беспорядком, и исследуется профиль гидродинамической скорости, регулируемый вязкостью, при фиксированном падении напряжения в системе, т. е. между линиями $y = -\infty$ и $y = \infty$. Показывается, что этого условия вместе с какими-либо стандартными граничными условиями, скажем, «прилипания» или «отсутствия напряжения», недостаточно для однозначного нахождения профиля скорости. В частности, граничное условие «отсутствия напряже-

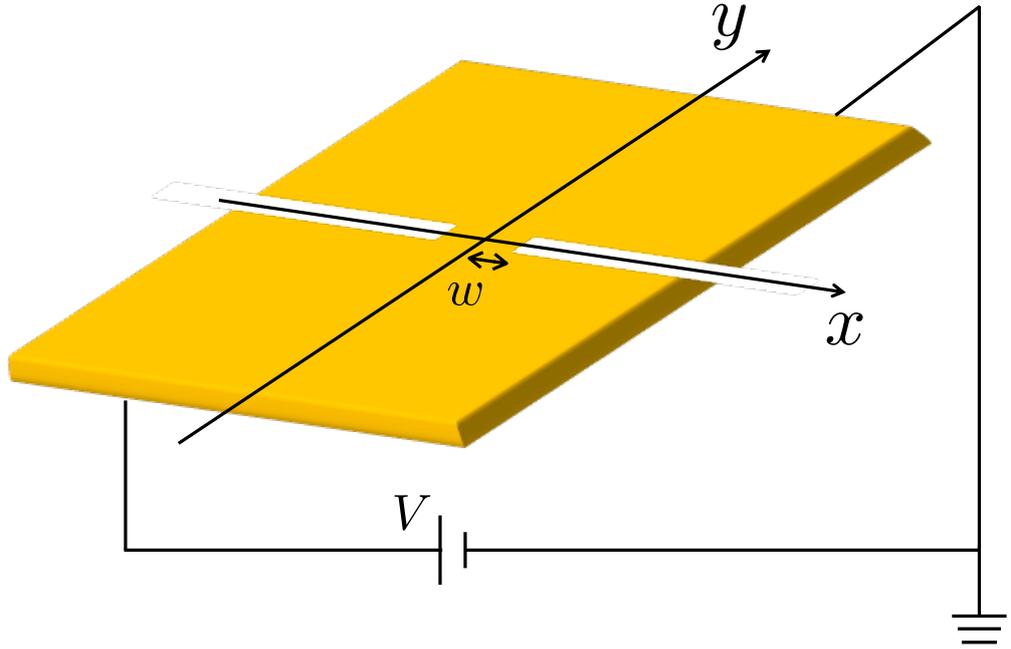


Рис. 1: Схема рассматриваемого двумерного образца. Перенос заряда возможен только через щель, расположенную при $y = 0$ внутри сегмента от $x = -w$ до $x = w$. Остальная часть образца при $y = 0$ представляет собой непроницаемый барьер (белая область). Толщина барьера бесконечно мала в направлении y .

ния» допускает семейство решений с конечным полным током через щель. Мы показываем, что решение может быть однозначно определено только после обеспечения конечности полной диссипации во всем образце Eq. (??). Примечательно, что решение, соответствующее конечной диссипации, удовлетворяет одновременно граничным условиям «прилипания» и «отсутствия напряжения» и, следовательно, удовлетворяет краевому условию частичного проскальзывания (3), при любом значении параметра λ . Это является ключевым результатом работы.

Исследуемая система обсуждалась ранее. В работе [14], было найдено решение, удовлетворявшее условию «отсутствия напряжения» (2), Но не удовлетворявшее условия прилипания (1). Как продемонстрировано ниже, это решение приводит к неинтегрируемой полной диссипации, а потому не имеет физического смысла. Также полученное нами решение не было найдено в работе Ref. [2]. Несмотря на то, что полученное в работе сопротивление равно

«супербаллистическому» сопротивлению для граничного условия без прилипания, о котором сообщалось в [3], а профиль скоростей совпадает с Eq. (S14) из работы [3], тот факт что решение так же удовлетворяет граничному условию «отсутствия напряжения»(2) там не был отмечен.

В работе также находится решение уравнения теплового баланса и распределение температуры. Мы показываем, что вблизи концов щели температура сильно повышается. Форма перегретых областей зависит от теплопроводности. При малой теплопроводности в теплообмене преобладает конвекция, и эти области сильно асимметричны относительно барьера, разделяющего две полуплоскости. В пределе нулевой теплопроводности температура расходится в конечных точках щели. С увеличением теплопроводности перегрев уменьшается и форма горячих областей становится все более симметричной.

2 Модель

Рассматриваемая нами модель состоит из двух чистых однородных полубесконечных плоскостей, соединенных щелью конечной ширины, расположенной на оси x ($y = 0$ and $-w < x < w$), w), как показано на Рис. 1. Ток электронов разрешен только через щель и запрещен на всей остальной линии. Рассмотрим вязкое течение через щель, которое в общем случае описывается уравнением Стокса

$$\eta \nabla^2 \mathbf{v} = Ne \nabla \varphi(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Здесь, η означает коэффициент вязкости, N концентрация частиц, $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ скорость жидкости, и φ - электрический потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$. Предполагается, что электронная жидкость несжимаема и квазинейтральна, то есть $\text{div} \mathbf{v} = 0$ и $N = \text{const}$.

Уравнение (4) описывает систему с пренебрежимо малым Омическим сопротивлением, в котором сила действия внешнего поля $-\nabla \varphi$ балансируется вязким трением. С точки зрения сохранения энергии, работа поля должна быть равна теплотерям на вязкое трение.

$$P(x, y) = \eta \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Заметим, о Отметим, что когда скорость и/или тензор напряжений на стенке равны нулю, граничный вклад в изменение полной энергии в системе отст [19].

В точках, далеких от щели, $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \gg w$, электрический потенциал задается граничными условиями

$$\varphi(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty, y > 0} = 0, \quad \varphi(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty, y < 0} = V \quad (6)$$

Симметрия задачи позволяет нам написать:

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= -v_x(x, -y) = -v_x(-x, y), \\ v_y(x, y) &= v_y(x, -y) = v_y(-x, y). \end{aligned} \quad (7)$$

Вводя новую переменную нии равно «вихревость» (vorticity)

$$\omega = [\nabla \times \mathbf{v}] \cdot \hat{n}, \quad (8)$$

Уравнение Стокса становится

$$[\hat{n} \times \nabla \omega(\mathbf{r})] = \frac{Ne}{\eta} \nabla \varphi(\mathbf{r}), \quad (9)$$

