

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
Факультет Физики

Парфенов Максим Вячеславович

«Аномальная упругость анизотропных гибких
двумерных материалов»

Выпускная квалификационная работа
по направлению подготовки 03.03.02 Физика
образовательная программа «Физика»

Научный руководитель:
Бурмистров Игорь Сергеевич,
док. физ.-мат. наук,
проф. фак. Физики НИУ ВШЭ

Москва
2022

Содержание

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Введение | 4 |
| 1.1 | Модель | 6 |
| 2 | Вывод эффективного действия | 8 |
| 3 | Случай слабой анизотропии | 10 |
| 3.1 | Диаграммная техника | 10 |
| 3.2 | Анализ уравнений РГ | 12 |
| 4 | Случай произвольной анизотропии | 15 |
| 4.1 | Общее скейлинг преобразование | 15 |
| 4.2 | Симметричный случай $\Gamma = \gamma$ | 16 |
| 4.2.1 | Диаграммная техника | 16 |
| 4.2.2 | Анализ уравнений РГ | 18 |
| 4.3 | Общий случай $\Gamma \neq \gamma$ | 21 |
| 4.3.1 | Диаграммная техника и уравнения РГ | 21 |
| 4.3.2 | Анализ уравнений РГ | 23 |
| 5 | Переход в трубчатую фазу | 24 |
| 5.1 | Поправка к критической температуре | 24 |
| 5.2 | Критический беспорядок в случае слабой анизотропии | 25 |
| 5.3 | Критический беспорядок на линии $\psi = \lambda$ | 26 |
| 5.4 | Критический беспорядок в случае $\psi \neq \lambda$ | 27 |
| 6 | Заключение | 29 |
| A | Усреднение по беспорядку | 30 |
| B | Диаграммы линейного приближения | 31 |
| B.1 | Поляризационный пузырь | 31 |
| B.2 | Поправка к собственно-энергетической функции в нулевом порядке по анизотропии | 32 |
| B.3 | Поправки к собственно-энергетической функции в первом порядке по анизотропии | 32 |
| C | Диаграммы для произвольной анизотропии | 34 |
| C.1 | Поляризационный оператор | 34 |
| C.2 | Поправка к собственно-энергетической функции | 36 |
| C.2.1 | Уравнения РГ в первом порядке по $1/d_c$ | 37 |
| C.3 | Асимптотические выражения для полученных функций | 38 |
| C.3.1 | Симметричный случай | 38 |

| | |
|--|-----------|
| С.3.2 Несимметричный случай | 42 |
| D Решение уравнений для перехода в трубчатую фазу | 44 |
| D.1 Решение уравнений в случае $f \ll 1$ | 44 |
| D.2 Случай $T = 0$ и слабая анизотропия | 46 |
| D.3 Случай $T = 0$ и произвольная анизотропия, при условии $\psi \neq \lambda$ | 47 |

Аннотация

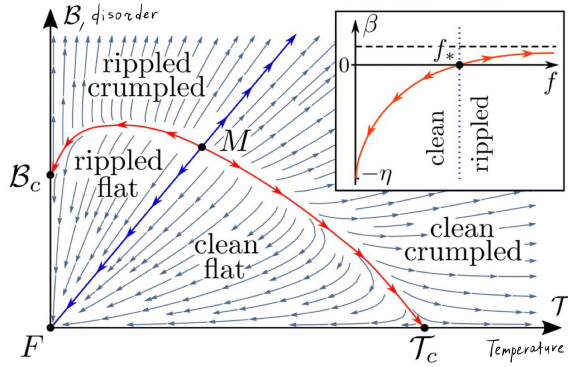
В данной работе рассматривается теория аномальной упругости в двумерных материалах с орторомбической кристаллической решеткой и «вмороженной» случайной кривизной, вызванной наличием в мембране дефектов, микроскопическая природа которых не конкретизируется. Анализ производится в универсальной режиме, на масштабах сильно превосходящих длину Гинзбурга. В работе получены однопетлевые поправки к собственнo-энергетической функции, которые имеют логарифмические расходимости, которые пере-суммируются с помощью ренорм-группового подхода. Сначала исследован линейный по анизотропии случай, затем произведено обобщение на случай произвольной силы анизотропии. Показано, что в выделенном симметричном случае задачу можно свести к задаче с тетрагональной симметрией, в которой существует бесконечное число плоских, чистых анизотропных фаз, исследована устойчивость этих фаз, найдены критические экспоненты. В этом случае также найдены критическая температура и критический беспорядок, определяющие переход мембраны в трубчатую фазу, оказывается, что он может быть параметрически мал, поэтому оказывается возможным наблюдение перехода на низких температурах для сильно анизотропных материалов. Помимо этого, рассмотрен общий асимметричный случай, показано наличие анизотропных плоских фаз, исследована их устойчивость.

