

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”»

Факультет физики

Никитин Илья Сергеевич

**ВЫБОР СТРАТЕГИИ ПЕРЕЗАПУСКА
В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОГО ЗНАНИЯ СТАТИСТИКИ
ПРОЦЕССА**

Выпускная квалификационная работа
по направлению подготовки 03.03.02 Физика
образовательная программа «Физика»

Научный руководитель
канд. физ.-мат. наук, доц.
Белан Сергей Александрович

Москва 2023

Аннотация

Оптимизация стохастических процессов путем перезапуска является предметом активных исследований в статистической физике и находит практическое применение в программировании. Между тем, далеким до окончательного разрешения остается один их ключевых вопросов: как именно следует перезапускать процесс, детальная статистика которого неизвестна, чтобы быть уверенным, что наше вмешательство не ухудшит производительность? Мотивированные недавним теоретическим прогрессом в этой области, здесь мы строим ряд конструктивистских критериев эффективности перезапуска для задачи оптимизации среднего времени завершения и задачи оптимизации вероятностей расщепления. Будучи выраженными через небольшое число легко оцениваемых статистических характеристик процесса, эти критерии дают возможность принимать обоснованные решения о перезапуске, основанные на частичной информации о процессе. Наш анализ обобщает ранее полученные для периодической стратегии результаты на случай присутствия штрафа за перезапуск. Кроме прочего, нами был получен первый пример конструктивистского критерия эффективности для широко используемого пуассоновского перезапуска в терминах моментов низшего порядка. Границы применимости различных протоколов перезапуска проиллюстрированы на простых модельных примерах.

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка исследовательской проблемы	5
3	Оптимизация среднего времени завершения	7
3.1	Формулировка модели	7
3.2	Периодический протокол	9
3.3	Пуассоновский протокол	10
3.4	Гамма-протокол	13
4	Оптимизация вероятности успеха	15
4.1	Формулировка модели	15
4.2	Периодический протокол	16
4.3	Пуассоновский протокол	17
4.4	Гамма-протокол	18
5	Примеры применения стратегий	21
6	Выводы	22
7	Благодарности	23
A	Вывод ур. (2)	23
B	Вывод ур. (3, 4)	24
C	Вывод ур. (10)	25
D	Вывод ур. (13, 14 и 15)	28
E	Вывод ур. (18 и 51)	29
F	Вывод ур. (38)	30

1 Введение

Перезапуск как метод ускорения рандомизированных задач впервые был предложен в начале девяностых годов двадцатого века в теории алгоритмов. Авторы работ [1, 2] показали, что применение перезапуска к вероятностному алгоритму поиска, чье время завершения представляет собой сильно флуктуирующую случайную переменную, может приводить к "проседанию" хвостов функции плотности вероятности времени завершения и уменьшению математического ожидания длительности процесса. Интуитивно, происхождение этого эффекта связано с тем, что для некоторых задач бывает выгоднее прерывать затянувшиеся реализации процесса поиска и просто начинать заново, дабы избежать бесполезного блуждания в областях конфигурационного пространства, далеких от искомого решения.

К настоящему моменту перезапуск стал рутинной процедурой, встраиваемой во многие практически важные алгоритмы [3, 4, 5]. В качестве показательного примера можно упомянуть бэктрекинг - алгоритм поиска с возвратом. Классическим применением бэктрекинга являются задачи типа quasigroup completion problem (QCP) [6, 7, 8]. Пусть, к примеру, требуется составить учебное расписание пар на факультете, которое бы удовлетворяло некоторому набору исходных предпочтений преподавателей и студентов, а также требованиям по нагрузке, диктуемым учебным планом. Иными словами, на нулевом шаге имеется некоторая таблица, в которой уже есть несколько заполненных клеток, и нам необходимо распределить оставшиеся занятия по пустым клеткам таким образом, чтобы при этом не возникало противоречий предзаданным ограничениям. Простейшая версия алгоритма бэктрекинга предлагает на каждом шаге решения поставленной задачи делать ход, случайным образом выбранный из имеющегося набора допустимых вариантов, а если легальных ходов не осталось, то возвращаться на шаг назад, чтобы выбрать какой-нибудь другой вариант из числа имеющихся на соответствующем этапе легальных ходов. Такой подход в конечном счете приводит к решению задачи, однако, как показывает практика, плотность распределения случайного времени выполнения алгоритма обладает тяжелыми хвостами. Последнее обстоятельство связано с тем, что неудача в рандомизированном выборе, осуществляемом на начальных шагах реализации алгоритма, может увести алгоритм в пустые ветви дерева имеющихся возможностей, на бесполезное исследование которых уйдет экспоненциально много шагов. Эпизодический перезапуск алгоритма решает проблему затянувшегося поиска, устраняя степенные хвосты в статистике времени выполнения алгоритма (см. рис. 1).

За пределами теории алгоритмов, оптимизация стохастических процессов путем перезапуска является предметом активных исследований в статистической физике. Стартовой точкой этих исследований послужила работа Эванса и Маджумдара [10], обнаруживших, что стохастический перезапуск сокращает среднее время первого прохождения броуновского движения. Кроме того, дополнительный импульс исследования влияния перезапуска на протекание стохастических про-

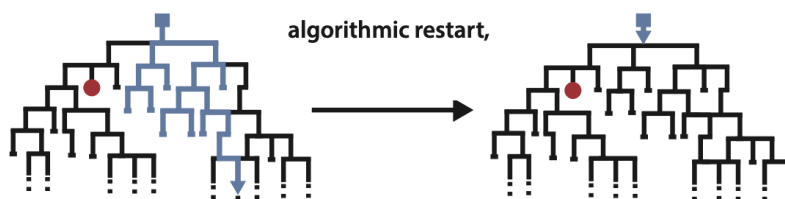


Рис. 1: Схематическое представление алгоритма бэктрекинга с перезапуском (рисунок взят из работы [9]). Алгоритм сканирует дерево возможностей в поиске решения (обозначено красной точкой). Эпизодический перезапуск процедуры поиска призван прерывать блуждание в областях далеких от искомого решения.

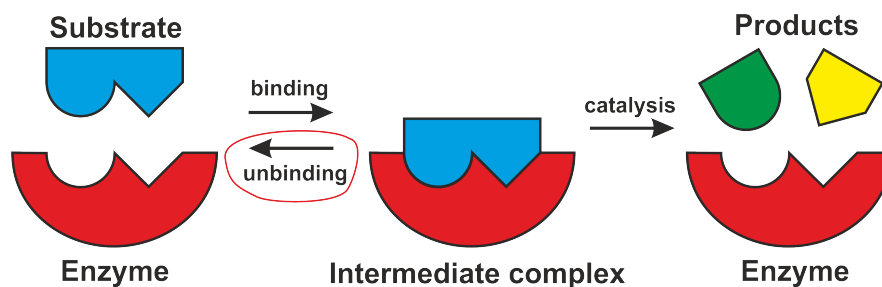


Рис. 2: Схематическое представление ферментативной реакции, протекающей по схеме Михаэлиса-Ментен.

цессов получили благодаря работам [11, 12, 13, 14], посвященным кинетике ферментативных реакций. Ферменты (они же энзимы) - это белковые соединения, участвующие практически во всех метаболических процессах в клетках живых организмов и обеспечивающие необходимую для поддержания функционирования организма скорость этих процессов [15]. Каждый элементарный акт ферментативной реакции состоит из двух основных этапов: (а) обратимого связывания молекулы субстрата с ферментом и (б), собственно, каталитической стадии, которая приводит к образованию продукта из исходной молекулы субстрата (см. рис. 2). Обратимость первого из этих двух шагов означает, что промежуточный комплекс фермента-субстрат (интермедиат) может распасться до завершения каталитического шага, что соответствует своего рода перезапуску каталитического цикла. Таким образом, биохимические превращения с участием ферментов – это пример процессов, где перезапуск естественным образом возникает как интегральная часть модели исследуемого явления.

Сформулированное более ста лет назад уравнение Михаэлиса-Ментен [16, 17] однозначно утверждает, что увеличение константы скорости распада, характеризующей частоту разваливания промежуточных комплексов фермент-субстрат, должно сопровождаться уменьшением скорости ферментативной реакции. Это теоретическое предсказание, однако, основано на предположении, что промежуточный комплекс имеет единственную конформацию. В упомянутых выше теоретических

работах [11, 12, 13, 14] было показано, что если выйти за рамки простой схемы Михаэлиса-Ментен и предположить, что интермедиат фермент-субстрат обладает несколькими возможными конформациями, характеризующимися достаточно сильно различающимися рейтами образования продукта, то при условии большой концентрации субстрата скорость ферментативной реакции будет увеличиваться с ростом рейта диссоциации интермедиата. Заметим, однако, что попыткам практического применения этого любопытного эффекта неизбежно будет препятствовать сложность осуществления "точечного" контроля над рейтом диссоциации: все принципиально осуществимые способы изменения рейта распада интермедиата (такие как изменение температуры, изменение рН раствора, структурная модификация белка-фермента) влекут за собой также изменение других кинетических констант реакции.

2 Постановка исследовательской проблемы

Как обсуждалось в предыдущем разделе, эффект повышения скорости протекания стохастических процессов за счет перезапуска представляет интерес для самых разных областей. При этом независимо от контекста одной из ключевых является задача построения эффективной стратегии перезапуска, которая гарантированно понижала бы среднее время завершения рассматриваемого стохастического процесса. Общая методология, развитая в работах [2, 9], позволяет при условии известной статистики стохастического процесса предсказать, будет ли эффективным применение того или иного протокола перезапуска. Более того, как доказано в работах [2, 5, 9], для любого стохастического процесса оптимальным является строго регулярная (периодическая) стратегия, подразумевающая, что мы перезапускаем процесс каждые τ_* единиц времени, пока он наконец не завершится. Конкретное же значение оптимального периода τ_* можно определить, зная плотность распределения случайного времени завершения исходного процесса.

На практике, однако, статистика оптимизируемого процесса зачастую бывает неизвестна или же известна лишь частично [2, 18, 11, 3, 5, 19, 20]. Пытаясь решить проблему оптимизации среднего времени завершения в таких ситуациях, авторы работы [2] разработали универсальную стратегию перезапуска. Эта стратегия, ныне известная как стратегия Луби, обладает следующим примечательным свойством: независимо от статистических деталей исходного процесса, среднее время завершения этого процесса в присутствии стратегии Луби отличается от среднего времени завершения, обеспечиваемого оптимальным периодическим протоколом, лишь наличием дополнительного логарифмического множителя.

Будучи бесспорно остроумной и элегантной, стратегия Луби, однако, имеет два серьезных недостатка. Во-первых, она работает только для процессов с дискретным временем завершения. В случае же непрерывного времени, как недавно было показано Лоренцом [5], универсальной стратегии в том смысле, который в это понятие вкладывали авторы работы [2], вовсе не существует. А

во-вторых, что намного более существенно, даже для процессов с дискретным временем, применяя стратегию Луби, мы можем быть уверенным лишь в том, что результирующее среднее время завершения будет не слишком плохим в сравнении со значением, обеспечиваемым оптимальной периодической стратегией. При этом, однако, нет никаких гарантий, что стратегия Луби не ухудшит производительность в сравнении с невозмущенным процессом [5].

Таким образом, хорошо исследованы два предельных случая: если известна полная статистика случайного времени завершения случайного процесса, то довольно легко найти оптимальную стратегию перезапуска, в то время как в условиях полного отсутствия информации о статистических свойствах процесса единственный способ гарантированно не ухудшить производительность состоит в том, чтобы не перезапускать процесс вообще.

В недавней работе [21] был проанализирован промежуточный и наиболее реалистичный с точки зрения приложений сценарий частично известной статистики оптимизируемого процесса. Авторам работы [21] удалось сформулировать конструктивистские критерии эффективности регулярного перезапуска, выраженные через простые статистические характеристики стохастического процесса, которые могут быть оценены с использованием относительно небольшой выборки реализаций случайного времени завершения. В отличие от ранее известных достаточных условий эффективности перезапуска, конструктивистские критерии не просто служат индикатором существования эффективной стратегии перезапуска, но и предлагают конкретный протокол, гарантированно сокращающий среднее время завершения процесса.