где \hat{n} - единичный вектор, перпендикулярный плоскости образца. Беря curl от обеих частей уравнения Eq. (9), можно показать, что вихревость удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta \omega = 0$. Вихревость $\omega(\mathbf{r})$ и электрический потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ ность $\omega(\mathbf{r})$ и электрический потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяют условиям Коши–Римана в комплексной плоскости, действительная и мнимая оси которой направлены вдоль осей x и y , соответственно. ой направлены вдоль x и y соответственно. Это означает, что комбинация этих двух функций

$$f(z) = -\frac{Ne}{\eta} \varphi(\mathbf{r}) + i\omega(\mathbf{r}) \quad (10)$$

является аналитической функцией, где $z = x + iy$. При граничных условиях отсутствия напряжения вихревость зануляется на стенках барьера. Следуя работе [14], мы берем в качестве граничных условий (i) (59) для электрического потенциала на бесконечности; (ii) условия симметрии в центре щели $\varphi = V/2$, и (iii) условие отсутствия напряжения, что приводит к нулевой вихревости на

стенах.

$$\omega = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Big|_{|x|>w, y \rightarrow 0} = 0 \quad (11)$$

С этими условиями, получаем для комплексной функции Eq. (10)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(z) \Big|_{|x|<w, y=0} &= -\frac{enV}{2\eta}, \\ \operatorname{Im} f(z) \Big|_{|x|>w, y \rightarrow 0} &= 0, \\ f(z) \Big|_{r \rightarrow \infty} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

И для поля скоростей

$$\begin{aligned} v_y &= 0 \Big|_{|x|>w}, \\ v_x &= 0 \Big|_{|x|<w}. \end{aligned} \quad (13)$$

Проблема была сведена к нахождению аналитической функции на комплексной полуплоскости зная действительную часть на граничном сегменте $y = 0$, $-w < x < w$ и мнимую часть на сегменте $y = 0$, $|x| > w$. Решение этой проблемы известно как теорема Келдыша-Седова.

2.1 Теорема Келдыша-Седова

Подробно эта теорема изложена в книге [8], в главе, посвященной краевым задачам, в одноименном параграфе. Изложим здесь суть теоремы. Рассмотрим $2n$ точек на действительной оси, такие что $-\infty < a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n < \infty$ и две вещественные функции $u(x)$, $v(x)$ с ограниченным набором особенностей первого порядка. Функция $u(x)$ определена на интервалах (a_k, b_k) и $v(x)$ – на интервалах (b_k, a_{k+1}) (с $k = 1, 2, \dots, n$ и $a_{n+1} \equiv a_n$). Задачей является найти $f(z)$, аналитичную в верхней полуплоскости, такую что $\operatorname{Re} f(z) = u(x)$ на интервалах (a_k, b_k) и $\operatorname{Im} f(z) = v(x)$ на интервалах (b_k, a_{k+1}) . Если $f(z)$, удовлетворяет условиям: (i) $f(z)$ ограничена в окрестностях всех a_k ; (ii) интеграл $\int^z f(z) dz$ ограничен в окрестностях всех b_k ; (iii) предел $f(\infty)$ конечен и предполагается действительным, то единственное решение для функции выражается через формулу

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \sum_{k=1}^n (U_k(z) + iV_k(z)) + \frac{f(\infty)}{g(z)}, \quad (14)$$

где

$$g(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - b_k}{z - a_k},$$

и

$$U_k(z) = \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)g(t)dt}{t - z}, \quad V_k(z) = \int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{v(t)g(t)dt}{t - z}.$$

2.2 Решение уравнения Стокса в случае $\lambda \rightarrow \infty$

Применяя теорему Келдыша-Седова, мы заключаем что не существует такой $f(z)$, что была бы конечна в окрестности точек $(-w, 0)$ and $(w, 0)$. Более того, все возможные решения $f(z)$ аналитичные в верхней полуплоскости и удовлетворяющие граничным условиям (12) с конечными $\int^z f(z) dz$ могут быть записаны как:

$$f(z) = \frac{NeV}{2\eta} \left[-1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - w^2}} \right] + \frac{\mathcal{C}_1}{\sqrt{z^2 - w^2}}. \quad (15)$$

Теперь можно вычислить профиль скоростей. Используя уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ и определение вихревости, получим

$$\partial_{\bar{z}}(v_y + iv_x) = \frac{1}{2} \text{Im} f(z). \quad (16)$$

Тогда, по определению,

$$u(z, \bar{z}) \equiv v_y + iv_x = \frac{1}{2} \int^{\bar{z}} [\text{Im} f](z, \bar{z}) d\bar{z} + C(z), \quad (17)$$

где $C(z)$ произвольная функция, аналитическая в верхней полуплоскости. Можно увидеть, что часть, пропорциональная \mathcal{C}_1 Ведет к логарифмическому росту скорости на бесконечности. Поэтому положим $\mathcal{C}_1 = 0$. Уравнение (13) фиксирует мнимую часть $C(z)$ на сегменте $y = 0$, $-w < x < w$ и действительную часть на сегменте $y = 0$, $|x| > w$. Это позволяет снова использовать теорему Келдыша-Седова чтобы вычислить $C(z)$ и получим

$$u(z, \bar{z}) \equiv v_y + iv_x = \frac{eNV}{8\eta i} \left[\frac{z\bar{z} - \mathcal{C}}{\sqrt{z^2 - w^2}} + \sqrt{\bar{z}^2 - w^2} \right], \quad (18)$$

где \mathcal{C} - неопределенная константа. Отметим, что в (18), Разрезы были выбраны так, чтобы они проходили вдоль барьера.

В работе [14] коэффициент \mathcal{C} был зафиксирован сравнением профиля скоростей (18) на $r \rightarrow \infty$ с профилем скоростей от точеного контакта, $w \equiv 0$ [2], что привело к

$$\mathcal{C} = 2w^2. \quad (19)$$

Этот выбор проблематичен, так как приводит к внутренне противоречивому решению (в частности, не соблюдающему закон сохранения энергии).

3 Диссипация, Работа поля и Сохранение Энергии

В этом разделе мы более подробно рассмотрим решение уравнения (18) полученного при условии отсутствия тензора напряжений на границах барьера и интегрируемой завихренности. Полезно выразить мощность диссипации, обусловленную вязкостью, как функцию комплексных переменных. Используя (5), мы получим

$$P(z, \bar{z}) = 4\eta \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}. \quad (20)$$

Еще одно полезное представление [5, 6] для вязкой диссипации через вихревость, (8):

$$P(x, y) = \eta\omega^2 + 2\eta \operatorname{div} \mathbf{S}, \quad (21)$$

где

$$\mathbf{S} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (22)$$

В окрестности краев щели, (18) и (20) дают нам ведущий член диссипации:

$$P(z, \bar{z}) \propto \frac{(w^2 - \mathcal{C})^2}{w} \left| \frac{\partial (z \pm w)^{-\frac{1}{2}}}{\partial z} \right|^2 \propto \frac{(w^2 - \mathcal{C})^2}{\rho^3}, \quad (23)$$

где $\rho = \sqrt{(x \pm w)^2 + y^2}$ представляет собой расстояние от края. Для большинства выборов \mathcal{C} , (23) расходится $\sim 1/\rho$ после интегрирования по z и \bar{z} , когда ρ стремиться к нулю.