1 Введение

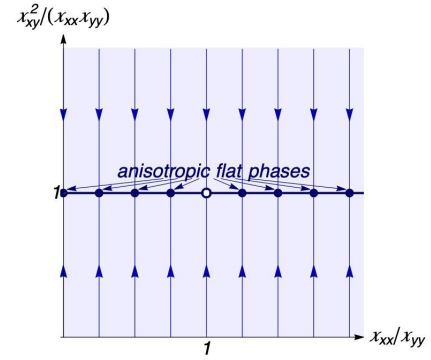
В последние годы особое внимание научного сообщества сосредоточено на изучении свойств двумерных материалов. Основное развитие данного направления было связано с изучением графена. Если рассматривать свободно-подвешенный лист графена и изучать его механические (упругие) свойства, то благодаря гексагональной симметрии кристаллической решетки, такой лист с точки зрения теории упругости аналогичен изотропной двумерной пластине. На основе формализма функционала Гинзбурга-Ландау было получено множество результатов, основной из которых это аномальная упругость - степенная зависимость изгибной жесткости графена от волнового вектора [1] в области сильного взаимодействия (универсальный режим). На основе этого, сравнивая влияние тепловых флуктуаций и аномальной упругости можно получить, что при конечной температуре с мембраной происходит переход в crumpled (смятую) фазу [2]. Также было доказано и теоретически [6], [11] и экспериментально [3] наличие аномального (нелинейного) закона Гука. Также [10], [11] доказано наличие отрицательного (ауксетического) коэффициента Пуассона, в таком случае при растяжении материалы-ауксетики становятся толще в направлении, перпендикулярном приложенной силе.

Crumpling переход может происходить также под влиянием беспорядка [9], [12], главное влияние которого — это появление случайной, замороженной кривизны [7]. Основными микроскопическими причинами беспорядка являются примеси, вакансии, дислокации и другие искажения кристаллической решетки 2(a). Также в «грязном» случае меняется показатель степени в аномальном законе Гука и скейлинг изгибной жесткости. В двухпетлевом приближении [12] была получена фазовая диаграмма 1(a) crumpling перехода.

Однако, не все двумерные кристаллы имеют гексагональную кристаллическую решетку, например, монослой чёрного фосфора (фосфорен) 2(b), монослой дихалькогенидов переходных металлов и монослой металлических монохалькогенидов [8], поэтому возникает необходимость в построении теории аномальной упругости для анизотропных двумерных материалов. Такая теория была построена в работе [13] для «чистого» случая, было получено, что при некоторой конечной температуре происходит переход в tubular (трубчатую) фазу, когда мембрана оказывается смятой по одному из направлений. Эта температура оказывается по порядку величины около 50 eV, что говорит о том, что плоская фаза для чистого материала является абсолютно устойчивой. Также было показано существование бесконечного числа анизотропных плоских фаз 1(b), которые характеризуются эллиптическими анизотропными изгибной жесткостью и модулем Юнга.