Упомянутые результаты, однако, получены в предположении о моментальных событиях перезапуска, в то время как в реальности перезапуск неизбежно сопровождается некоторой потерей времени. Скажем, в контексте каталитической активности отдельных белков-ферментов, где перезапуску каталитической стадии соответствует диссоциация интермедиата фермент-субстрат, ферменту, который отделяется от субстрата, требуется некоторое время, чтобы найти новый в окружающем растворе [11, 13, 22]. Аналогично, перезапуск компьютерной программы требует некоторых дополнительных затрат времени. Кроме того, модели с немгновенным перезапуском обеспечивают более точное описание диффузии коллоидных частиц в присутствии механизма возвращения к исходной позиции [23]. Конструктивистские критерии для моделей с немгновенными перезапусками в известной нам литературе отсутствуют. Кроме того, неизвестны также какие-либо конструктивистские критерии эффективности стратегий перезапуска отличных от простейшей периодической.

Наконец, отметим, что потенциал перезапуска как инструмента контроля не ограничен оптимизацией среднего времени завершения. Так, к примеру, в работе [24] было показано, что применение перезапуска может повышать вероятность реализации требуемого исхода для процессов с несколькими альтернативными сценариями завершения. Там же было сформулировано достаточное условие существования эффективного пуассоновского протокола перезапуска. Насколько нам

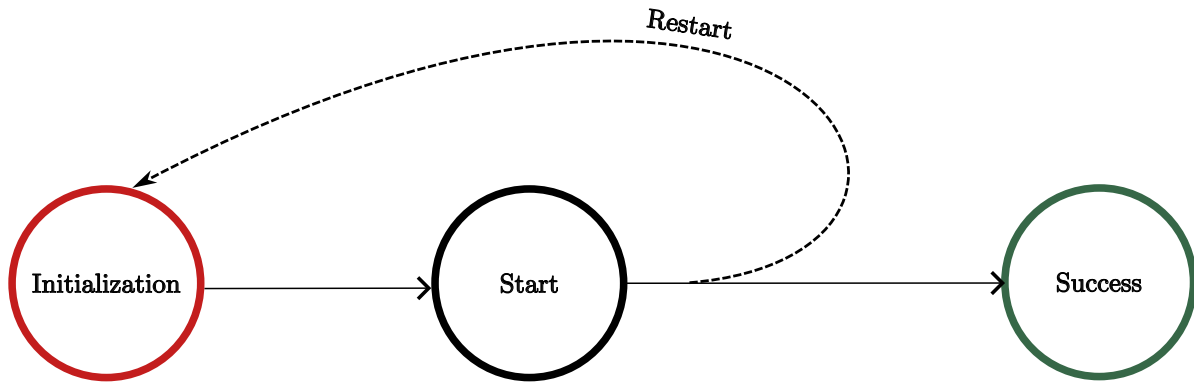


Рис. 3: Схематическое изображение перезапуска в задаче оптимизации среднего времени завершения

известно, конструктивистские критерии эффективности перезапуска в задаче оптимизации вероятности реализации желаемого исхода до сих пор не были сформулированы.

Данная дипломная работа закрывает указанные белые пятна. Ниже мы строим ряд конструктивистских критериев эффективности периодического и стохастических протоколов немоментального перезапуска как в задаче оптимизации среднего времени завершения, так и в задаче оптимизации вероятности успешного завершения процесса.

3 Оптимизация среднего времени завершения

3.1 Формулировка модели

Рассмотрим стохастический процесс, случайная длительность которого T имеет плотность распределения $P(T)$. В отсутствие перезапуска время ожидания завершения процесса равно сумме $T + T_{on}$, где T_{on} обозначает задержку по времени, сопровождающую инициализацию процесса. Мы будем считать, что T_{on} представляет собой независимую от T случайную величину с произвольной функцией распределения.

Протокол перезапуска \mathcal{R} характеризуется (возможно, бесконечной) последовательностью временных интервалов τ_1, τ_2, \dots . Периодическим перезапуском будем называть протокол, при котором $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau$, тогда как стохастический перезапуск подразумевает, что временные интервалы τ_1, τ_2, \dots между событиями перезапуска не обязательно равны друг другу и сами по себе являются случайными величинами. Если процесс успел завершиться не позднее времени τ_1 , отсчитываемого от момента старта, то на этом история заканчивается. В противном случае, текущая попытка прерывается и инициализируется новая статистически независимая реализация процесса. Далее, если эта реализация, в свою очередь, не завершается за время τ_2 , то она также прерывается и запуска-

ется третья попытка. И так далее, пока процесс наконец не завершится. Как и исходная инициализация процесса, каждый перезапуск сопровождается некоторой случайной задержкой времени T_{on} . Схема процесса изображена на рис. 3. Протокол считается эффективным, если $\langle T_{\mathcal{R}} \rangle < \langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle$, где $T_{\mathcal{R}}$ это случайное время ожидания завершения процесса в присутствии протокола \mathcal{R} , а угловые скобки означают усреднение по статистике исходного процесса и перезапуска (в случае, если речь идет о стохастическом протоколе). Эффективность перезапуска удобно определить как

$$\eta_{\mathcal{R}} = 1 - \frac{\langle T_{\mathcal{R}} \rangle}{\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle}. \quad (1)$$

Ясно, что для эффективных протоколов $0 < \eta_{\mathcal{R}} \leq 1$.

В самом простом и самом важном случае периодического перезапуска, среднее время завершения может быть выражено как (см. Аппендикс)

$$\langle T_{\tau} \rangle = \frac{\langle T \rangle + \tau - \langle |T - \tau| \rangle + 2\langle T_{on} \rangle}{2Pr[T \leq \tau]}, \quad (2)$$

где $\langle |T - \tau| \rangle$ – это среднее абсолютное отклонение (MAD - mean absolute deviation) случайной величины T от значения τ . Уравнение (2) было впервые получено Элиазаром и Ревени [21] в частном случае $T_{on} = 0$.

Другим важным сценарием является пуассоновский перезапуск, для которого интервалы между последовательными событиями перезапуска являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с экспоненциальной плотностью вероятности $\rho(\tau) = re^{-r\tau}$, где r – рейт перезапуска. Среднее время завершения в присутствии пуассоновского перезапуска можно выразить следующим образом (см. [13] или Аппендикс)

$$\langle T_r \rangle = \frac{1 - \tilde{P}(r) + r\langle T_{on} \rangle}{r\tilde{P}(r)}, \quad (3)$$

где $\tilde{P}(r) = \int_0^{\infty} dT P(T) e^{-rT}$ – Лаплас-образ функции распределения $P(T)$ случайного времени завершения исходного процесса.

Кроме того, мы рассмотрим гамма-протокол, для которого случайные интервалы времени между перезапусками независимы друг от друга и распределены согласно гамма-распределению $\rho(\tau) = \frac{\beta^k}{\Gamma(k)} \tau^{k-1} e^{-\beta\tau}$ где β – рейт, а k – параметр формы (shape parameter). В Аппендиксе нами показано, что в случае $k = 2$ среднее время завершения в присутствии гамма-перезапуска выражается как

$$\langle T_{\beta} \rangle = \frac{\beta\langle T_{on} \rangle + 2 - 2\tilde{P}(\beta) + \beta\partial_{\beta}\tilde{P}(\beta)}{\beta\tilde{P}(\beta) - \beta^2\partial_{\beta}\tilde{P}(\beta)}. \quad (4)$$

Зная $P(T)$ можно при помощи формул (2), (3) и (4) найти диапазон значений контрольного параметра (периода τ или рейта r , β), в котором соответствующая стратегия эффективна, и даже подобрать наиболее оптимальную точку, реализующую минимум среднего времени завершения.

Наша цель состоит в том, чтобы сформулировать конструктивистские критерии эффективности указанных протоколов перезапуска, которые бы давали возможность выбрать пусть не самое оптимальное, но гарантированно эффективное значение соответствующего контрольного параметра в отсутствие знания полной статистики, закодированной в функции $P(T)$. Несколько подобных критериев были предложены в работе [21] для частного случая периодического перезапуска с нулевым штрафом $T_{on} = 0$.

3.2 Периодический протокол

Изложим в общих чертах используемый нами ниже способ построения искомых конструктивистских критериев эффективности перезапуска. Предположим, мы выполнили оценку сверху вида $\langle T_\tau \rangle \leq \mathcal{T}$, где \mathcal{T} - это некоторая функция от периода перезапуска τ и небольшого числа простых статистических характеристик невозмущенного процесса (моменты, медианное значение, MAD и т.д.). Тогда решение неравенства $\mathcal{T} \leq \langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle$ относительно периода τ определяет множество (возможно, пустое) значений периода, для которых производительность гарантированно повышается. Далее, минимизируя на этом множестве \mathcal{T} , мы можем найти значение периода τ_{opt} , обеспечивающее максимальную гарантированную эффективность. Продемонстрируем теперь конкретные реализации этой простой идеи.

Так как для любой случайной величины T справедливо $\langle |T - \tau| \rangle \geq \langle |T - m| \rangle$ (см. Аппендикс), где m - медианное значение, причем равенство достигается при $\tau = m$, то с учетом (2) получаем следующую оценку сверху

$$\langle T_\tau \rangle \leq \frac{\langle T \rangle + \tau - \langle |T - m| \rangle + 2\langle T_{on} \rangle}{2Pr[T \leq \tau]}. \quad (5)$$

Отсюда видно, что при условии $m + \langle T_{on} \rangle < \langle |T - m| \rangle$ существует диапазон значений периода регулярного перезапуска $m \leq \tau < \langle |T - m| \rangle - \langle T_{on} \rangle$, для которых гарантированно выполняется неравенство $\langle T_\tau \rangle \leq \langle T \rangle + \tau - \langle |T - m| \rangle + 2\langle T_{on} \rangle < \langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle$. Из указанного интервала оптимальной является точка $\tau_0 = m$, так как в этом случае достигается наибольшая гарантированная эффективность, равная

$$\eta_1 = \frac{\langle |T - m| \rangle - m - \langle T_{on} \rangle}{\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle}. \quad (6)$$

Описанный протокол является обобщением стратегии, предложенной в работе [21], на случай ненулевой длительности событий перезапуска.

Далее, в работе [25] было показано, что неравенство $2m < \langle T \rangle$ является достаточным условием существования эффективного периодического протокола в отсутствие штрафа за перезапуск. Покажем, что этот результат можно расширить до конструктивистского критерия, учитывающего, к тому же, присутствие штрафа за перезапуск. В силу неравенства Йенсена имеем $\langle |T - \tau| \rangle \geq \langle T \rangle - \tau$,

а значит

$$\langle T_\tau \rangle \leq \frac{\tau + \langle T_{on} \rangle}{Pr[T \leq \tau]}. \quad (7)$$

Отсюда очевидно, что если для стохастического процесса выполнено условие $m < \frac{1}{2}\langle T \rangle - \frac{1}{2}\langle T_{on} \rangle$, то, применяя регулярный перезапуск с периодом $m \leq \tau < \frac{1}{2}\langle T \rangle - \frac{1}{2}\langle T_{on} \rangle$, мы гарантированно сократим среднее время завершения, так как в этом случае $\langle T_\tau \rangle \leq 2\tau + 2\langle T_{on} \rangle < \langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle$. При этом гарантированная эффективность максимальна при $\tau_0 = m$ и оценивается как

$$\eta_2 \geq 1 - \frac{2(m + \langle T_{on} \rangle)}{\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle}. \quad (8)$$

3.3 Пуассоновский протокол

Регулярный перезапуск важен благодаря своему оптимальному свойству, о котором уже шла речь выше. А именно, если найдено такое значение $\tau_* \geq 0$ (может быть $\tau_* = +\infty$), что справедливо $\langle T_{\tau_*} \rangle \leq \langle T_\tau \rangle$ для любого $\tau \geq 0$, то $\langle T_{\tau_*} \rangle \leq \langle T_{\mathcal{R}} \rangle$ для любых \mathcal{R} . Однако, как показали предыдущие исследования, периодический протокол с неоптимальным периодом $\tau \neq \tau_*$ может проигрывать другим стратегиям перезапуска [13]. Поскольку оптимальный период τ_* регулярного перезапуска не обязан быть равен медианному времени завершения исходного процесса m , то построенные выше регулярные стратегии в общем случае не являются оптимальными. Кроме того, условия их применимости являются лишь достаточными, но не необходимыми условиями существования эффективного протокола. Словом, нарушение для заданного стохастического процесса условий $m + \langle T_{on} \rangle < \langle |T - m| \rangle$ и $m < \frac{1}{2}\langle T \rangle - \frac{1}{2}\langle T_{on} \rangle$ не означает, что эффективный протокол перезапуска вовсе не может быть построен.