Расходимость исчезает только когда $\mathcal{C} = w^2$. Этот выбор отличается от основанного на анализе асимптотик точечного контакта (19), сделанного в работе [14]. Заметим, что профиль скоростей при $\mathcal{C} = w^2$ удовлетворяет граничным условиям частичного прилипания при любом параметре λ

Расходимость диссипации $\mathcal{C} \neq w^2$ сопровождается расходимостью скорости вблизи краев щели, как показано на Рис. 2. Чтобы увидеть это явно, вычислим скорость в окрестности края используя полярные координаты ρ и φ определенные как

$$y = \rho \sin \varphi, \quad x = w - \rho \cos \varphi. \quad (24)$$

Здесь, $\varphi = 0$ внутри щели (т.е., для $y = 0$ и $x < w$), и растет при движении по часовой стрелке. При приближении к краю ($\rho \ll w$) скорость выражается как

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{eNV}{4\eta} \sqrt{2\rho w} \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{w^2 - \mathcal{C}}{4w\rho} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ v_y &= \frac{eNV}{4\eta} \sqrt{2\rho w} \left(\cos^3 \frac{\varphi}{2} - \frac{w^2 - \mathcal{C}}{4w\rho} \cos \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Выражение (25) применимо когда $|\varphi| < 2 \arccos [(\rho/4w)^{1/4}]$, иначе следующий порядок нельзя пренебречь. Очевидно, что если $\mathcal{C} \neq w^2$, скорости расходятся $v_x, v_y \sim \rho^{-1/2}$ рядом с краями.

В согласии с Ref. [14], значение \mathcal{C} меняет профиль скоростей вдали от щели. На больших расстояниях $|z| \gg w$ скорость выражается как

$$\begin{aligned} v_x &\approx v_r \left(\frac{xy^2}{r^3} - \frac{w^2 - \mathcal{C}}{2w^2} \frac{x}{r} \right) = v_r \left(\sin^2 \varphi - \frac{w^2 - \mathcal{C}}{2w^2} \right) \cos \varphi, \\ v_y &\approx v_r \left(\frac{y^3}{r^3} - \frac{w^2 - \mathcal{C}}{2w^2} \frac{y}{r} \right) = v_r \left(\sin^2 \varphi - \frac{w^2 - \mathcal{C}}{2w^2} \right) \sin \varphi, \end{aligned} \quad (26)$$

где $v_r = eNVw^2 / (4r\eta)$.

Заметим, что когда $\mathcal{C} = w^2$, то согласно уравнению (18), $v_x(x, 0) = \partial_y v_x(x, y)|_{y \rightarrow 0} = 0$ на границе, что означает выполнение граничных условий (3) для такого решения при любых λ . Также можно заметить, что поведение скорости на больших расстояниях не сингулярно для любых \mathcal{C} . Различие состоит только в зависимости от угла.

Обсудим баланс энергии при $\mathcal{C} = w^2$. Мощность потерь [в полярных ко-

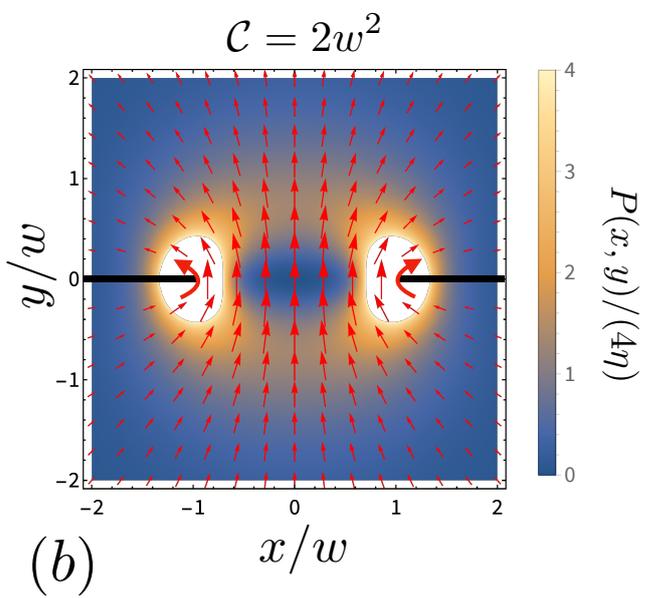
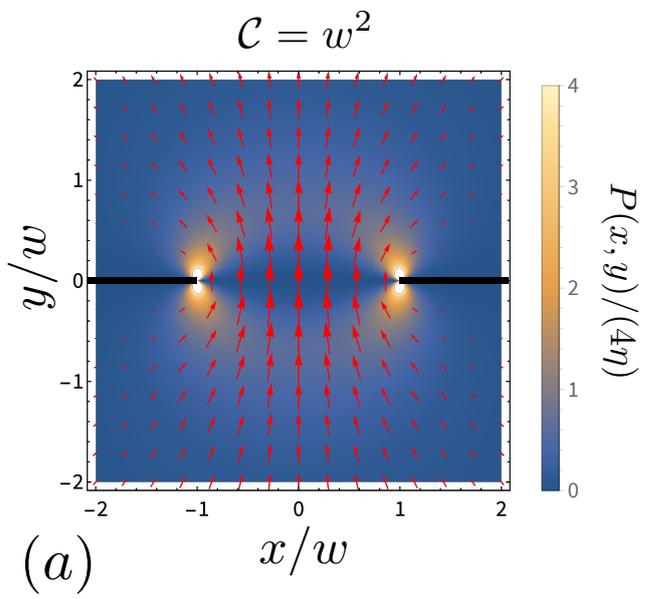


Рис. 2: Профили скорости и диссипации для (a) $\mathcal{C} = w^2$, и (b) $\mathcal{C} = 2w^2$.