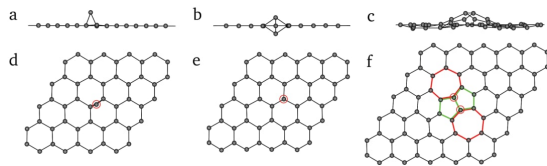


(a) Грязный, изотропный случай [12]

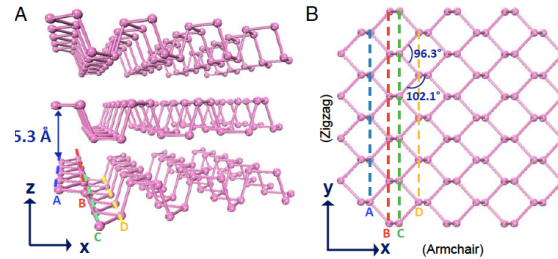


(b) Чистый, анизотропный случай [13]

Рис. 1: Фазовые диаграммы для двумерных мембран



(a) Виды искажений кристаллической решетки графена [4]



(b) Кристаллическая структура фосфорена [5]

Рис. 2: Основные модельные свойства анизотропных, грязных мембран

В данной работе я рассматриваю модель 2D анизотропной мембраны с беспорядком в нелинейной (универсальной) области. Строится теория возмущений для получения аналитических выражений скейлинга компонент изгибной жесткости. Основным интересом представляются ответы на следующие вопросы:

1. Какое влияние оказывает наличие беспорядка на устойчивость плоских, анизотропных фаз, устойчивых в чистом случае? (См. Главы 3, 4)
2. Возможно ли из-за влияния беспорядка эффективно (параметрически) уменьшить значение критической температуры (критического беспорядка), определяющего переход в трубчатую фазу? (См. Главу 5)

1.1 Модель

Свободная энергия двумерной, анизотропной мембраны с орторомбической кристаллической решеткой может быть записана в виде [14]:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \left[\chi_{\alpha\beta}^{(0)} (\nabla_{\alpha}^2 \mathbf{r}) (\nabla_{\beta}^2 \mathbf{r}) + c_{11} u_{xx}^2 + c_{22} u_{yy}^2 + 2c_{12} u_{xx} u_{yy} + 4c_{66} u_{xy}^2 \right] \quad (1)$$

Здесь, $u_{\alpha\beta} = (\partial_{\alpha} \mathbf{r} \partial_{\beta} \mathbf{r} - \delta_{\alpha\beta})/2$ — тензор деформаций, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{d_c+2}$. Коэффициенты $\{c_{\alpha\beta}, c_{66}\}$ называют модулями упругости двумерного кристаллического материала, $\chi_{\alpha\beta}^{(0)}$ — матрица изгибной жесткости мембраны, компоненты которой выражаются через модули упругости. Используя параметризацию в виде: $r_1 = \xi_x x + u_x$, $r_2 = \xi_y y + u_y$, $r_{i+2} = h_i$, где $\vec{h} = \{h_1, \dots, h_{d_c}\}$ — поле внеплоскостных (изгибных), классических фононных мод, а $\vec{u} = \{u_x, u_y\}$ — поле фононов в плоскости.

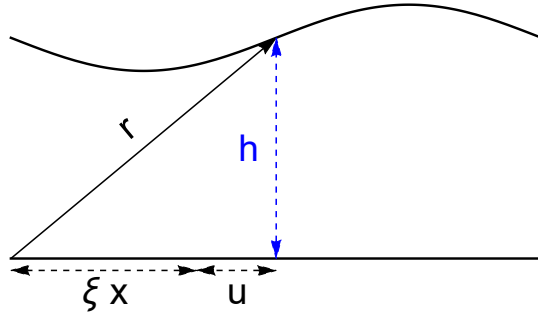


Рис. 3: Параметризация поверхности мембраны

В задаче нет малого параметра, поэтому я введу фиктивную размерность $d_c \gg 1$ у поля изгибных фононов, физическому случаю соответствует $d_c = 1$, причина введения такого параметра — возможность построения контролируемой теории возмущений, что сделано в 3.1, 4.2. Коэффициенты ξ_{α} называются факторами сжатия и определяют эффективную проективную площадь возмущенной мембраны. В такой параметризации тензор деформаций принимает вид:

$$u_{\alpha\beta} = (\xi_{\alpha}^2 - 1)\delta_{\alpha\beta}/2 + \left(\xi_{\beta} \partial_{\alpha} u_{\beta} + \xi_{\alpha} \partial_{\beta} u_{\alpha} + \partial_{\alpha} \vec{h} \partial_{\beta} \vec{h} + \partial_{\alpha} \vec{u} \partial_{\beta} \vec{u} \right) / 2 \quad (2)$$

Так как мы считаем, что пространственные производные изгибов мембраны малы $|\partial_{\alpha} \mathbf{h}| \ll 1$, $|\partial_{\alpha} \mathbf{u}| \ll 1$, в тензоре напряжений (2) пренебрегаем слагаемым $\partial_{\alpha} \mathbf{u} \partial_{\beta} \mathbf{u}$ по сравнению с $\partial_{\alpha} \mathbf{u}$. Нетрудно заметить, что наша задача становится гауссовой по полю плоскостных фононов. Соответствующий континуальный интеграл можно взять [13] и получить свободную энергию в форме:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \left[\chi_{\alpha\beta}^{(0)} \nabla_{\alpha}^2 h_i \nabla_{\beta}^2 h_i \right] + \frac{1}{8} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} Y_0(\theta_{\mathbf{q}}) \left| \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^2}{q^2} \mathbf{h}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \mathbf{h}_{-\mathbf{k}} \right|^2 + \mathcal{F}_{\xi} \quad (3)$$

где возникает анизотропный двумерный модуль Юнга ($\epsilon_{\alpha\beta}$ — двумерный тензор Леви-

Чивиты):

$$Y_0(\theta_{\mathbf{q}}) = c_{66} \left[\hat{q}_x^2 \hat{q}_y^2 + \frac{c_{66} c_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\alpha'} \epsilon_{\beta\beta'}}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2} \hat{q}_{\alpha'}^2 \hat{q}_{\beta'}^2 \right]^{-1} \xrightarrow{\text{isotropic}} Y_0^{is} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \quad (4)$$

где μ, λ – коэффициенты Ламе изотропного материала, $\hat{\mathbf{q}} = (\cos \theta_{\mathbf{q}}, \sin \theta_{\mathbf{q}})$.

Далее, следуя логике статьи [9], добавим в свободную энергию гауссово случайное анизотропное поле кривизны ζ_i^α :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \left[\varkappa_{\alpha\beta}^{(0)} (\nabla_\alpha^2 h_i + \zeta_i^\alpha) (\nabla_\beta^2 h_i + \zeta_i^\beta) \right] + \frac{1}{8} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} Y_0(\theta_{\mathbf{q}}) \left| \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^2}{q^2} \mathbf{h}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \mathbf{h}_{-\mathbf{k}} \right|^2 + \mathcal{F}_\xi \quad (5)$$

Плотность вероятности поля имеет стандартный многомерный гауссов вид:

$$\mathcal{P}(\zeta^x, \zeta^y) = Z_{\zeta^x, \zeta^y}^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \zeta^\alpha A_{\alpha\beta}^{-1} \zeta^\beta \right) \quad (6)$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{xy} & b_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b_{yy}}{b_{xx}b_{yy} - b_{xy}^2} & -\frac{b_{xy}}{b_{xx}b_{yy} - b_{xy}^2} \\ -\frac{b_{xy}}{b_{xx}b_{yy} - b_{xy}^2} & \frac{b_{xx}}{b_{xx}b_{yy} - b_{xy}^2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\langle \zeta_i^\alpha(\mathbf{x}) \zeta_j^\beta(\mathbf{x}') \rangle = b^{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (8)$$

Наша задача будет состоять в построении диаграммной техники для энергии (5) для поиска перенормировок констант связи в первом приближении по $1/d_c$.