С учетом сказанного, интересно построить гарантированно эффективные стратегии перезапуска, отличные от периодической. Особенно привлекательным в этой связи является пуассоновский перезапуск, изученный на примере большого числа модельных задач и обладающий примечательными универсальными свойствами. Так, например, известно простое достаточное условие эффективности пуассоновского перезапуска [26]

$$\langle T^2 \rangle > 2\langle T \rangle(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle). \quad (9)$$

Заметим, однако, что последнее неравенство служит лишь индикатором существования эффективной пуассоновской стратегии, не предъявляя ее. Более того, логика вывода этого критерия подсказывает, что знания одних только первых двух статистических моментов случайного времени завершения недостаточно для выбора гарантированно эффективного рейта перезапуска, так как пара $\langle T \rangle$ и $\langle T^2 \rangle$ определяет лишь угол наклона графика зависимости $\langle T_r \rangle$ в точке $r = 0$, ничего не говоря о ее поведении для ненулевых r .

Конструктивистское достаточное условие эффективности пуассоновского перезапуска удается сформулировать, если добавить информацию о моменте третьего порядка. Итак, пусть известны

первые три момента, $\langle T \rangle$, $\langle T^2 \rangle$ и $\langle T^3 \rangle$, случайного времени завершения интересующего нас стохастического процесса. Пользуясь результатами работы [27] (см. также Аппендикс), мы можем оценить снизу Лаплас-образ плотности распределения $P(T)$ как

$$\tilde{P}(r) \geq 1 - r\langle T \rangle + \frac{r^2\langle T^2 \rangle^2}{r\langle T^3 \rangle + 2\langle T^2 \rangle}. \quad (10)$$

Предполагая, что выражение в правой части (10) положительно, из (3) и (10) получаем следующую оценку

$$\langle T_r \rangle \leq \frac{r\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle - \frac{r\langle T^2 \rangle^2}{r\langle T^3 \rangle + 2\langle T^2 \rangle}}{1 - r\langle T \rangle + \frac{r^2\langle T^2 \rangle^2}{r\langle T^3 \rangle + 2\langle T^2 \rangle}}. \quad (11)$$

Множество гарантированно эффективных рейтов, таким образом, должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{r\langle T_{on} \rangle + r\langle T \rangle - \frac{r\langle T^2 \rangle^2}{r\langle T^3 \rangle + 2\langle T^2 \rangle}}{1 - r\langle T \rangle + \frac{r^2\langle T^2 \rangle^2}{r\langle T^3 \rangle + 2\langle T^2 \rangle}} < \langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle, \\ 1 - r\langle T \rangle + \frac{r^2\langle T^2 \rangle^2}{r\langle T^3 \rangle + 2\langle T^2 \rangle} > 0, \\ r > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Решая эту систему в предположении, что выполнено достаточное условие эффективности пуассоновского перезапуска (9), находим (см. детали в Аппендиксе)

$$0 < r < \frac{\langle T^2 \rangle (\langle T^2 \rangle - 2\langle T \rangle (\langle T \rangle + T_{on}))}{(\langle T \rangle + T_{on}) (\langle T \rangle \langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2)}. \quad (13)$$

Далее, легко показать, что в пределах интервала, заданного (13), стоящее в правой части неравенства (11) выражение достигает своего минимального значения в точке r_3 , положение которой дается формулой (см. Аппендикс)

$$r_3 = \frac{-2\langle T^2 \rangle \mathcal{T}_{on} + \sqrt{2\langle T^2 \rangle^3 [\mathcal{T}_{on} \langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2 - 2\mathcal{T}_{on} \langle T^2 \rangle \langle T_{on} \rangle] [\langle T^3 \rangle \langle T \rangle - \langle T^2 \rangle^2]^{-1}}}{\mathcal{T}_{on} \langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2}, \quad (14)$$

Таким образом, при заданных значениях первых трех моментов, $\langle T \rangle$, $\langle T^2 \rangle$ и $\langle T^3 \rangle$, перезапуск с рейтом $r = r_3$ обеспечивает самый высокий гарантированный выигрыш в производительности, если пользоваться оценкой (11). Как легко показать из (1), (10) и (14), результирующая эффективность при этом оценивается как (см. Аппендикс)

$$\eta_3 \geq 1 - \frac{\mathcal{T}_{on} \langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2}{\mathcal{T}_{on} [\langle T^3 \rangle - 2\langle T \rangle \langle T^2 \rangle] - 2\mathcal{T}_{on} r_3 [\langle T \rangle \langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2]}. \quad (15)$$

В предельном случае нулевой длительности перезапуска $T_{on} = 0$ получаем довольно компактные выражения для точки экстремума

$$r_3|_{T_{on}=0} = \frac{\sqrt{2}\langle T^2 \rangle^{3/2} - 2\langle T \rangle \langle T^2 \rangle}{\langle T \rangle \langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2}. \quad (16)$$

и оценки эффективности

$$\eta_3 \geq \frac{2\langle T^2 \rangle \langle T \rangle^2 + \langle T^2 \rangle^2 - 2\sqrt{2}\langle T \rangle \sqrt{\langle T^2 \rangle^3}}{\langle T \rangle \left(2\langle T \rangle \langle T^2 \rangle + \langle T^3 \rangle - 2\sqrt{2}\sqrt{\langle T^2 \rangle^3} \right)}. \quad (17)$$

Отметим, что предложенный способ построения эффективной пуассоновской стратегии не единственно возможный. Альтернативно, Лаплас-образ плотности распределения неотрицательной случайной величины можно оценить снизу как [27] (также см. Аппендикс)

$$\tilde{P}(r) \geq \sum_{k=0}^{2l-1} (-1)^k \frac{r^k \langle T^k \rangle}{k!}, \quad (18)$$

где $l = 1, 2, \dots$. Оценим тогда Лаплас-образ $\tilde{P}(r)$ в числителе формулы (3) при помощи ур. (111), положив $l = 2$, то есть $\tilde{P}(r) \geq 1 - r\langle T \rangle + \frac{r^2}{2}\langle T^2 \rangle - \frac{r^3}{6}\langle T^3 \rangle$. Далее, для оценки Лаплас-образа, стоящего в знаменателе, воспользуемся ур. (111) при $l = 1$: $\tilde{P}(r) \geq 1 - r\langle T \rangle$. При $r < 1/\langle T \rangle$ для среднего времени завершения тогда получим

$$\langle T_r \rangle \leq \frac{6T_{on} + 6\langle T \rangle - 3r\langle T^2 \rangle + r^2\langle T^3 \rangle}{6 - 6r\langle T \rangle}. \quad (19)$$

Множество эффективных рейтов, следовательно, дается решением системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{6T_{on} + 6\langle T \rangle - 3r\langle T^2 \rangle + r^2\langle T^3 \rangle}{6 - 6r\langle T \rangle} < \langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle, \\ r < \frac{1}{\langle T \rangle}, \\ r > 0, \end{cases} \quad (20)$$

откуда, предполагая выполненным условие (9), находим непустой интервал гарантированно эффективных рейтов

$$0 < r < \frac{3(\langle T^2 \rangle - 2\langle T \rangle(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle))}{\langle T^3 \rangle}. \quad (21)$$

Оптимальный рейт можно найти из условия экстремума правой части неравенства (19)

$$r_4 = \frac{1}{\langle T \rangle} - \frac{\sqrt{\langle T^3 \rangle(\langle T^3 \rangle - 3\langle T^2 \rangle \langle T \rangle + 6\langle T \rangle^2 \mathcal{T}_{on})}}{\langle T \rangle \langle T^3 \rangle}. \quad (22)$$

Эффективность может быть оценена снизу как

$$\eta_4 \geq 1 - \frac{3\langle T^2 \rangle - 2\langle T^3 \rangle r_{opt}^c}{6\langle T \rangle (\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle)}. \quad (23)$$

Наконец, используя (10) для оценки Лаплас-образа в числителе правой части формулы (3) и следующее из (10) более слабое неравенство $\tilde{P}(r) \geq 1 - r\langle T \rangle$ для оценки знаменателя, получим третий

способ построения бесприорного пуассоновского протокола. В предположении $r < 1/\langle T \rangle$, для среднего времени завершения при таком подходе имеем

$$\langle T_r \rangle < \frac{2(\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle)\langle T^2 \rangle + r[(\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle)\langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2]}{(1 - r\langle T \rangle)(r\langle T^3 \rangle + 2\langle T^2 \rangle)}. \quad (24)$$

Тогда множество гарантированно эффективных реитов определяется решением системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{2(\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle)\langle T^2 \rangle + r[(\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle)\langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2]}{(1 - r\langle T \rangle)(r\langle T^3 \rangle + 2\langle T^2 \rangle)} < \langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle, \\ r < \frac{1}{\langle T \rangle}, \\ r > 0. \end{cases} \quad (25)$$

и имеет вид

$$0 < r < \frac{\langle T^2 \rangle [\langle T^2 \rangle - 2\langle T \rangle(\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle)]}{(\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle)\langle T \rangle\langle T^3 \rangle}. \quad (26)$$

Оптимальный реит находится из условия экстремума правой части неравенства (24).

$$r_5 = \frac{-2\mathcal{T}_{on}\langle T^2 \rangle + \sqrt{2}\sqrt{(2\mathcal{T}_{on}\langle T \rangle\langle T^2 \rangle + \mathcal{T}_{on}\langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2)\langle T^2 \rangle^3[\langle T \rangle\langle T^3 \rangle]^{-1}}}{\mathcal{T}_{on}\langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2}, \quad (27)$$

где $\mathcal{T}_{on} = \langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle$. Оценка на эффективность выражается как

$$\eta_5 \geq 1 - \frac{\langle T^3 \rangle (\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle) - \langle T^2 \rangle^2}{(\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle) (\langle T^3 \rangle - 2\langle T \rangle (r_{opt}^{ms}\langle T^3 \rangle + \langle T^2 \rangle))}. \quad (28)$$

Более общо, используя неравенство (18) при $l > 2$, а также комбинируя его с ур. (10), можно в принципе получить неограниченное число иных гарантированно эффективных пуассоновских стратегий. Здесь мы привели лишь простейшие протоколы, требующие для своего применения знания минимального количества статистических моментов.

3.4 Гамма-протокол

Проанализируем теперь стохастический гамма-перезапуск. Из (4) находим, что если выполнено условие

$$\langle T^3 \rangle \geq 3(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle)\langle T^2 \rangle. \quad (29)$$

то $\partial_\beta \langle T_\beta \rangle < 0$ в точке $\beta = 0$. Значит, неравенство (29) является достаточным условием существования эффективного протокола гамма-перезапуска. Первые три момента, $\langle T \rangle$, $\langle T^2 \rangle$ и $\langle T^3 \rangle$, однако, не позволяют выбрать гарантированно эффективное значение параметра β . Сформулировать

конструктивистский критерий эффективности гамма-стратегии удастся, добавив информации о статистическом моменте четвертого порядка $\langle T^4 \rangle$.

Чтобы выработать для среднего времени завершения $\langle T_\beta \rangle$, заданного ур. (4), оценку сверху, заметим, что производную Лаплас-образа $\partial_\beta \tilde{P}(\beta)$ можно связать с Лаплас-образом вспомогательной функции $Q(T) = \frac{T}{\langle T \rangle} P(T)$. Действительно,

$$\partial_\beta \tilde{P}(\beta) = \partial_\beta \int_0^\infty dT P(T) e^{-\beta T} = - \int_0^\infty dT P(T) T e^{-\beta T} = -\langle T \rangle \tilde{Q}(\beta). \quad (30)$$

Поскольку $Q(T)$ неотрицательна и нормирована на единицу, то она является функцией распределения некоторой случайной величины и ее Лаплас образ $\tilde{Q}(\beta)$ может быть оценен снизу при помощи неравенства (18) как

$$\tilde{Q}(\beta) \geq \sum_{k=0}^{2l-1} (-1)^k \frac{\beta^k \langle T^k \rangle_Q}{k!}, \quad (31)$$

где $\langle T^n \rangle_Q \equiv \int_0^\infty T^n Q(T) dT = \frac{\langle T^{n+1} \rangle}{\langle T \rangle}$. Из (30) и (31) тогда находим

$$\partial_\beta \tilde{P}(\beta) \leq \sum_{k=0}^{2l-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \beta^k \langle T^{k+1} \rangle. \quad (32)$$

Уравнения (4), (18) и (32) совместно позволяют записать

$$\langle T_\beta \rangle \leq \frac{\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle - \frac{\beta^2}{6} \langle T^3 \rangle + \frac{\beta^3}{6} \langle T^4 \rangle}{1 - \frac{\beta^2}{2} \langle T^2 \rangle - \frac{\beta^3}{6} \langle T^3 \rangle}. \quad (33)$$

Далее, потребовав, чтобы выражение в правой части последнего неравенства было меньше чем $\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle$, находим диапазон эффективных реитов

$$0 < \beta < \frac{\langle T^3 \rangle - 3(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle) \langle T^2 \rangle}{(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle) \langle T^3 \rangle + \langle T^4 \rangle}. \quad (34)$$

Ожидаемо, заданный ур. (34) интервал не пуст, если выполнено найденное выше достаточное условие (29). Для вычисления наилучшего рейта, обеспечивающего максимальную гарантированную эффективность, а также определения результирующей эффективности, требуется решить алгебраическое уравнение 3-й степени, что удобнее делать численными методами.