ординатах (r, θ) с центром в $x = y = 0$ с углом $\theta = 0$ отвечающим $x > 0$, $y = 0^+$] выражается

$$P(r, \theta) = \frac{(eNVw^2)^2}{16\eta} \frac{4r^2 \sin^2(\theta)}{[r^4 + w^4 - 2w^2r^2 \cos(2\theta)]^{3/2}}. \quad (27)$$

Возле краев щели она становится

$$P \propto 1/\sqrt{(x \pm w)^2 + y^2} \sim 1/\rho \quad (28)$$

- интегрируема. Полная диссипация с $\mathcal{C} = w^2$ выражается как

$$\mathcal{P} = \frac{\pi (eNVw)^2}{8 \eta}. \quad (29)$$

Из закона сохранения энергии, потери на тепло равны подводимой мощности V^2/R (закон Джоуля). Отсюда мы получаем сопротивление

$$R = \frac{8}{\pi} \frac{\eta}{e^2 N^2 w^2}. \quad (30)$$

Можно сравнить этот результат с прямым вычислением сопротивления через (18) с $\mathcal{C} = w^2$ получим

$$v_y(x, y = 0) = \frac{eNV}{4\eta} \sqrt{w^2 - x^2}, \quad |x| < w.$$

Тогда полный ток

$$I = eN \int_{-w}^w v_y(x, 0) dx = \frac{(eNw)^2 V \pi}{8\eta}. \quad (31)$$

По определению сопротивления, получим

$$R = \frac{V}{I} = \frac{8\eta}{\pi e^2 N^2 w^2} = R_{\text{no-slip}},$$

где $R_{\text{no-slip}}$ было получено в работе [3] Для граничных условий с прилипанием. Этот результат совпадает с выражением (30), и подтверждает самосогласованность нашего решения.

Рассмотрим работу электрического поля напрямую. Из уравнения Стокса:

$$\begin{aligned}
Ne\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} &= -Ne\mathbf{v} \cdot \nabla\varphi = -\eta\mathbf{v} \cdot \nabla^2\mathbf{v} \\
&= -\eta [v_x (\partial_x^2 + \partial_y^2) v_x + v_y (\partial_x^2 + \partial_y^2) v_y] \\
&= -2\eta \left[u \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \bar{u} + \bar{u} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} u \right].
\end{aligned} \tag{32}$$

Полная работа электрического поля равна

$$\begin{aligned}
W &= Ne \iint dx dy \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \\
&= -4\eta \int d\bar{z} u \partial_{\bar{z}} \bar{u} \Big|_{\text{boundary}} - 4\eta \int dz \bar{u} \partial_z u \Big|_{\text{boundary}} \\
&\quad + 4\eta \iint dx dy \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}},
\end{aligned} \tag{33}$$

Где вторая строка ответственна за вклад границ. Можно заметить, что пограничные вклады равны нулю и тогда работа поля в точности равна Eqs. (20) и (29), $W = \mathcal{P}$, а значит, $R_W = R_P$. Мы показали, что все три метода вычислить сопротивление привели к одному результату.

Заметим, что для решения полученного в работе [14] эти три метода расчета сопротивления образца дают разный результат.

4 Решение уравнения Стокса при произвольном параметре λ

Несмотря на то, что решение (18) получено для условия $\lambda \rightarrow \infty$, при $\mathcal{C} = w^2$ оно решает задачу с произвольным параметром λ , включая задачу с прилипанием на границе. Однако, остается вопрос: единственно ли такое решение?

Предполагая, что полный ток через щель конечен, а скорость интегрируема на $y = 0$ boundary и стремится к нулю при $y \rightarrow +\infty$, мы можем выразить профиль $\vec{v}(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ в верхней полуплоскости через $v_x(x, 0)$

и $v_y(x, 0)$:

$$\begin{aligned} \vec{v}(x, y) = & \int \vec{K}_1(x - x', y)v_x(x', 0)dx' \\ & + \int \vec{K}_2(x - x', y)v_y(x', 0)dx' \end{aligned} \quad (34)$$

Чтобы получить интегральные ядра в уравнении (34), применим стандартную технику двумерной гидродинамики: введем функцию потока $\psi(x, y)$, такую что

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (35)$$

Уравнение Лапласа $\Delta \omega = 0$ сведется к бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 \psi = 0.$$

преобразование Фурье

$$\tilde{\psi}(k, y) = \int \psi(x, y)e^{-ikx} dx$$

приведет нас к

$$\frac{\partial^4 \tilde{\psi}(k, y)}{\partial y^4} - 2k^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}(k, y)}{\partial y^2} + k^4 \tilde{\psi}(k, y) = 0. \quad (36)$$

Так как мы ищем решения в верхней полуплоскости, надо оставить только те слагаемые, для которых $\tilde{\psi}(k, y) \rightarrow 0$ когда $y \rightarrow \infty$. Следовательно

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k, y) &= \mathcal{A}_1 e^{-|k|y} + \mathcal{A}_2 y e^{-|k|y}, \\ \tilde{v}_x(k, y) &= -|k| \mathcal{A}_1 e^{-|k|y} + (1 - |k|y) \mathcal{A}_2 e^{-|k|y}, \\ \tilde{v}_y(k, y) &= -ik \left(\mathcal{A}_1 e^{-|k|y} + \mathcal{A}_2 y e^{-|k|y} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь \tilde{v}_x, \tilde{v}_y обозначают преобразования Фурье от скоростей

$$\begin{aligned}\tilde{v}_x(k, y) &= \int v_x(x, y) e^{-ikx} dx, \\ \tilde{v}_y(k, y) &= \int v_y(x, y) e^{-ikx} dx.\end{aligned}$$

Легко выразить \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 через $\tilde{v}_x(k, 0)$ и $\tilde{v}_y(k, 0)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= i \frac{\tilde{v}_y(k, 0)}{k} \\ \mathcal{A}_2 &= \tilde{v}_x(k, 0) + \tilde{v}_y(k, 0) \frac{i|k|}{k}\end{aligned}\tag{38}$$

Выражая $\tilde{v}_x(k, y)$ и $\tilde{v}_y(k, y)$ через $\tilde{v}_x(k, 0)$ and $\tilde{v}_y(k, 0)$, И выполняя обратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned}\vec{K}_1(x - x', y) &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-|k|y + ik(x-x')} \begin{pmatrix} 1 - |k|y \\ -iky \end{pmatrix}, \\ \vec{K}_2(x - x', y) &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-|k|y + ik(x-x')} \begin{pmatrix} -iky \\ 1 + |k|y \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{39}$$

Откуда интегральные ядра выражаются как

$$\begin{aligned}\vec{K}_1(x - x', y) &= \frac{2(x - x')y}{\pi[(x - x')^2 + y^2]^2} \begin{pmatrix} x - x' \\ y \end{pmatrix}, \\ \vec{K}_2(x - x', y) &= \frac{2y^2}{\pi[(x - x')^2 + y^2]^2} \begin{pmatrix} x - x' \\ y \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{40}$$

Граничные скорости могут быть найдены через соответствующие граничные условия. Первое условия дается (3) и второе получается из требования симметрии вдоль оси $y = 0$:

$$\partial_y^2 v_x(x, y) \Big|_{y=0, |x| < w} = 0.$$

Удобно, что: (i) так как барьер непроницаем, $v_y(x, 0) \equiv 0$ при $|x| > w$, (ii) из-

за симметрии проблемы $v_x(x, 0) \equiv 0$ при $|x| < w$. После учета граничных условий, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} v_x(x, 0) &= \frac{4\lambda}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_w^\infty \frac{x'}{x'^2 - x^2} v_x(x', 0) dx', \\ 0 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-w}^w \frac{1}{x' - x} v_y(x', 0) dx'. \end{aligned} \quad (41)$$