2 Вывод эффективного действия

Для построения теории возмущений по взаимодействию изгибных фононных мод, нужно сначала получить усредненное по беспорядку действие, иначе седловая задача сводится к поиску напряжений мембраны, находящейся в случайном потенциале. Для усреднения будем использовать метод реплик, после введения которых получим вклады в свободную энергию в форме:

$$\mathcal{F}^{rep} = \mathcal{F}_0^{rep} + \mathcal{F}_1^{rep} \quad (9)$$

$$\mathcal{F}_0^{rep} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \left[\varkappa_{\alpha\beta}^{(0)} (\nabla_\alpha^2 h_i^n + \zeta_i^\alpha) (\nabla_\beta^2 h_i^n + \zeta_i^\beta) \right] \quad (10)$$

$$\mathcal{F}_1^{rep} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{8} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} Y_0(\theta_q) \left| \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^2}{q^2} \mathbf{h}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^n \mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^n \right|^2 + \mathcal{F}_\xi^n \right) \quad (11)$$

Как видно из формулы (11), взаимодействие фононов факторизуется в пространстве реплик, потому что беспорядок в него не входит. Тогда, усредняя (10) по беспорядку (см. Приложение А) получаем эффективную свободную энергию в пространстве реплик:

$$\mathcal{F}^{\text{eff}} = \sum_{n,m=1}^N \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \varkappa_{\alpha\beta}^{nm} k_\alpha^2 k_\beta^2 \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^n \mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^m + \sum_{n=1}^N \frac{1}{8} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} Y_0(\theta_q) \left| \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^2}{q^2} \mathbf{h}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^n \mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^n \right|^2 \quad (12)$$

Матрица изгибной жесткости приобретает тензорную структуру:

$$\hat{\varkappa} = \varkappa_{\alpha\beta}^{(0)} - \mathcal{K}_{\alpha\beta} \hat{J}, \quad \mathcal{K}_{\alpha\beta} = \frac{1}{T} \varkappa_{\alpha\gamma}^{(0)} b_{\gamma\delta} \varkappa_{\delta\beta}^{(0)}, \quad J^{nm} = 1 \quad (13)$$

где T – температура системы. Для дальнейших вычислений удобным окажется переписать компоненты матрицы изгибной жесткости через амплитуды угловых гармоник:

$$\varkappa(\theta_k) = \varkappa_0 + \delta \varkappa_2 \cos(2\theta_k) + \delta \varkappa_4 \cos(4\theta_k) \quad (14)$$

$$\varkappa_{xx} = \varkappa_0 + \delta \varkappa_2 + \delta \varkappa_4, \quad \varkappa_{yy} = \varkappa_0 - \delta \varkappa_2 + \delta \varkappa_4, \quad \varkappa_{xy} = \varkappa_0 - 3\delta \varkappa_4 \quad (15)$$

Аналогичный вид будут иметь компоненты матрицы $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$, так как они входят с той же комбинацией волновых векторов. Чтобы контролировать отличие нашей мембраны от изотропной введём три параметра [13]:

$$\gamma = \left(\frac{\varkappa_{xx}}{\varkappa_{yy}} \right)^{1/4}, \quad (\varkappa_{xx} \varkappa_{yy})^{1/2} = \tilde{\varkappa}, \quad \lambda = \frac{\tilde{\varkappa} - \varkappa_{xy}}{3\tilde{\varkappa} + \varkappa_{xy}} \quad (16)$$