Следуя той же логике, можно получить гарантированно эффективные стратегии обобщенного гамма-перезапуска с произвольным натуральным параметром формы k плотности распределения $\rho(\tau) = \frac{\beta^k}{\Gamma(\beta)} \tau^{k-1} e^{-\beta \tau}$. Заметим, однако, что с ростом k растет и количество статистических моментов, значения которых нужно знать, для применения соответствующей стратегии.

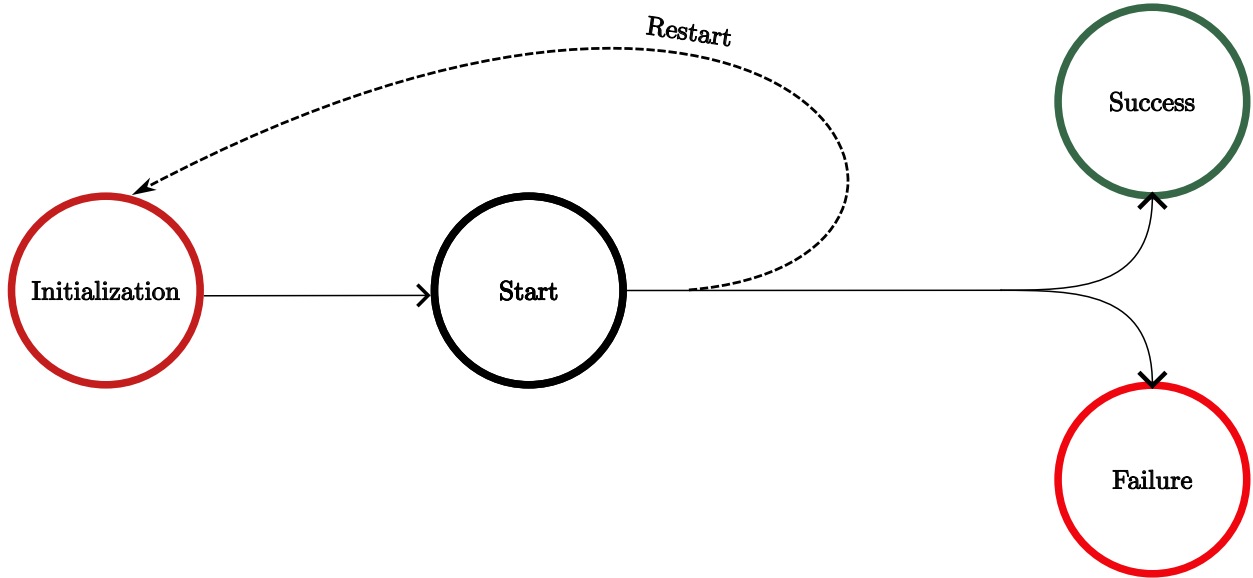


Рис. 4: Схематическое изображение перезапуска в задаче оптимизации вероятности успеха

4 Оптимизация вероятности успеха

4.1 Формулировка модели

До сих пор мы говорили об оптимизации среднего времени завершения стохастического процесса. Между тем, перезапуск также может быть использован как инструмент контроля над вероятностями различных исходов для процессов с несколькими альтернативными сценариями завершения [24]. Примерами таких процессов являются, например, случайный поиск с несколькими поглощающими состояниями [28, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 29, 30], случайный поиск с распадом [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47], химические превращения с конкурирующими путями реакции [48, 49, 50], фолдинг биополимера в одно из нескольких нативных состояний [51, 52, 53, 54, 55, 56]. В этой секции мы решаем задачу построения стратегий перезапуска, гарантирующих, что случайный процесс завершится желаемым образом.

В качестве модели рассмотрим случайный процесс, который может завершиться одним из двух различных способов - успехом и неудачей. Этот процесс характеризуется случайным временем завершения T , имеющим плотность распределения $P(T)$. Последняя может быть представлена как сумма $P(T) = P^s(T) + P^f(T)$, где $P^s(T)$ и $P^f(T)$ обозначают вклады успешных и неудачных исходов соответственно. Обратим внимание на то, что нормировка функции $P^s(T)$ определяет "невозмущенную" вероятность p успешного исхода в отсутствие перезапуска: $p = \int_0^\infty P^s(T) dT$.

Как и в случае, когда речь шла об оптимизации среднего времени завершения, протокол перезапуска \mathcal{R} задан последовательностью временных интервалов τ_1, τ_2, \dots между моментами перезапусков. Будем говорить, что протокол эффективен, если его применение увеличивает вероятность

успеха, то есть $p_{\mathcal{R}} > p$. Соответствующую эффективность перезапуска определим как

$$\chi = \frac{p_{\mathcal{R}} - p}{1 - p}. \quad (35)$$

Для полезных протоколов, таким образом, имеем $0 < \chi \leq 1$.

Если процесс перезапускается строго периодическим образом всякий раз, когда проходит τ единиц времени, то результирующая вероятность наблюдать успешный исход равна [24]

$$p_{\tau} = \frac{\int_0^{\tau} P^s(T) dT}{\int_0^{\tau} P(T) dT}. \quad (36)$$

Будучи подверженным пуассоновскому перезапуску, процесс прерывается в случайные моменты, характеризующиеся экспоненциальным распределением времени ожидания с рейтом r , и запускается снова. Вероятность успеха p_r для перезапускаемого процесса определяется по формуле

$$p_r = \frac{\tilde{P}^s(r)}{\tilde{P}(r)}, \quad (37)$$

где $\tilde{P}^s(r)$ и $\tilde{P}(r)$ определены как Лаплас-образы, соответственно, функций $P^s(T)$ и $P(T)$ в точке r .

Наконец, если применить к процессу гамма-протокол, для которого интервалы между последовательными событиями перезапуска независимо выбраны из распределения с функцией плотности $\rho(\tau) = \frac{\beta^k}{\Gamma(k)} \tau^{k-1} e^{-\beta\tau}$, то результирующая вероятность успеха при $k = 2$ будет даваться следующим выражением

$$p_{\beta} = \frac{\beta \partial_{\beta} \tilde{P}^s(\beta) - \tilde{P}^s(\beta)}{\beta \partial_{\beta} \tilde{P}(\beta) - \tilde{P}(\beta)}. \quad (38)$$

Отметим, что ур. (36-38) справедливы при наличии произвольно распределенного случайного штрафа за перезапуск.

4.2 Периодический протокол

Предположим, что выполняется условие $m_s < m$, где m_s - медианное время завершения удачных попыток и m - безусловное медианное значение процесса. Эти метрики определены соотношениями $p \int_0^{m_s} dT P^s(T) = 1/2$ и $(1 - p) \int_0^{m_f} dT P^f(T) = 1/2$. Из (36) тогда легко увидеть, что перезапуск с периодом, лежащим в интервале

$$m_s < \tau < m, \quad (39)$$

гарантированно эффективен, поскольку в этом случае справедливо

$$p_{\tau} = \frac{\frac{p}{2} + \int_{m_s}^{\tau} dT P^s(T)}{\frac{1}{2} - \int_{\tau}^m dT P(T)} > p. \quad (40)$$

К сожалению, оптимальный период, обеспечивающий наибольшую гарантированную эффективность χ на интервале (39), не может быть выражен через такие простые метрики как m_s и m , а зависит от тонких деталей функции распределения $P(T)$.

4.3 Пуассоновский протокол

В работе [24] было получено простое достаточное условие существования эффективного пуассоновского протокола перезапуска в форме неравенства

$$\langle T_s \rangle < \langle T \rangle, \quad (41)$$

где $\langle T_s \rangle = p^{-1} \int_0^\infty dT P^s(T) T$ - среднее время завершения удачных реализаций, $\langle T \rangle$ - безусловное среднее время завершения процесса.

Этот критерий, однако, ничего не говорит о том, как выбрать рейт перезапуска, поскольку знания лишь линейных статистических моментов для этих целей недостаточно. Покажем, что добавление информации о втором моменте времени завершения $\langle T^2 \rangle$ позволяет сформулировать конструктивистский критерий эффективности пуассоновского перезапуска.

Заметим, что в присутствии пуассоновского перезапуска вероятность успеха, заданная уравнением (37), может быть оценена снизу как

$$p_r \geq \frac{1 - r \langle T_s \rangle}{1 - \frac{r \langle T \rangle^2}{r \langle T^2 \rangle + \langle T \rangle}} p, \quad (42)$$

где мы воспользовались оценкой $P^s(r) \geq p(1 - r \langle T_s \rangle)$, следующей из ур. (10), а также неравенством [27] (также см. Аппендикс)

$$P(r) \leq 1 - \frac{r \langle T \rangle^2}{r \langle T^2 \rangle + \langle T \rangle}. \quad (43)$$

Из (42) прямо следует, что если выполнено условие (41), то пуассоновский перезапуск с рейтом, лежащим в интервале

$$0 < r < \frac{\langle T \rangle (\langle T \rangle - \langle T_s \rangle)}{\langle T^2 \rangle \langle T_s \rangle}, \quad (44)$$

гарантирует выполнение неравенства $p_r > p$, то есть повышает шансы на успех. Кроме того, как легко показать, исследуя правую часть неравенства (48) на экстремум, принадлежащая указанному интервалу точка

$$r_2^* = \frac{-\langle T_s \rangle \langle T \rangle \langle T^2 \rangle + \sqrt{\langle T \rangle^3 \langle T^2 \rangle \langle T_s \rangle (\langle T \rangle \langle T_s \rangle + \sigma^2)}}{\sigma^2 \langle T^2 \rangle \langle T_s \rangle}, \quad (45)$$

где $\sigma^2 = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2$, обеспечивает максимальный гарантированный выигрыш при заданных значениях $\langle T_s \rangle$, $\langle T \rangle$ и $\langle T^2 \rangle$. Результирующая эффективность при этом оценивается снизу как

$$\chi_2 > \frac{p}{1-p} \frac{\langle T \rangle}{\sigma^4} \cdot \left[((\langle T \rangle^2 + \langle T^2 \rangle) \langle T_s \rangle - \langle T \rangle \sigma^2) - 2\sqrt{\langle T \rangle \langle T^2 \rangle \langle T_s \rangle (\langle T \rangle \langle T_s \rangle + \sigma^2)} \right]. \quad (46)$$

Приведенный способ построения интервала гарантированно эффективных рейтов не единственно возможный. Альтернативно, пользуясь результатами работы [57], мы можем оценить Лаплас-образ сверху как

$$\tilde{P}(r) \leq 1 - \frac{\langle T \rangle^2}{\langle T^2 \rangle} + \frac{\langle T \rangle^2}{\langle T^2 \rangle} e^{-\frac{\langle T^2 \rangle}{\langle T \rangle} r}, \quad (47)$$

и тогда из ур. (37) получим

$$p_r \geq \frac{1 - r \langle T_s \rangle}{1 - \frac{\langle T \rangle^2}{\langle T^2 \rangle} + \frac{\langle T \rangle^2}{\langle T^2 \rangle} e^{-\frac{\langle T^2 \rangle}{\langle T \rangle} r}} p. \quad (48)$$

Потребовав, чтобы выражение в правой части последнего неравенства превосходило невозмущенную вероятность успеха p , находим, что если выполнено условие $\langle T_s \rangle < \langle T \rangle$, то все рейты, лежащие в диапазоне $0 < r < r_c$, где r_c представляет собой решение трансцендентного уравнения

$$1 - \frac{\langle T^2 \rangle \langle T_s \rangle}{\langle T \rangle^2} r - e^{-\frac{\langle T^2 \rangle}{\langle T \rangle} r} = 0, \quad (49)$$

гарантированно приводят к увеличению шансов на успех. Интересно заметить, что при $\langle T \rangle - \langle T_s \rangle \ll \langle T \rangle$, получается $r_c \approx 2 \frac{\langle T \rangle - \langle T_s \rangle}{\langle T^2 \rangle}$, что вдвое превосходит соответствующее граничное значение, диктуемое ур. (44).