Благодаря симметрии $v_y(x, y) = v_y(-x, y)$ второе уравнение эквивалентно

$$\int_{-w}^w \frac{1}{x' - x} v_y(x', 0) dx' = -\pi c_1 x \quad (42)$$

Это сингулярное интегральное уравнение, решение которого исследовано и может быть найдено, например, в книге [16]. Его можно записать как

$$v_y(x, 0) = c_1 \sqrt{w^2 - x^2} + \frac{c_2}{\sqrt{w^2 - x^2}}. \quad (43)$$

Интегрируя обе части первого уравнения по x , получим

$$\int_w^\infty v_x(x', 0) dx' = -\frac{4\lambda}{\pi} \int_w^\infty \frac{x'}{x'^2 - w^2} v_x(x', 0) dx'. \quad (44)$$

Если мы ищем решение, у которого не меняется знак на стене (что разумно в отсутствие турбулентностей), то единственное возможное решение такого уравнения: $v_x(x, 0) = 0$.

Отметим, что доказать, что $v_x(x, 0) = 0$ - единственное решение можно строго, используя полиномы Чебышева. Смотрите «Appendix F» в работе [1]. Таким образом, граничные скорости, приводящие к конечной диссипации выражаются как

$$v_x(x, 0) = 0, \quad v_y(x, 0) = \frac{eNV}{4\eta} \sqrt{w^2 - x^2}. \quad (45)$$

Что в точности равно скорости в щели, полученной из Теоремы Келдыша-Седова И, при подстановке в (34) даст нам результат (18). Это единственное решение для любого λ при условии конечной диссипации.

5 Распределение температуры

С профилем скорости Eq. (18), Мы можем получить соответствующее распределение температуры.

В случае нашей системы, разумно предположить что распределение температуры определяется уравнением теплового баланса [7]

$$-\kappa\nabla^2\delta T + C(\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta T = P(x, y) - N\gamma\delta T. \quad (46)$$

Здесь, $\delta T \equiv T - T_0$ обозначает разность температур по отношению к температуре подложки T_0 , κ - теплопроводность, C теплоемкость, and γ константа ответственная за электрон-фононные соударения. Будем считать что вышеуказанные константы не зависят от температуры.

Член ответственный за конвекцию $\text{div}(\mathbf{v}T) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta T$, разрушает симметрию и приводит к неравномерному распределению температуры [20, 22].

Получить решение уравнения (46) в общем виде невероятно сложно. Для простоты мы сфокусируемся на двух предельных случаях: малой и большой теплопроводности.

5.1 Предел малой теплопроводности

В этом разделе мы пренебрежем теплопроводностью ($\kappa = 0$). Тогда уравнение (46) сведется к

$$C \left(v_x \frac{\partial \delta T}{\partial x} + v_y \frac{\partial \delta T}{\partial y} \right) = P(x, y) - N\gamma\delta T \quad (47)$$

Используя метод характеристик находим

$$\begin{cases} C \frac{d\delta T}{dt} = P(z, \bar{z}) - N\gamma\delta T, \\ \frac{dz}{dt} = i\bar{u}, \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = -iu. \end{cases} \quad (48)$$

Здесь член с источником тепла $P(z, \bar{z})$ определен (20), а t обозначает "время" прошедшее с начала движения по характеристике.

Решение дифференциальных уравнений, описывающих характеристики

состоит из гипербол, параметризуемых r_0

$$\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{y^2}{w^2 - r_0^2} = 1, \quad (49)$$

или, эквивалентно

$$z\bar{z} + \sqrt{z^2 - w^2}\sqrt{\bar{z}^2 - w^2} = 2r_0^2 - w^2. \quad (50)$$

Геометрически, r_0 сопоставляется минимальному расстоянию от точки $(0, 0)$ до соответствующей кривой. Параметр r_0 выражается следующим образом (r, θ) :

$$r_0^2 = \frac{1}{2} \left(w^2 + r^2 - \sqrt{r^4 + w^4 - 2r^2w^2 \cos 2\theta} \right). \quad (51)$$

Связанное решение для температуры вдоль характеристики $\delta T(-\infty) = 0$ находится как

$$\delta T(t) = \int_{-\infty}^t \frac{P(s)}{C} \exp \left[-\frac{N\gamma(t-s)}{C} \right] ds. \quad (52)$$

В результате всех процедур (см. работу [1]) получим выражение на температуру в точке через температуру внутри щели $\delta T_0(r_0)$ (т.е. при $y = 0$, $-w < x < w$), расстояние от точки до начала координат r и расстояния от начала координат до характеристики, на которой находится эта точка r_0

$$\delta T = \delta T(\mathbf{r}) = \begin{cases} \delta T_+(\mathbf{r}), & \text{for } y > 0, \\ \delta T_-(\mathbf{r}), & y < 0, \end{cases} \quad (53)$$

где

$$\delta T_{\pm}(r_0, r) = \frac{\delta T_0(r_0) \pm \int_{r_0^2}^{r^2} I_{r_0}(u) e^{\pm \zeta f(u)} \frac{du}{w^2}}{e^{\pm \zeta f(r^2)}} \quad (54)$$

функция $f(u)$ равна

$$f(r^2) = \frac{\sqrt{[2(r^2 - r_0^2) + w^2]^2 - w^4}}{(w^2 - r_0^2)} + \frac{w^2 - 2r_0^2}{w^2 - r_0^2} \operatorname{arccosh} \left(1 + 2 \frac{r^2 - r_0^2}{w^2} \right). \quad (55)$$

Температуру внутри щели можно выразить как

$$\delta T_0(r_0) = \int_{r_0^2}^{\infty} I_{r_0}(u) e^{\zeta f(u)} \frac{du}{w^2} \quad (56)$$

Где

$$I_{r_0}(u) = T_V \frac{w^4(u - r_0^2)}{(u + w^2 - 2r_0^2)^2 \sqrt{[2(u - r_0^2) + w^2]^2 - w^4}}, \quad (57)$$

и константы, характеризующие процесс

$$\zeta = \frac{w^2}{l_{\text{vis}}^2}, \quad l_{\text{vis}} = \sqrt{\frac{eVC}{\eta\gamma}} w, \quad T_V = \frac{eNV}{C}. \quad (58)$$

Полученное распределение температур можно изобразить на графике. Также интересно изучить распределение температуры внутри щели. Обезразмерив температуру, получим

$$\varphi(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty, y > 0} = 0, \quad \varphi(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty, y < 0} = V \quad (59)$$

$$\delta T_0(r) = T_V F(\mathbf{x} = r/w)$$

где

$$F(\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} \frac{u du}{2\sqrt{u(u+1)}(u+1-x^2)^2} \times \exp \left\{ \frac{-\zeta \left[(1-2x^2) \operatorname{arccosh}(2u+1) + 2\sqrt{u(u+1)} \right]}{1-x^2} \right\} \quad (60)$$