Которые определены в областях $0 < \gamma < \infty$, $|\lambda| < 1$, параметр γ определяет насколько симметрия отличается от тетрагональной, которая реализуется при $\gamma = 1$. Аналогично

можно ввести такие же переменные для компонент матрицы беспорядка:

$$\Gamma = \left(\frac{\mathcal{K}_{xx}}{\mathcal{K}_{yy}} \right)^{1/4}, \quad (\mathcal{K}_{xx}\mathcal{K}_{yy})^{1/2} = \tilde{\mathcal{K}}, \quad \psi = \frac{\tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}_{xy}}{3\tilde{\mathcal{K}} + \mathcal{K}_{xy}} \quad (17)$$

Исследованию поведения именно этих констант связи при изменении размера системы будут посвящены дальнейшие главы.

3 Случай слабой анизотропии

3.1 Диаграммная техника

Рассмотрим для начала простой случай, когда мембрана слабо отличается от изотропной. Формально говоря: $\varkappa(\theta) = \varkappa_0 + \delta\varkappa(\theta)$, $|\delta\varkappa| \ll \varkappa_0$ и аналогично для гармоник матрицы $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$. Тогда выделим в действии изотропный и анизотропные вклады, для этого разобьём матрицу изгибной жесткости на два слагаемых:

$$\varkappa_{\alpha\beta}^{nm} k_\alpha^2 k_\beta^2 = (\varkappa_0 \delta^{nm} - \mathcal{K}_0^* J^{nm}) k^4 + (\delta\varkappa_{\alpha\beta} \delta^{nm} - \delta\mathcal{K}_{\alpha\beta} J^{nm}) k_\alpha^2 k_\beta^2 = \varkappa_0^{nm} k^4 + (\delta\varkappa_{\alpha\beta} \delta^{nm} - \delta\mathcal{K}_{\alpha\beta} J^{nm}) k_\alpha^2 k_\beta^2 \quad (18)$$

После этого вклады в свободную энергию приобретают вид:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\xi + \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_{int}^{(2)} + \mathcal{F}_{int}^{(4)} \quad (19)$$

Первое слагаемое нужно для исследования перехода в трубчатую фазу, которым в данном приближении я интересоваться не буду, поэтому в дальнейших выкладках оно присутствовать не будет.

$$\mathcal{F}_0 = \sum_{n,m=1}^N \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \varkappa_0^{nm} k^4 \mathbf{h}_k^n \mathbf{h}_{-k}^m \quad (20)$$

$$\mathcal{F}_{int}^{(2)} = \sum_{n,m=1}^N \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} (\delta\varkappa_{\alpha\beta} \delta^{nm} - \delta\mathcal{K}_{\alpha\beta} J^{nm}) k_\alpha^2 k_\beta^2 \mathbf{h}_k^n \mathbf{h}_{-k}^m \quad (21)$$

$$\mathcal{F}_{int}^{(4)} = \sum_{n,m=1}^N \frac{1}{8} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} Y_0(\theta_q) \delta_{nm} \left| \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^2}{q^2} \mathbf{h}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^n \mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^m \right|^2 \quad (22)$$

Из (20) следует вид затравочной матричной функции Грина:

$$\hat{G}_k = \frac{T}{k^4} \hat{\varkappa}_0^{-1} = \frac{T}{\varkappa_0 k^4} (1 + f \hat{J}), \quad f = \frac{\mathcal{K}_0^*}{\varkappa_0} = \frac{4b_0 \varkappa_0}{T} \quad (23)$$

Как видно из формул (21), (22) в задаче есть 2 вида вершин – потенциал, соответствующий анизотропии, и взаимодействие, зависящее от модуля Юнга.