4.4 Гамма-протокол

Наконец, рассмотрим построение гарантированно эффективного гамма-протокола. Из (38) видим, что если выполнено условие

$$\langle T^2 \rangle \geq \langle T_s^2 \rangle, \quad (50)$$

то $\partial_\beta p_\beta > 0$ при $\beta = 0$ и, следовательно, неравенство (50) является достаточным условием существования эффективной гамма-стратегии. Однако знания двух моментов $\langle T^2 \rangle$ и $\langle T_s^2 \rangle$ недостаточно для надежного выбора конкретного рейта β . Действительно, указанная пара моментов определяет лишь угол наклона графика зависимости p_β в точке $\beta = 0$, ничего не говоря о ее поведении для ненулевых β . Покажем, что гарантированно эффективный рейт может быть найден, если дополнительно известен момент третьего порядка $\langle T^3 \rangle$.

Вероятность успеха p_β , диктуемая уравнением (38), может быть оценена сверху разными способами. Сперва, давайте оценим в знаменателе (38) оба слагаемых с помощью (см. Аппендикс)

$$\tilde{P}(\beta) \leq \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k \frac{\beta^k \langle T^k \rangle}{k!} \quad (51)$$

при $l = 1$. В числителе слагаемые оценим неравенствами вида (18). Для $-\partial_\beta \tilde{P}(\beta) = \langle T \rangle \tilde{Q}(\beta)$ воспользуемся оценками при $l = 1$, а для $P(\tilde{\beta})$ возьмем $l = 2$, тогда получим

$$p_\beta \geq \frac{1 - \frac{\beta^2}{2} \langle T_s^2 \rangle - \frac{\beta^3}{6} \langle T_s^3 \rangle}{1 - \frac{\beta^2}{2} \langle T^2 \rangle + \frac{\beta^3}{2} \langle T^3 \rangle} p. \quad (52)$$

Тогда, потребовав, чтобы приведенная оценка была больше, чем невозмущенная вероятность успеха p , получим, что при условии (50) рейты, принадлежащие интервалу

$$0 < \beta < \frac{3(\langle T^2 \rangle - \langle T_s^2 \rangle)}{3\langle T^3 \rangle + \langle T_s^3 \rangle}, \quad (53)$$

гарантируют повышение шансов на успех.

Альтернативно, для вероятности успеха p_β , заменив оценку $\tilde{P}(\beta)$ в числителе на более слабую оценку при $l = 1$, можно записать

$$p_\beta \geq \frac{2 - 2\beta^2 \langle T_s^2 \rangle}{2 - \beta^2 \langle T^2 \rangle + \beta^3 \langle T^3 \rangle} p. \quad (54)$$

Потребовав, чтобы выражение в правой части приведенной оценки превосходило невозмущенную вероятность успеха p , находим следующий интервал гарантированно эффективных рейтов

$$0 < \beta < \frac{\langle T^2 \rangle - 2\langle T_s^2 \rangle}{\langle T^3 \rangle}. \quad (55)$$

Отсюда видно, что применение этой стратегии требует выполнения более сильного в сравнении с (50) условия $\langle T^2 \rangle \geq 2\langle T_s^2 \rangle$.

Схожий результат можно получить, оценивая для p_β оба слагаемых в числителе при $l = 1$, а в знаменателе для $-\partial_\beta \tilde{P}(\beta) = \langle T \rangle \tilde{Q}(\beta)$ воспользовавшись оценкой (43). Получим тогда

$$p_\beta \geq \frac{(2 - 2\beta^2 \langle T_s^2 \rangle)(\langle T^2 \rangle + \beta \langle T^3 \rangle)}{2\langle T^2 \rangle - \beta^2 \langle T^2 \rangle^2 + \beta^3 \langle T^3 \rangle \langle T^2 \rangle + 2\beta \langle T^3 \rangle} p. \quad (56)$$

Проделав аналогичные шаги, получаем более узкий интервал эффективных рейтов

$$0 < \beta < \frac{\langle T^2 \rangle (\langle T^2 \rangle - 2\langle T_s^2 \rangle)}{\langle T^3 \rangle (\langle T^2 \rangle + 2\langle T_s^2 \rangle)} \quad (57)$$

с прежним условием применимости $\langle T^2 \rangle > 2\langle T_s^2 \rangle$.

Определение наилучших рейтов, обеспечивающих максимальную гарантированную эффективность гамма-перезапуска на найденных интервалах, и вычисление результирующей эффективности сопряжено с решением алгебраических уравнений высокого порядка, что удобнее делать численными методами.

Протокол	Условия применимости	Интервал эффективных периодов/рейтов	Рекоменд. период/рейт	Эффективность
Период. 1	$m + \langle T_{on} \rangle < \langle T - m \rangle$	$m \leq \tau < \langle T - m \rangle - \langle T_{on} \rangle$	$\tau_0 = m$	см. ур. (6)
Период. 2	$m < \frac{1}{2}\langle T \rangle - \frac{1}{2}\langle T_{on} \rangle$	$m \leq \tau < \frac{1}{2}\langle T \rangle - \frac{1}{2}\langle T_{on} \rangle$	$\tau_0 = m$	см. ур. (8)
Пуассон. 1	$\langle T^2 \rangle \geq 2\langle T \rangle(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle)$	$0 < r < \frac{\langle T^2 \rangle(\langle T^2 \rangle - 2\langle T \rangle(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle))}{(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle)(\langle T \rangle \langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2)}$	см. ур. (14)	см. ур. (15)
Пуассон. 2	$\langle T^2 \rangle \geq 2\langle T \rangle(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle)$	$0 < r < \frac{3(\langle T^2 \rangle - 2\langle T \rangle(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle))}{\langle T^3 \rangle}$	см. ур. (22)	см. ур. (23)
Пуассон. 3	$\langle T^2 \rangle \geq 2\langle T \rangle(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle)$	$0 < r < \frac{\langle T^2 \rangle[\langle T^2 \rangle - 2\langle T \rangle(\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle)]}{(\langle T_{on} \rangle + \langle T \rangle)\langle T \rangle \langle T^3 \rangle}$	см. ур. (27)	см. ур. (28)
Гамма	$\langle T^3 \rangle \geq 3(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle)\langle T^2 \rangle$	$0 < \beta < \frac{\langle T^3 \rangle - 3(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle)\langle T^2 \rangle}{(\langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle)\langle T^3 \rangle + \langle T^4 \rangle}$	численно	численно

Таблица 1: Таблица, резюмирующая различные беспроигрышные протоколы перезапуска, гарантированно сокращающие среднее время завершения процесса. Для каждой стратегии в таблице содержится: условие применимости стратегии; интервал эффективных периодов (для периодических протоколов) или рейтов (для пуассоновских протоколов или гамма-протоколов); оптимальный период или рейт, обеспечивающий максимальную гарантированную эффективность; оценка на максимальную гарантированную эффективность.

Протокол	Условия применимости	Интервал эффективных периодов/рейтов	Рекоменд. период/рейт	Эффективность
Период.	$m_s < m$	$m_s < \tau < m$	-	-
Пуассон. 1	$\langle T_s \rangle < \langle T \rangle$	$0 < r < \frac{\langle T \rangle (\langle T \rangle - \langle T_s \rangle)}{\langle T^2 \rangle \langle T_s \rangle}$	см. ур. (45)	см. ур. (46)
Пуассон. 2	$\langle T_s \rangle < \langle T \rangle$	численно (см. ур. (49))	численно	численно
Гамма 1	$\langle T_s^2 \rangle < \langle T^2 \rangle$	$0 < \beta < \frac{3(\langle T^2 \rangle - \langle T_s^2 \rangle)}{3\langle T^3 \rangle + \langle T_s^3 \rangle}$	численно	численно
Гамма 2	$2\langle T_s^2 \rangle < \langle T^2 \rangle$	$0 < \beta < \frac{\langle T^2 \rangle - 2\langle T_s^2 \rangle}{\langle T^3 \rangle}$	численно	численно
Гамма 3	$2\langle T_s^2 \rangle < \langle T^2 \rangle$	$0 < \beta < \frac{\langle T^2 \rangle (\langle T^2 \rangle - 2\langle T_s^2 \rangle)}{\langle T^3 \rangle (\langle T^2 \rangle + 2\langle T_s^2 \rangle)}$	численно	численно

Таблица 2: Таблица, резюмирующая различные беспроигрышные протоколы перезапуска, гарантированно увеличивающие вероятность успеха. Для каждой стратегии в таблице содержится: условие применимости стратегии; интервал эффективных периодов (для периодических протоколов) или рейтов (для пуассоновских или гамма-протоколов); оптимальный период или рейт, обеспечивающий максимальную гарантированную эффективность; оценка на максимальную гарантированную эффективность.

5 Примеры применения стратегий

Описанные выше стратегии собраны в таблицах (1) и (2). Почти все они обладают своими уникальными условиями применимости, поэтому важно сравнить эти условия на конкретных модельных примерах. Пожалуй, самым простым выбором, пригодным для наших целей, является распределение в виде суперпозиции двух дельта-функций $P(T) = p\delta(T - T_1) + (1 - p)\delta(T - T_2)$, для которого нами были построены две диаграммы (см. рис (5, 6)), иллюстрирующие применимость различных стратегий в плоскости безразмерных параметров p и T_1/T_2 (для задачи оптимизации вероятности $T_1 = T_s, T_2 = T_f$). Случай суперпозиции двух дельта-функций довольно прост с точки зрения аналитического анализа, поэтому функции, ограничивающие зоны применимости на графиках (5) и (6), были найдены аналитически, а затем для каждого пикселя на плоскости проверялось выполнение неравенств, задающихся соответствующими функциями. На рис. (5) видно, что наличие штрафа за перезапуск немного сдвигает зоны применимости относительно случая без штрафа, в случае данной функции распределения изменения незначительны вплоть до $T_{on} \sim T_1$. Можно заметить, что на рис. (5, 6) каждое условие применимости выполняется хотя бы где-то, и, более того,

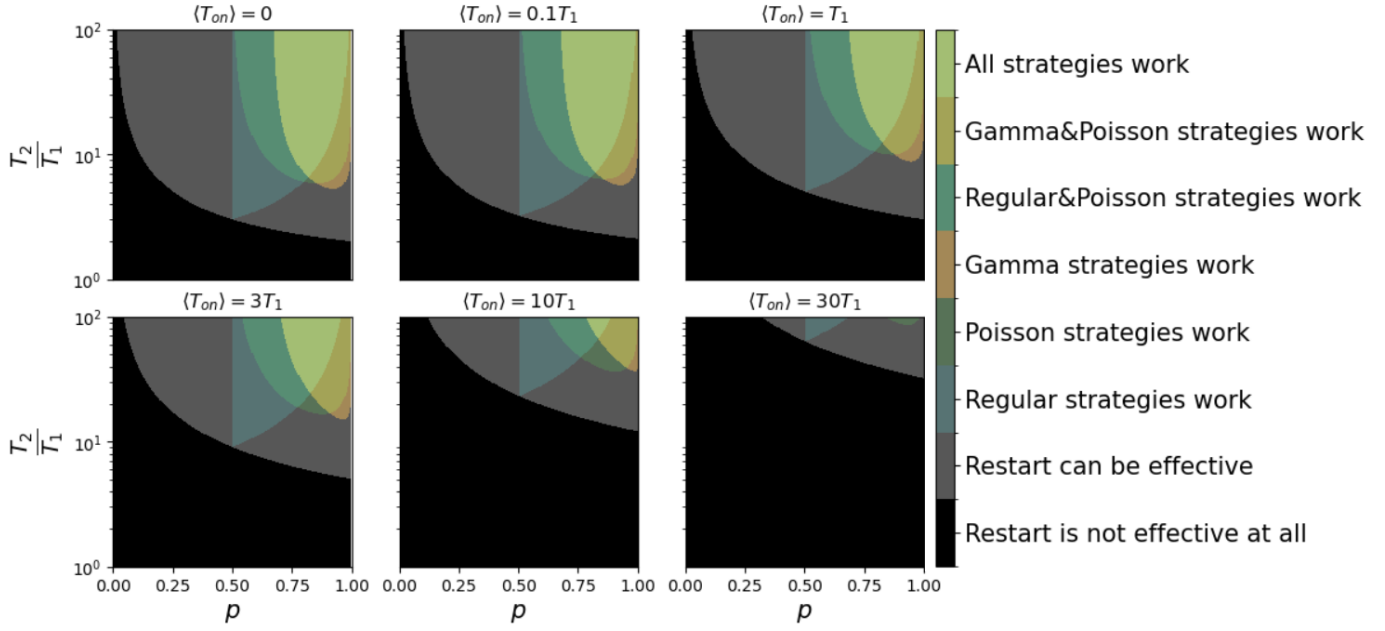


Рис. 5: Диаграмма областей эффективности различных стратегий перезапуска в плоскости параметров распределения $P(T) = p\delta(T - T_1) + (1 - p)\delta(T - T_2)$ для задачи оптимизации среднего времени завершения при разных значениях $\langle T_{on} \rangle$

в задаче оптимизации среднего времени завершения для каждого условия существует область, в которой выполняется только оно.