Предельные случаи

$$F(0) = 1/3, \quad F(x \rightarrow 1) \approx \frac{\pi}{4\sqrt{2}} (1-x)^{-1/2}, \quad (61)$$

График функции $F(x)$

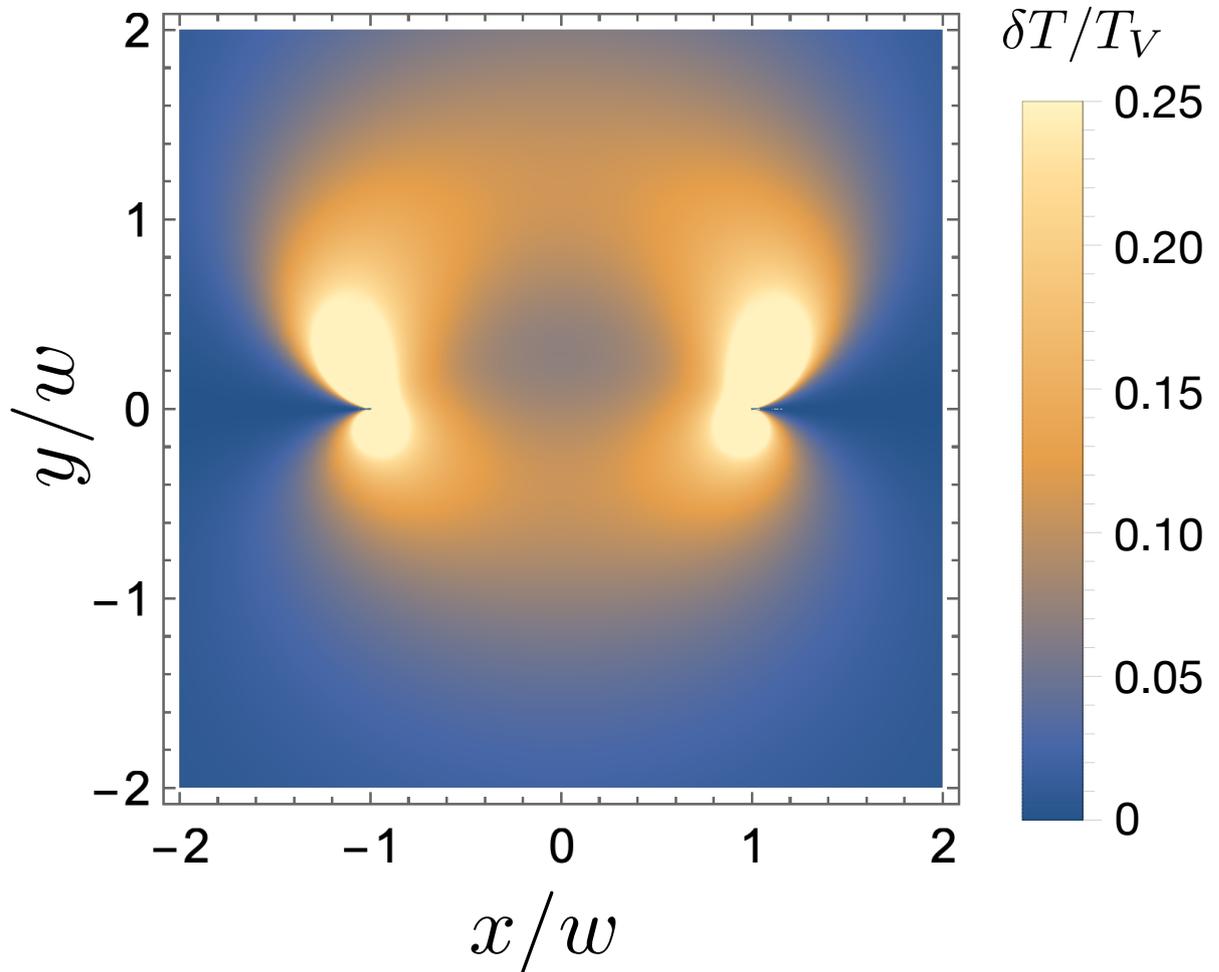


Рис. 3: Распределение температуры (разности температуры в данной точке и температуры подложки) δT , вычисленное по формуле (54) для полученного профиля скоростей и $l_{\text{vis}} = 2w$. Температура измеряется в единицах T_V , см Eq. (58). Из-за расходимости δT вблизи концов щели, значения на рисунке обрываются при $\delta T = T_V/4$ для лучшей визуализации. Асимметрия температурного профиля возникает из-за члена переноса в уравнении теплового баланса [18, 20, 22].

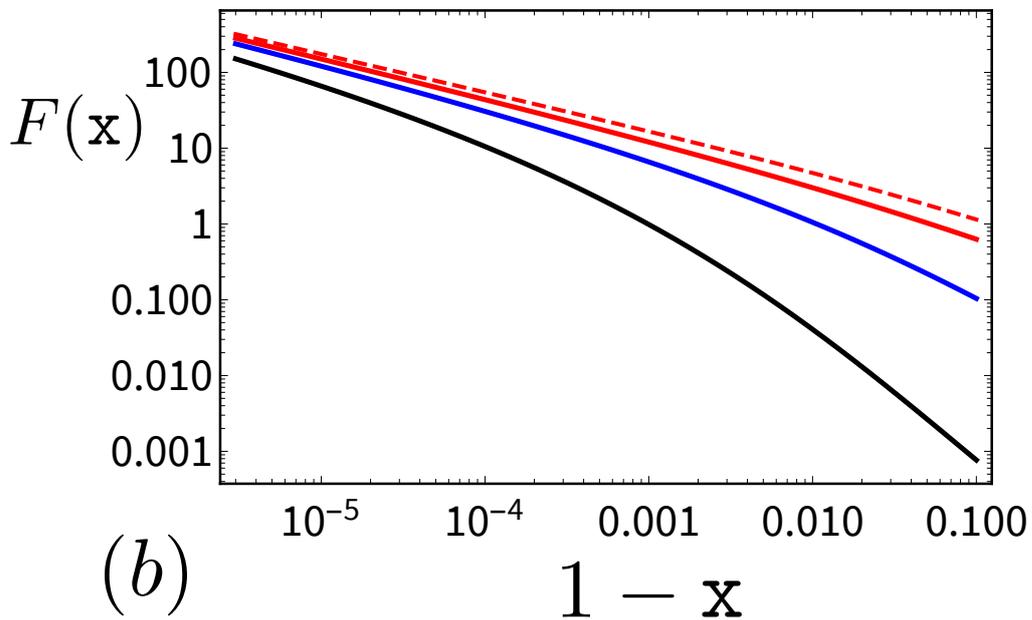
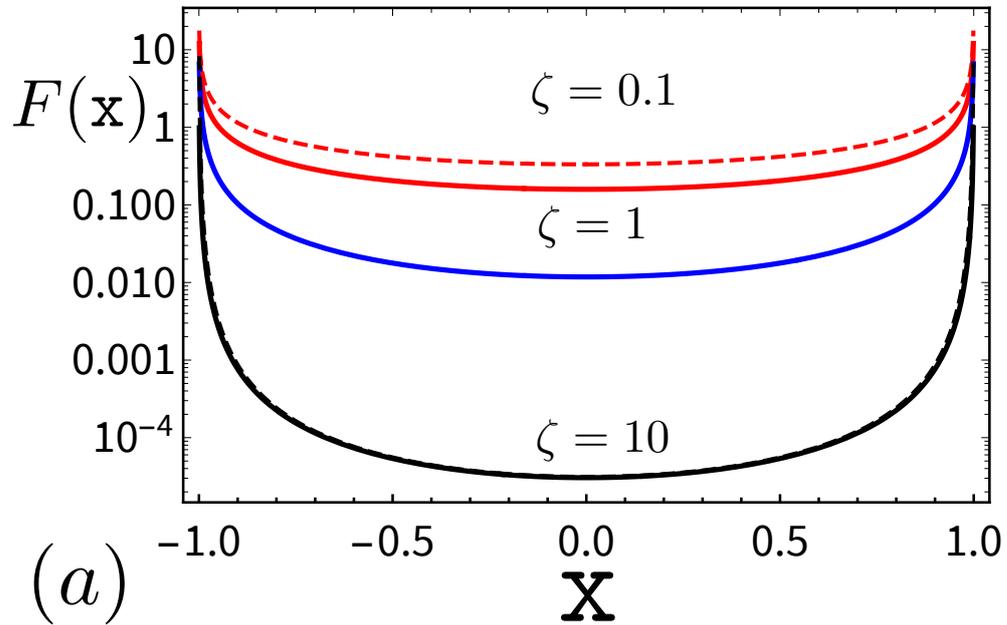