6 Выводы

Хотя и являясь весьма полезными, достаточные условия существования эффективной стратегии перезапуска, полученные в работах [13, 24, 25], показывают лишь, что перезапуск может быть выгоден, но ничего не говорят о том, как именно следует перезапускать процесс, чтобы этой выгоды достичь. Весомый прогресс в решении проблемы выбора эффективного протокола перезапуска был достигнут Элиазаром и Ревени [21], сформулировавшими достаточно простые конструктивистские критерии эффективности периодического перезапуска, которые не просто служат индикаторами эффективности, но и предлагают конкретный период перезапуска, гарантированно сокращающий среднее время завершения процесса. Мотивированные этим успехом, в данной работе мы обобщили один из критериев, предложенных в [21] на случай ненулевого штрафа за перезапуск, а также построили пять новых конструктивистских критериев, четыре из которых относятся к случаю стохастического перезапуска. Кроме того, мы предложили первые примеры конструктивистских критериев эффективности перезапуска для задачи оптимизации вероятности успеха. Результаты

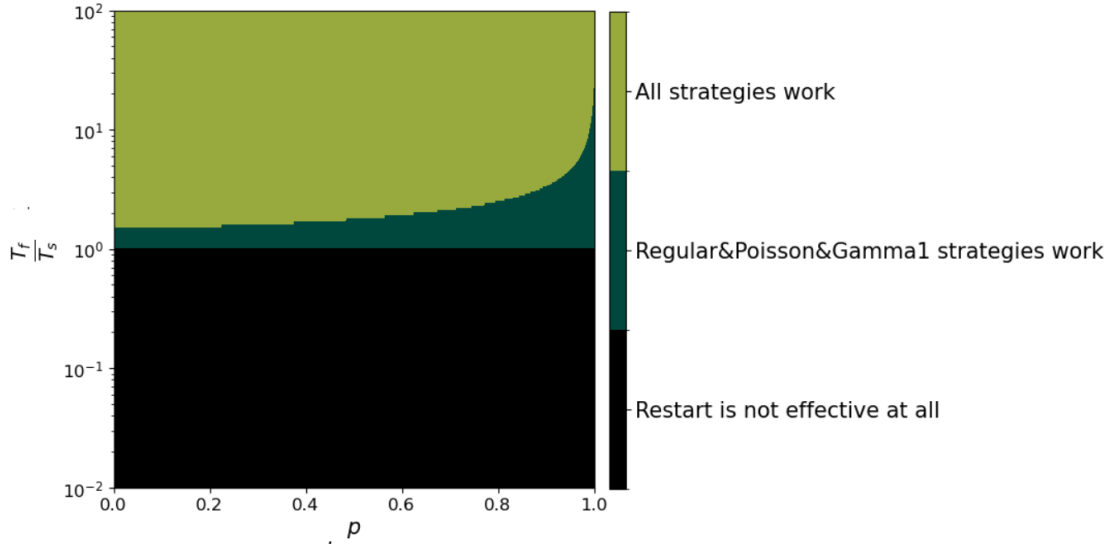


Рис. 6: Диаграмма областей эффективности различных стратегий перезапуска в плоскости параметров распределения $P(T) = p\delta(T - T_s) + (1 - p)\delta(T - T_f)$ для задачи оптимизации вероятности успеха.

анализа суммируются в таблицах (1, 2).

Важно отметить, что все сформулированные нами критерии являются лишь достаточными, но не необходимыми условиями эффективности перезапуска. Словом, существуют случайные процессы, для которых ни одно из условий применимости описанных в этой работе протоколов не выполняется, но эффективная стратегия тем не менее существует (см., например, рис. 5). Таким образом, представленные в таблицах (1, 2) протоколы являются взаимодополняющими и на практике должны использоваться совместно, чтобы хотя бы отчасти скомпенсировать недостатки друг друга. В этой связи востребована дальнейшая работа по построению подобных стратегий.

7 Благодарности

Автор выражает благодарность В.В. Лебедеву за полезные комментарии, а также А.М. Зубкову за ссылки на литературу по вероятностным неравенствам.

А Вывод ур. (2)

Здесь мы обобщаем вывод, предложенный в работе [21] на случай ненулевого значения $\langle T_{on} \rangle$.

Среднее время завершения процесса в присутствии периодического перезапуска $\langle T_\tau \rangle$ с периодом τ и со штрафом $\langle T_{on} \rangle$ выражается как

$$\langle T_\tau \rangle = \langle T_{on} \rangle + \langle \min(T, \tau) \rangle + \langle T_\tau \cdot I(T \geq \tau) \rangle. \quad (58)$$

Последнее слагаемое можно преобразовать, используя то, что T_τ' статистически независимо от T_τ

$$\langle T_\tau' \cdot I(T \geq \tau) \rangle = \langle T_\tau' \rangle \langle I(T \geq \tau) \rangle = \langle T_\tau' \rangle \int_\tau^\infty P(T) dT = \langle T_\tau' \rangle \left(1 - \int_0^\tau P(T) dT \right). \quad (59)$$

Слагаемое $\langle \min(T, \tau) \rangle$ можно преобразовать, используя тождество

$$2 \min(T, \tau) = T + \tau - |T - \tau|. \quad (60)$$

Взяв от обеих частей математическое ожидание, получим

$$2 \langle \min(T, \tau) \rangle = \langle T \rangle + \tau - \langle |T - \tau| \rangle. \quad (61)$$

Комбинируя полученные выражения, имеем

$$\langle T_\tau \rangle = \frac{\langle T \rangle + \tau - \langle |T - \tau| \rangle + 2 \langle T_{on} \rangle}{2 \int_0^\tau P(T) dT}. \quad (62)$$

В Вывод ур. (3, 4)

Предположим, что стохастический процесс подчиняется протоколу стохастического перезапуска, в котором случайные интервалы между перезапусками выбираются из гамма-распределения $\rho(\tau) = \frac{\beta^k}{\Gamma(\beta)} \tau^{k-1} e^{-\beta\tau}$ с рейтом β и параметром формы k . Тогда время завершения T_β подчиняется следующему уравнению

$$T_\beta = T_{on} + TI(T < \tau) + (\tau + T'_\beta)I(T \geq \tau), \quad (63)$$

где T'_β является статистически независимой копией T_β . Давайте усредним это выражение по статистике исходного процесса и статистике интервалов перезапуска. Получим

$$\langle T_\beta \rangle = \langle T_{on} \rangle + \langle TI(T < \tau) \rangle + \langle \tau I(T \geq \tau) \rangle + \langle T'_\beta I(T \geq \tau) \rangle. \quad (64)$$

Поскольку $\langle TI(T < \tau) \rangle = \int_0^\infty dTP(T)T \int_T^\infty d\tau\rho(\tau)$, $\langle \tau I(T \geq \tau) \rangle = \int_0^\infty dTP(T) \int_0^T d\tau\rho(\tau)\tau$, $\langle T'_\beta I(T \geq \tau) \rangle = \langle T'_\beta \rangle \langle I(T \geq \tau) \rangle$, $1 - \langle I(T \geq \tau) \rangle = \int_0^\infty dTP(T) \int_T^\infty d\tau\rho(\tau)$ и $\langle T'_\beta \rangle = \langle T_\beta \rangle$, мы можем выразить среднее время ожидания в присутствии перезапуска

$$\langle T_\beta \rangle = \frac{\langle T_{on} \rangle + \int_0^\infty dTP(T)T \int_T^\infty d\tau\rho(\tau) + \int_0^\infty dTP(T) \int_0^T d\tau\rho(\tau)\tau}{\int_0^\infty dTP(T) \int_T^\infty d\tau\rho(\tau)}. \quad (65)$$

Далее можно записать

$$\int_0^\infty dTP(T)T \int_T^\infty d\tau\rho(\tau) = \frac{(-1)^{k-1}\langle T \rangle \beta^k}{\Gamma(k)} \frac{d^{k-1}}{d\beta^{k-1}} \int_0^\infty dTQ(T) \int_T^\infty d\tau e^{-\beta\tau} = \quad (66)$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}\langle T \rangle \beta^k}{\Gamma(k)} \frac{d^{k-1}}{d\beta^{k-1}} \frac{\tilde{Q}(\beta)}{\beta} = \frac{(-1)^k \beta^k}{\Gamma(k)} \frac{d^{k-1}}{d\beta^{k-1}} \left[\frac{1}{\beta} \frac{d\tilde{P}(\beta)}{d\beta} \right], \quad (67)$$

$$\int_0^\infty dTP(T) \int_0^T d\tau\rho(\tau)\tau = \frac{(-1)^{k-1}\beta^k}{\Gamma(k)} \frac{d^{k-1}}{d\beta^{k-1}} \int_0^\infty dTP(T) \int_0^T d\tau e^{-\beta\tau}\tau = \quad (68)$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}\beta^k}{\Gamma(k)} \frac{d^{k-1}}{d\beta^{k-1}} \left[\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \tilde{P}(\beta) + \frac{d\tilde{P}(\beta)}{d\beta} \right) \right], \quad (69)$$

$$\int_0^\infty dTP(T) \int_T^\infty d\tau\rho(\tau) = \frac{(-1)^{k-1}\beta^k}{\Gamma(k)} \frac{d^{k-1}}{d\beta^{k-1}} \int_0^\infty dTP(T) \int_T^\infty d\tau e^{-\beta\tau} = \quad (70)$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}\beta^k}{\Gamma(k)} \frac{d^{k-1}}{d\beta^{k-1}} \frac{\tilde{P}(\beta)}{\beta}, \quad (71)$$

где мы ввели вспомогательную плотность вероятности $Q(T) = \frac{T}{\langle T \rangle} P(T)$.

Для $k = 1$ мы получаем ур. (3).