Рис. 4: Кривые функции $F(x)$ в щели (сплошные линии), для $\zeta = 10$ (черным), $\zeta = 1$ (синим) and $\zeta = 0.1$ (красным). Пунктирная красная линия - асимптотика для малых ζ

5.2 Предел большой теплопроводности

В другом пределе можно пренебречь конвективным членом и свести уравнение теплового баланса к

$$-\kappa \nabla^2 \delta T = P(x, y) - N\gamma \delta T. \quad (62)$$

Оно может быть решено

$$\delta T(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint dx' dy' \mathcal{K}(x - x', y - y') P(x', y'), \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(r) &= \int_0^\infty k dk \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{n\gamma} k^2} J_0(kr) \\ &= \frac{1}{l_{\text{diff}}^2} K_0\left(\frac{r}{l_{\text{diff}}}\right). \end{aligned} \quad (64)$$

В уравнении . (64), мы ввели еще один масштаб

$$l_{\text{diff}} \equiv \sqrt{\kappa/(N\gamma)}$$

Отражающий масштаб длины диффузии

Полученное распределение тепла симметрично, что получается из симметрии в уравнении диффузии. Приведем анализ на Рис. ??

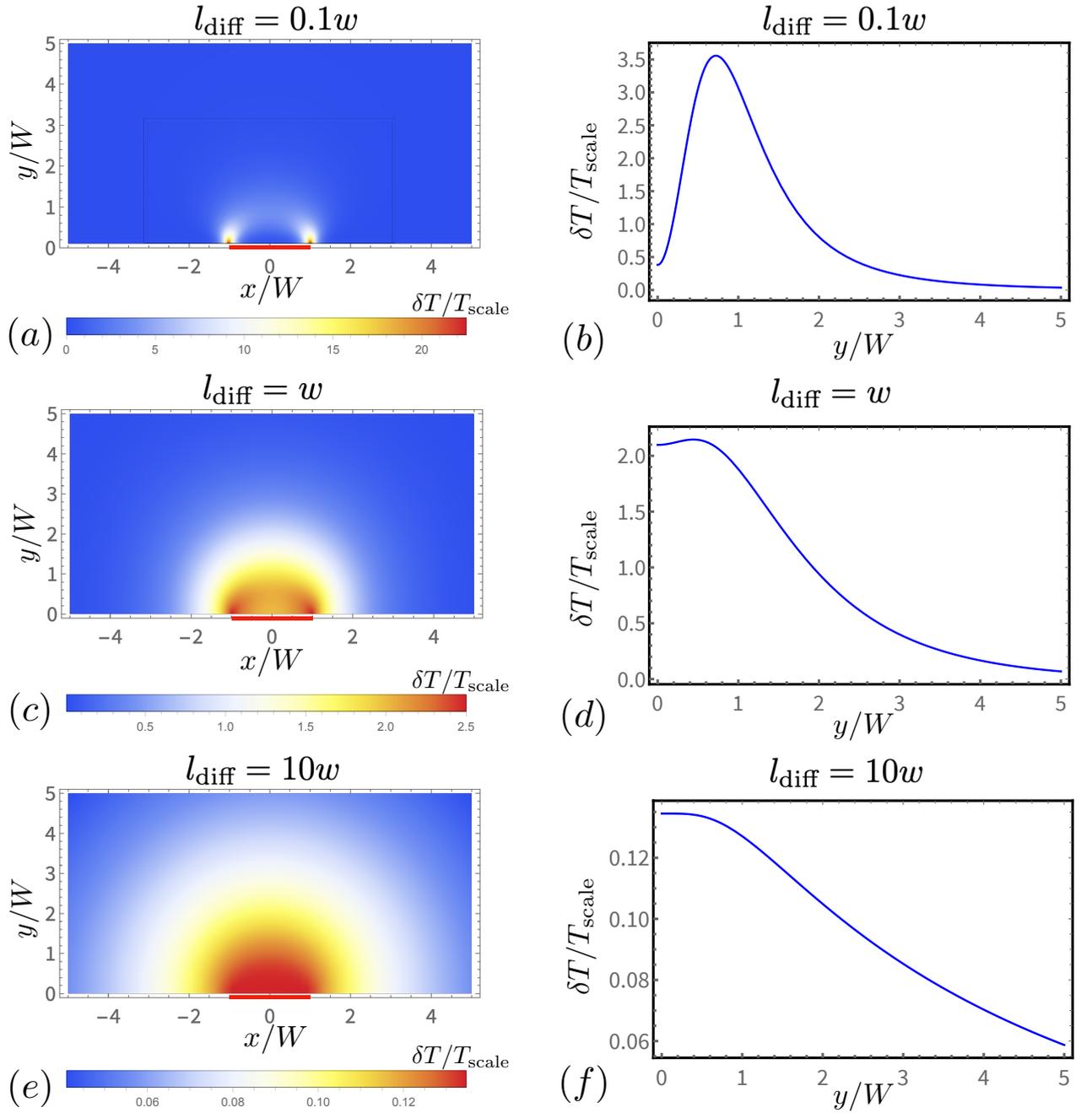


Рис. 5: Temperature distribution [in units of $T_{\text{scale}} = e^2 NV^2 / (32\pi\gamma\eta)$] of the upper half-plane of a sample with a strong diffusion. We provide only temperature profile of the upper half-plane, since the distribution is symmetric (with respect to $y = 0$) without contribution from the convection term. The slit has been marked out by the red solid line. We choose $l_{\text{diff}} = 0.1w$ for (a) and (b); $l_{\text{diff}} = w$ for (c) and (d); $l_{\text{diff}} = 10w$ for (e) and (f). Figures of the right panel present temperature distribution at $x = 0$, when y changes. The tail of an exponentially decaying temperature is clear in (b) and (d), but missing in (f).

6 Выводы

. Таким образом, мы исследовали вязкий гидродинамический транспорт электронов в чистом двумерном образце между двумя полубесконечными плоскостями, разделенными непроницаемой преградой с щелью конечного размера. Мы рассчитали профиль скорости, предполагая, что между этими плоскостями приложено возбуждающее напряжение. Показано, что стандартные граничные условия на барьере, скажем «отсутствие напряжения», вместе с условием о заданном падении напряжения на образце не могут однозначно определять скорость. Существует бесконечно много решений, удовлетворяющих этим условиям. Среди всех возможных решений мы нашли единственное, которое приводит к конечной общей рассеиваемой мощности, соблюдая, таким образом, сохранение энергии. Наш основной результат состоит в том, что это единственное физическое решение, характеризующееся конечным током через щель и дающее конечное полное рассеяние, удовлетворяет одновременно и граничным условиям «отсутствия проскальзывания» и «отсутствия напряжения». Это, в свою очередь, означает, что длина проскальзывания, которая часто используется для граничного условия частичного проскальзывания (Максвелла), не имеет отношения к этой задаче и не входит ни в какой физический результат.

Мы использовали полученный поток скоростей для решения уравнения теплового баланса и исследовали эволюцию профиля электронной температуры при изменении теплопроводности. Мы обнаружили, что перегретые области появляются вблизи концов щелей. Форма этих областей определяется конкуренцией диффузии и конвекции тепла. При большой теплопроводности преобладает диффузия и эти области примерно симметричны относительно барьера, разделяющего две полуплоскости. Кроме того, за счет увеличения теплопроводности наблюдается пересечение кольцевого и вытянутого профилей температуры. Повышение напряжения (а значит, и роли конвекции) приводит к двум эффектам: усилению асимметрии температурного режима вдоль линий гидродинамического течения и увеличению перегрева. В пределе нулевой теплопроводности температура на концах щели расходится. Это расхождение лечится конечной теплопроводностью. Наши предсказания могут быть непосредственно проверены экспериментально с использованием недавно разработанных сверхточных методов одновременного наноизображе-

ния распределения температуры.

Проделанная работа привела к публикации [1].

Список литературы

- [1] Tikhonov Asafov, Kachorovskii and Zhang. Viscous flow through a finite-width slit: Boundary conditions and dissipation. *Physical Review B*, 106, 2022.
- [2] Gregory Falkovich and Leonid Levitov. Linking spatial distributions of potential and current in viscous electronics. *Phys. Rev. Lett.*, 119:066601, Aug 2017.
- [3] Haoyu Guo, Ekin Ilseven, Gregory Falkovich, and Leonid S. Levitov. Higher-than-ballistic conduction of viscous electron flows. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(12):3068–3073, 2017.
- [4] Egor I. Kiselev and Jörg Schmalian. Boundary conditions of viscous electron flow. *Phys. Rev. B*, 99:035430, Jan 2019.
- [5] Yang-Moon Koh. Vorticity and viscous dissipation in an incompressible flow. *KSME Journal*, 8:35–42, April 1993.
- [6] H Lamb. *Hydrodynamics*. Dover publications, New York, 1945.
- [7] L. Landau and E. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics, Volume 6, Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [8] M. Lavrentev and B. Shabat. *Methods of the theory of function of complex variable*. Nauka, Moscow, 1973.
- [9] Songci Li, Maxim Khodas, and Alex Levchenko. Conformal maps of viscous electron flow in the Gurzhi crossover. *Phys. Rev. B*, 104:155305, Oct 2021.
- [10] A. Lucas and K. C Fong. Hydrodynamics of electrons in graphene. *J. Phys: Condens. Matter*, 30:053001, 2018.

- [11] James Clerk Maxwell. On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature. *Phil. Trans. R. Soc.*, 170:231–256, January 1879.
- [12] Boris N. Narozhny. Electronic hydrodynamics in graphene. *Annals of Physics*, 411:167979, 2019.
- [13] Boris N. Narozhny, Igor V. Gornyi, Alexander D. Mirlin, and Jörg Schmalian. Hydrodynamic approach to electronic transport in graphene. *Annalen der Physik*, 529(11):1700043, 2017.
- [14] Sergey S. Pershoguba, Andrea F. Young, and Leonid I. Glazman. Current distribution in a slit connecting two graphene half planes. *Phys. Rev. B*, 102:125404, Sep 2020.
- [15] Marco Polini and Andre K. Geim. Viscous electron fluids. *Physics Today*, 73(6):28–34, 2020.
- [16] Andrei Polyinin and Alexander Manzhurov. *Handbook of integral equations*. CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, 1998.
- [17] Marvin Qi and Andrew Lucas. Distinguishing viscous, ballistic, and diffusive current flows in anisotropic metals. *Phys. Rev. B*, 104:195106, Nov 2021.
- [18] Michal Rokni and Y. Levinson. Joule heat in point contacts. *Phys. Rev. B*, 52:1882–1889, Jul 1995.
- [19] Michal Shavit, Andrey Shytov, and Gregory Falkovich. Freely flowing currents and electric field expulsion in viscous electronics. *Phys. Rev. Lett.*, 123:026801, Jul 2019.
- [20] K. S. Tikhonov, I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, and A. D. Mirlin. Asymmetry of nonlocal dissipation: From drift-diffusion to hydrodynamics. *Phys. Rev. B*, 100:205430, Nov 2019.
- [21] Iacopo Torre, Andrea Tomadin, Andre K. Geim, and Marco Polini. Nonlocal transport and the hydrodynamic shear viscosity in graphene. *Phys. Rev. B*, 92:165433, Oct 2015.

- [22] Gu Zhang, Valentin Kachorovskii, Konstantin Tikhonov, and Igor Gornyi. Heating of inhomogeneous electron flow in the hydrodynamic regime. *Phys. Rev. B*, 104:075417, Aug 2021.