Для $k = 2$ получим

$$\langle T_\beta \rangle = \frac{\beta \langle T_{on} \rangle + 2 - 2\tilde{P}(\beta) + \beta \partial_\beta \tilde{P}(\beta)}{\beta \tilde{P}(\beta) - \beta^2 \partial_\beta \tilde{P}(\beta)} = \frac{\beta \langle T_{on} \rangle + 2 - 2\tilde{P}(\beta) - \beta \langle T \rangle \tilde{Q}(\beta)}{\beta \tilde{P}(\beta) + \beta^2 \langle T \rangle \tilde{Q}(\beta)}. \quad (72)$$

Это выражение можно оценить сверху через неравенства на Лаплас-образ плотности распределения. При этом нужно помнить, что моменты случайной величины, имеющей плотность распределения $Q(T)$, связаны с моментами исходной плотности $P(T)$ следующим образом

$$\langle T^n \rangle_Q = \int_0^\infty dTT^n Q(T) = \frac{1}{\langle T \rangle} \int_0^\infty dTT^{n+1} P(T) = \frac{\langle T^{n+1} \rangle}{\langle T \rangle}. \quad (73)$$

С Вывод ур. (10)

Для полноты изложения приведем доказательства используемых нами неравенств из работы [27]. Итак, пусть имеется неотрицательная случайная величина T с плотностью распределения $P(T)$. Мы хотим получить оценки сверху и снизу для Лаплас-образа

$$\tilde{P}(r) = \int_0^\infty e^{-rT} P(T) dT. \quad (74)$$

На пути к искомым неравенствам, введем вспомогательную целочисленную случайную величину ν , которая представляет собой число событий в пуассоновском потоке с рейтом r , произошедших за интервал времени случайной длительности T . Очевидно, что вероятностное распределение $p(\nu)$ величины ν выражается как

$$p(\nu) = \int_0^\infty \frac{(rT)^\nu}{\nu!} e^{-rT} P(T) dT. \quad (75)$$

Вычислим статистический момент $\langle \nu^n \rangle$. Для этого воспользуемся известным из комбинаторики разложением

$$\nu^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) \nu^{[k]}, \quad (76)$$

где $\nu^{[n]} = \nu(\nu - 1)(\nu - 2) \dots (\nu - n + 1)$ - это убывающий факториал, а $S(n, k)$ обозначает числа Стирлинга второго рода. Далее, заметим, что среднее значение неполного факториала может быть выражено как

$$\langle \nu^{[n]} \rangle = \left. \frac{d^n \langle s^\nu \rangle}{ds^n} \right|_{s=1}, \quad (77)$$

где, в свою очередь, с учетом (75)

$$\langle s^\nu \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} p(\nu) s^\nu = \int_0^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(rTs)^\nu}{\nu!} e^{-rT} P(T) dT = \int_0^{\infty} e^{-(1-s)rT} P(T) dT = \tilde{P}(r(1-s)). \quad (78)$$

Подстановка (78) в (77) дает

$$\langle \nu^{[n]} \rangle = \left. \frac{d^n \tilde{P}(r(1-s))}{ds^n} \right|_{s=1} = (-r)^n \left. \frac{d^n \tilde{P}(x)}{dx^n} \right|_{x=0} = r^n \langle T^n \rangle. \quad (79)$$

Из (75) и (79) тогда находим

$$\langle \nu^n \rangle = \sum_{k=0}^n S(n, k) \langle \nu^{[k]} \rangle = \sum_{k=0}^n S(n, k) r^k \langle T^k \rangle. \quad (80)$$

В дальнейшем будем предполагать, что введенная неотрицательная целочисленная случайная величина ν удовлетворяет условию $\langle \nu^3 \rangle < \infty$, что в силу уравнения (80) эквивалентно требованию $\langle T^3 \rangle < \infty$. Рассмотрим неотрицательно определенную квадратичную форму

$$\langle I(\nu > 0)(\nu - 1)(z_0 + z_1 \nu)^2 \rangle = \sum_{i,j=0}^1 z_i z_j (m_{i+j+1} - m_{i+j}), \quad (81)$$

где $m_k = \langle \nu^k I(\nu > 0) \rangle$. Ее матрица имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} m_1 - Pr[\nu \geq 1] & m_2 - m_1 \\ m_2 - m_1 & m_3 - m_2 \end{pmatrix}. \quad (82)$$

Неотрицательная определенность этой квадратичной формы означает неотрицательную определенность детерминанта ее матрицы, то есть

$$(m_1 - Pr[\nu \geq 1])(m_3 - m_2) - (m_2 - m_1)^2 \geq 0. \quad (83)$$

и, следовательно,

$$Pr[\nu \geq 1] \leq m_1 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{m_3 - m_2}. \quad (84)$$

Подставляя сюда $Pr[\nu \geq 1] = 1 - p(0)$, находим

$$p(0) \geq 1 - m_1 + \frac{(m_2 - m_1)^2}{m_3 - m_2}. \quad (85)$$

Далее, пользуясь тем, что $m_k = \langle \nu^k I(\nu > 0) \rangle = \langle \nu^k \rangle$ при $k > 0$, получаем

$$p(0) \geq 1 - \langle \nu \rangle + \frac{(\langle \nu^2 \rangle - \langle \nu \rangle)^2}{\langle \nu^3 \rangle - \langle \nu^2 \rangle}. \quad (86)$$

Наконец, с учетом (80) и соотношения $p(0) = \tilde{P}(r)$ приходим к следующей оценке снизу на Лаплас-образ

$$\tilde{P}(r) \geq 1 - r\langle T \rangle + \frac{r^2\langle T^2 \rangle}{r\langle T^3 \rangle + 2\langle T^2 \rangle}. \quad (87)$$

Схожим образом можно получить оценки снизу, предполагая $\langle \nu^2 \rangle < \infty$, что с учетом (80) эквивалентно тому, что должно выполняться $\langle T^2 \rangle < \infty$. Аналогично (81), введем квадратичную форму

$$\langle I(\nu > 0)(z_0 + z_1\nu)^2 \rangle = \sum_{i,j=0}^1 z_i z_j m_{i+j}. \quad (88)$$

Тогда матрица такой квадратичной формы имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} Pr[\nu > 0] & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Неотрицательная определенность этой квадратичной формы означает неотрицательную определенность детерминанта ее матрицы, то есть

$$m_2 Pr[\nu > 0] - m_1^2 \geq 0, \quad (90)$$

и, следовательно,

$$Pr[\nu > 0] \geq \frac{m_1^2}{m_2}. \quad (91)$$

Подставляя сюда $Pr[\nu > 0] = 1 - p(0)$, находим

$$p(0) \leq 1 - \frac{m_1^2}{m_2}. \quad (92)$$

Далее, пользуясь тем, что $m_k = \langle \nu^k I(\nu > 0) \rangle = \langle \nu^k \rangle$ при $k > 0$, получаем

$$p(0) \leq 1 - \frac{\langle \nu \rangle^2}{\langle \nu^2 \rangle}. \quad (93)$$

С учетом (80) и соотношения $p(0) = \tilde{P}(r)$ приходим к следующей оценке сверху на Лаплас-образ

$$\tilde{P}(r) \leq 1 - \frac{r\langle T \rangle^2}{r\langle T^2 \rangle + \langle T \rangle}. \quad (94)$$

В работе [27] приведены более общие формулы, мы рассмотрели частный случай, когда границы выражаются через первые три момента.

D Вывод ур. (13, 14 и 15)

Будем оценивать $\langle T_r \rangle$, пользуясь выражением (4) и неравенством (87). Определим также $\mathcal{T}_{on} = \langle T \rangle + \langle T_{on} \rangle$. Тогда

$$\langle T_r \rangle < \frac{2\mathcal{T}_{on}\langle T^2 \rangle + r(\mathcal{T}_{on}\langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2)}{2\langle T^2 \rangle + r(\langle T^3 \rangle - 2\langle T \rangle\langle T^2 \rangle) - r^2(\langle T \rangle\langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2)}. \quad (95)$$

Указанная оценка записана в предположении, что знаменатель выражения в правой части (95) положителен. Тогда множество гарантированно эффективных рейтов определяется решением системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{2\mathcal{T}_{on}\langle T^2 \rangle + r[\mathcal{T}_{on}\langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2]}{2\langle T^2 \rangle + r[\langle T^3 \rangle - 2\langle T \rangle\langle T^2 \rangle] - r^2[\langle T \rangle\langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2]} < \mathcal{T}_{on}, \\ 1 - r\langle T \rangle + \frac{r^2\langle T^2 \rangle^2}{r\langle T^3 \rangle + 2\langle T^2 \rangle} > 0, \\ r > 0. \end{cases} \quad (96)$$

Решая первое из неравенств системы (96), получаем $r < r_0^m$, где

$$r_0^m = \frac{\langle T^2 \rangle [\langle T^2 \rangle - 2\langle T \rangle\mathcal{T}_{on}]}{[\langle T \rangle\langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2] \mathcal{T}_{on}}. \quad (97)$$

Будем предполагать, что выполнено условие $\langle T^2 \rangle > 2\langle T \rangle\mathcal{T}_{on}$, которое редуцирует к достаточному условию эффективности пуассоновского перезапуска при $T_{on} = 0$. Учитывая также, что $\langle T \rangle\langle T^3 \rangle \geq \langle T^2 \rangle^2$ в силу неравенства Коши-Шварца, получаем $r_0^m > 0$. Далее, перепишем второе неравенство системы (96) в виде

$$r^2 [\langle T^2 \rangle^2 - \langle T \rangle\langle T^3 \rangle] + r [\langle T^3 \rangle - 2\langle T \rangle\langle T^2 \rangle] + 2\langle T^2 \rangle > 0. \quad (98)$$

Так как $\langle T \rangle\langle T^3 \rangle \geq \langle T^2 \rangle^2$ (в силу неравенства Коши-Шварца), то ветви параболы, задающей график квадратного трехчлена в левой части неравенства (98), направлены вниз. Заметив дополнительно, что значение этого квадратного трехчлена в точке $r = 0$ положительно, делаем вывод, искомое решение имеет вид $r_-^m < r < r_+^m$, где r_-^m и r_+^m это отрицательный и положительный корень, соответственно. Отсюда делаем вывод, что система неравенств определяет область $(0, \min(r_+^m, r_0^m))$. Заметим далее, что квадратный трехчлен, стоящий в левой части неравенства (98), в точке $r = r_0^m|_{\langle T_{on} \rangle=0}$ принимает положительное значение

$$((r_0^m)^2 [\langle T^2 \rangle^2 - \langle T \rangle\langle T^3 \rangle] + r_0^m [\langle T^3 \rangle - 2\langle T \rangle\langle T^2 \rangle] + 2\langle T^2 \rangle)|_{\langle T_{on} \rangle=0} = \frac{\langle T^2 \rangle^2}{\langle T \rangle^2} > 0. \quad (99)$$

Значит $r_0^m|_{\langle T_{on} \rangle=0} < r_+^m$, а так как r_0^m убывает с ростом $\langle T_{on} \rangle$, то $r_0^m < r_+^m$ и окончательно получаем следующий интервал гарантированно эффективных рейтов:

$$0 < r < \frac{\langle T^2 \rangle [\langle T^2 \rangle - 2\langle T \rangle\mathcal{T}_{on}]}{\mathcal{T}_{on} [\langle T \rangle\langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2]}, \quad (100)$$

Оптимальным рейтом, то есть рейтом при котором оценка достигает своего минимума является

$$r_3 = \frac{-2\langle T^2 \rangle \mathcal{T}_{on} + \sqrt{2\langle T^2 \rangle^3 [\mathcal{T}_{on} \langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2 - 2\mathcal{T}_{on} \langle T^2 \rangle \langle T_{on} \rangle] [\langle T^3 \rangle \langle T \rangle - \langle T^2 \rangle^2]^{-1}}{\mathcal{T}_{on} \langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2}. \quad (101)$$

Эффективность оценивается снизу как

$$\eta_3 \geq 1 - \frac{\mathcal{T}_{on} \langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2}{\mathcal{T}_{on} [\langle T^3 \rangle - 2\langle T \rangle \langle T^2 \rangle] - 2\mathcal{T}_{on} r_3 [\langle T \rangle \langle T^3 \rangle - \langle T^2 \rangle^2]}. \quad (102)$$

Е Вывод ур. (18 и 51)

Помимо неравенства (111) можно получить и другие оценки снизу на Лаплас-образ $\tilde{P}(r)$ в терминах первых трех статистических моментов случайной величины T . Так как величина ν целочисленна и неотрицательна, то можно представить себе счетную совокупность событий A_1, A_2, \dots , для которой ν является числом успехов среди этих событий. Каждое отдельное событие A_i при этом имеет свою вероятность успеха. Случайная величина ν в таком случае представима в виде суммы индикаторов пересекающихся событий:

$$\nu = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} m I(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}). \quad (103)$$

Для любого целого числа m (числа одновременно произошедших событий) можно задать величину, называемую Бонферрониевской суммой

$$S_m = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} Pr(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}), \quad (104)$$

С другой стороны, нетрудно заметить, что

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} I(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = C_{\nu}^m. \quad (105)$$

Теперь возьмем математическое ожидание с обеих сторон и получим

$$S_m = \sum_{\nu=m}^{\infty} C_{\nu}^m P(\nu). \quad (106)$$

Получили связь между Бонферрониевскими суммами и биномиальными моментами, теперь продифференцируем тождество (78) m раз при $s = 1$ и воспользуемся равенством (106)

$$\left. \frac{d^m \langle s^{\nu} \rangle}{ds^m} \right|_{s=1} = \left. \frac{d^m}{ds^m} \sum_{k=0}^{\infty} P(\nu) s^{\nu} \right|_{s=1} = \left. \frac{d^m}{ds^m} \sum_{\nu=m}^{\infty} P(\nu) s^{\nu} \right|_{s=1} = m! \sum_{\nu=m}^{\infty} P(\nu) \frac{\nu!}{m!(\nu-m)!} = m! S_m. \quad (107)$$

Тогда согласно тождеству (77) заключим, что

$$S_m = \frac{r^m \langle T^m \rangle}{m!}. \quad (108)$$

Чтобы воспользоваться неравенствами Бонферрони, представим $P(\nu = 0)$ как дополнение к объединению всех возможных исходов, когда $\nu > 0$, то есть

$$P(\nu = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu = k) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\nu = k)\right). \quad (109)$$

Теперь воспользуемся классическими неравенствами Бонферрони, справедливыми для любого целого l

$$\sum_{k=0}^{2l-1} (-1)^k S_k \leq P(\nu = 0) \leq \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k S_k. \quad (110)$$

Пользуясь тем, что $P(\nu = 0) = \tilde{P}(r)$, согласно (108) получим

$$\sum_{k=0}^{2l-1} (-1)^k \frac{r^k \langle T^k \rangle}{k!} \leq \tilde{P}(r) \leq \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k \frac{r^k \langle T^k \rangle}{k!}. \quad (111)$$

В частности, для $l = 2$ находим следующую оценку снизу

$$\tilde{P}(r) \geq 1 - r \langle T \rangle + \frac{r^2}{2} \langle T^2 \rangle - \frac{r^3}{6} \langle T^3 \rangle. \quad (112)$$

Г Вывод ур. (38)

В работе [24] было показано, что вероятность успеха в присутствии стохастического перезапуска дается выражением

$$p_{\mathcal{R}} = \frac{\int_0^{\infty} d\tau \rho(\tau) \int_0^{\tau} dT P^s(T)}{\int_0^{\infty} d\tau \rho(\tau) \int_0^{\tau} dT P(T)}, \quad (113)$$

где $\rho(\tau)$ это плотность распределения случайных интервалов времени между последовательными перезапусками. Если стохастический перезапуск характеризуется гамма-распределением $\rho(\tau) = \frac{\beta^k}{\Gamma(\beta)} \tau^{k-1} e^{-\beta\tau}$ с рейтом β и параметром формы k , то из (113) находим

$$p_{\beta} = \frac{\int_0^{\infty} d\tau \tau^{k-1} e^{-\beta\tau} \int_0^{\tau} dT P^s(T)}{\int_0^{\infty} d\tau \tau^{k-1} e^{-\beta\tau} \int_0^{\tau} dT P(T)} = \frac{\partial_{\beta}^{k-1} \int_0^{\infty} d\tau e^{-\beta\tau} \int_0^{\tau} dT P^s(T)}{\partial_{\beta}^{k-1} \int_0^{\infty} d\tau e^{-\beta\tau} \int_0^{\tau} dT P(T)} = \frac{\partial_{\beta}^{k-1} \left(\frac{\tilde{P}^s(\beta)}{\beta} \right)}{\partial_{\beta}^{k-1} \left(\frac{\tilde{P}(\beta)}{\beta} \right)}. \quad (114)$$

Библиография

- [1] Н. Alt и др. «A method for obtaining randomized algorithms with small tail probabilities». В: *Technical Report TR-91-057* (1991).
- [2] М. Luby, А. Sinclair и D. Zuckerman. «Optimal speedup of Las Vegas algorithms». В: *Information Processing Letters* 47.4 (1993), с. 173.

- [3] J. Lorenz. «Runtime distributions and criteria for restarts.» В: *In International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics* (2018), с. 493.
- [4] J. Lorenz и J. Nickerl. «The Potential of Restarts for ProbSAT». В: *Computer Aided Systems Theory—EUROCAST 2019: 17th International Conference, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, February 17–22, 2019, Revised Selected Papers, Part I 17*. Springer. 2020, с. 352–360.
- [5] J. Lorenz. «Restart Strategies in a Continuous Setting». В: *Theory of Computing Systems* 65.8 (2021), с. 1143.
- [6] Carla Gomes и David Shmoys. «Approximations and Randomization to Boost CSP Techniques: Hybrid Optimization Techniques (Editors: Narendra Jussien and François Laburthe)». В: *Annals of Operations Research* 130 (авг. 2004).
- [7] Iván Dotú, Alvaro del Val и Manuel Cebrián. «Redundant Modeling for The QuasiGroup Completion Problem». В: *Proceedings of the 9th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming*. Springer-Verlag, 2003, с. 288–302.
- [8] Hantao Zhang и Jieh Hsiang. «Solving Open Quasigroup Problems by Propositional Reasoning». В: (дек. 1998).
- [9] A. Pal и S. Reuveni. «First Passage under Restart». В: *Physical Review Letters* 118.3 (2017), с. 030603.
- [10] M. Evans и S. Majumdar. «Diffusion with stochastic resetting». В: *Physical Review Letters* 106.16 (2011), с. 160601.
- [11] S. Reuveni, M. Urbakh и J. Klafter. «Role of substrate unbinding in Michaelis–Menten enzymatic reactions». В: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 111.12 (2014), с. 4391.
- [12] T. Rotbart, S. Reuveni и M. Urbakh. «Michaelis-Menten reaction scheme as a unified approach towards the optimal restart problem». В: *Physical Review E* 92.6 (2015), с. 060101.
- [13] S. Reuveni. «Optimal stochastic restart renders fluctuations in first passage times universal». В: *Physical Review Letters* 116.17 (2016), с. 170601.
- [14] Alexander M Berezhkovskii и др. «Dependence of the enzymatic velocity on the substrate dissociation rate». В: *The Journal of Physical Chemistry B* 121.15 (2017), с. 3437–3442.
- [15] АВ Финкельштейн. «Физика белковых молекул». В: (2014).
- [16] Leonor Michaelis. «Kinetics of invertase action». В: *Biochem. z* 49 (1913), с. 369.
- [17] Jeremy Gunawardena. «Some lessons about models from Michaelis and Menten». В: *Molecular biology of the cell* 23.4 (2012), с. 517–519.
- [18] M. Gagliolo и J. Schmidhuber. «Learning Restart Strategies». В: *IJCAI* (2007), с. 792.

- [19] H. Wu и P. Beek. «On universal restart strategies for backtracking search». В: *In International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming* (2007), с. 681.
- [20] M. Streeter, D. Golovin и S. Smith. «Restart schedules for ensembles of problem instances». В: *AAAI* (2007), с. 1204.
- [21] I. Eliazar и S. Reuveni. «Mean-performance of sharp restart: II. Inequality roadmap». В: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 54.35 (2021), с. 355001.
- [22] T. Robin, S. Reuveni и M. Urbakh. «Single-molecule theory of enzymatic inhibition.» В: *Nature communications* 9.1 (2018), с. 1.
- [23] O. Tal-Friedman и др. «Experimental realization of diffusion with stochastic resetting». В: *The journal of physical chemistry letters* 11.17 (2020), с. 7350.
- [24] S. Belan. «Restart could optimize the probability of success in a Bernoulli trial». В: *Physical Review Letters* 120.8 (2018), с. 080601.
- [25] D. Starkov и S. Belan. «Universal performance bounds of restart». В: *arXiv preprint arXiv:2209.06611*. (2022).
- [26] A. Pal, S. Kostinski и S. Reuveni. «The inspection paradox in stochastic resetting». В: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 55.2 (2022), с. 021001.
- [27] A. Zubkov. «Two-sided Inequalities for Laplace Transforms». В: *Theory of Probability & Its Applications* 43.4 (1999), с. 676—681.
- [28] S. Condamin, O. Bénichou и M. Moreau. «Random walks and Brownian motion: A method of computation for first-passage times and related quantities in confined geometries». В: *Physical Review E* 75.2 (2007), с. 021111.
- [29] U. Dobramysl и D. Holcman. «Mixed analytical-stochastic simulation method for the recovery of a Brownian gradient source from probability fluxes to small windows». В: *Journal of computational physics* 355 (2018), с. 22.
- [30] A. Pal и V. Prasad. «First passage under stochastic resetting in an interval». В: *Physical Review E* 99.3 (2019), с. 032123.
- [31] S. Condamin, V. Tejedor и O. Bénichou. «Occupation times of random walks in confined geometries: From random trap model to diffusion-limited reactions». В: *Physical Review E* 76.5 (2007), с. 050102.
- [32] S. Condamin и др. «Probing microscopic origins of confined subdiffusion by first-passage observables». В: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 105.15 (2008), с. 5675.
- [33] B. Meyer и др. «Exact calculations of first-passage quantities on recursive networks». В: *Physical Review E* 85.2 (2012), с. 026113.

- [34] T. Calandre и др. «Interfacial territory covered by surface-mediated diffusion». В: *Physical Review E* 85.5 (2012), с. 051111.
- [35] T. Calandre и др. «Splitting probabilities and interfacial territory covered by two-dimensional and three-dimensional surface-mediated diffusion». В: *Physical Review E* 89.1 (2014), с. 012149.
- [36] O. Bénichou и R. Voituriez. «Mean first-passage times in confined media: from Markovian to non-Markovian processes». В: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 48.16 (2015), с. 163001.
- [37] G. Cencetti и др. «The second will be first: competition on directed networks». В: *Scientific Reports* 6.1 (2016), с. 1.
- [38] P. Krapivsky и S. Redner. «Trapping and escape in a turbid medium». В: *The Journal of Chemical Physics* 147.21 (2017), с. 214903.
- [39] I. Lohmar и J. Krug. «Diffusion-limited reactions and mortal random walkers in confined geometries». В: *Journal of Statistical Physics* 134 (2009), с. 307.
- [40] E. Abad, SB. Yuste и K. Lindenberg. «Survival probability of an immobile target in a sea of evanescent diffusive or subdiffusive traps: A fractional equation approach». В: *Physical Review E* 86.6 (2012), с. 061120.
- [41] E. Abad, SB. Yuste и K. Lindenberg. «Elucidating the role of subdiffusion and evanescence in the target problem: Some recent results». В: *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* 8.2 (2013), с. 100.
- [42] Exploration и trapping of mortal random walkers. «Yuste, SB. and Abad, E. and Lindenberg, K.» В: *Physical Review Letters* 110.22 (2013), с. 220603.
- [43] E. Abad, SB. Yuste и K. Lindenberg. «Evanescent continuous-time random walks». В: *Physical Review E* 88.6 (2013), с. 062110.
- [44] E. Abad и J. Kozak. «Competing reaction processes on a lattice as a paradigm for catalyst deactivation». В: *Physical Review E* 91.2 (2015), с. 022106.
- [45] D. Campos и др. «Optimal search strategies of space-time coupled random walkers with finite lifetimes». В: *Physical Review E* 91.5 (2015), с. 052115.
- [46] B. Meerson и S. Redner. «Mortality, redundancy, and diversity in stochastic search». В: *Physical Review Letters* 114.19 (2015), с. 198101.
- [47] D. Grebenkov и J. Rupprecht. «The escape problem for mortal walkers». В: *The Journal of Chemical Physics* 146.8 (2017), с. 084106.
- [48] J. Rehbein и B. Carpenter. «Do we fully understand what controls chemical selectivity?» В: *Physical Chemistry Chemical Physics* 13.47 (2011), с. 20906.

- [49] J. Rehbein и В. Wulff. «Chemistry in motion—off the MEP». В: *Tetrahedron letters* 56.50 (2015), с. 6931.
- [50] A. Martin-Sómer и др. «Post-transition state dynamics in gas phase reactivity: importance of bifurcations and rotational activation». В: *Journal of Chemical Theory and Computation* 12.3 (2016), с. 974.
- [51] S. Solomatin и др. «Multiple native states reveal persistent ruggedness of an RNA folding landscape». В: *Nature* 463.7281 (2010), с. 681.
- [52] M. Marek, A. Johnson-Buck и N. Walter. «The shape-shifting quasispecies of RNA: one sequence, many functional folds». В: *Physical Chemistry Chemical Physics* 13.24 (2011), с. 11524.
- [53] C. Hyeon и др. «Hidden complexity in the isomerization dynamics of Holliday junctions». В: *Nature chemistry* 4.11 (2012), с. 907.
- [54] B. Paudel и D. Rueda. «Molecular crowding accelerates ribozyme docking and catalysis». В: *Journal of the American Chemical Society* 136.48 (2014), с. 16700.
- [55] M. Hinczewski, C. Hyeon и D. Thirumalai. «Directly measuring single-molecule heterogeneity using force spectroscopy». В: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 113.27 (2016), E3852.
- [56] C. Pierse и O. Dudko. «Distinguishing Signatures of Multipathway Conformational Transitions». В: *Physical Review Letters* 118.8 (2017), с. 088101.
- [57] D. Brook. «Bounds for moment generating functions and for extinction probabilities». В: *Journal of Applied Probability* 3.1 (1966), с. 171.