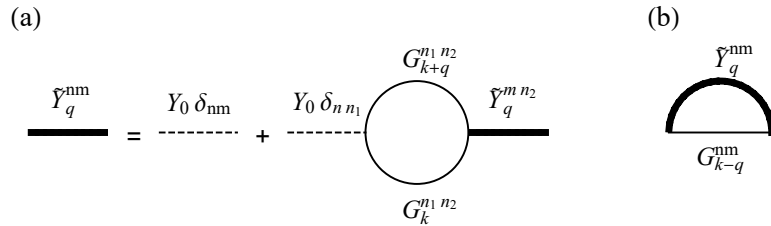


Рис. 4: Нулевое приближение по анизотропии, (a) RPA-типе ряд для экранированного взаимодействия, (b) поправка к self-energy $\tilde{\Sigma}^{(0)nm}$

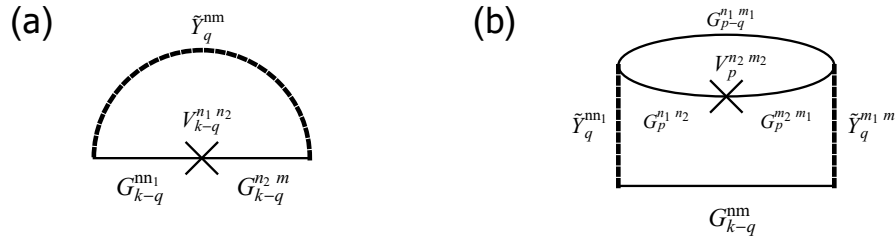


Рис. 5: Первое приближение по анизотропии $\tilde{\Sigma}^{(1)nm}$, (a) поправка к self-energy, (b) поправка к поляризаационному оператору

Будем считать что взаимодействие изгибных фононов экранируется диаграммным рядом RPA-типа. Пузыри поляризаационного оператора дают основной вклад порядка $d_c \gg 1$, именно поэтому мы и остановимся на RPA-диаграммах. В нулевом по анизотропии случае получим диаграммы 4.

В универсальной области (длинноволновой предел $q \ll q_*$, q_* – обратная длина Гинзбурга, определяющая ультрафиолетовую обрезку теории), экранированное взаимодействие оказывается независимым от голого значения модуля Юнга и принимает вид (B.1):

$$\mathcal{J}_q^{nm} = 2(\Pi_q^{-1})^{nm}, \quad \Pi_q^{nm} = \frac{d_c}{T} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} G_0^{nm}(\mathbf{k}) G_0^{nm}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \quad (24)$$

Теперь нам нужно сосчитать все диаграммы, в которые войдёт одна потенциальная вершина (первый порядок по анизотропии). Соответствующие диаграммы имеют вид 5. Важно заметить, что у второй диаграммы сократится симметричный фактор, потому что у «креста» (потенциальной вершины) может быть 2 расположения: она разрезает либо верхнюю, либо нижнюю функцию Грина в поляризаационном операторе, однако, из разложения экспоненты возникает фактор $1/2$, который сократит ту двойку. Формально точная функция Грина имеет вид:

$$\mathcal{G}_k^{nm} = \frac{T}{k^4} [\varkappa(\theta_k) \delta^{nm} - \mathcal{K}(\theta_k) J^{nm}]^{-1} \quad (25)$$

А значит понятно как будет устроена перенормировка амплитуд угловых гармоник:

1. Все, что стоит перед единичной матрицей – уходит в перенормировку соответствующих гармоник для изгибной жесткости.
2. Все, что стоит перед матрицей единиц – в перенормировку матрицы T (опять же по гармоникам).

Запишем решение уравнения Дайсона:

$$\mathcal{G}_k^{(1)nm} = \frac{T}{k^4} \left[\varkappa_0 \delta^{nm} - \mathcal{K}_0^* J^{nm} - \tilde{\Sigma}^{(0)nm} - \tilde{\Sigma}^{(1)nm} \right]^{-1} \quad (26)$$

Получающиеся поправки к self-energy имеют инфракрасные расходимости вида $\ln(q_*/k)$, $k \rightarrow 0$ (см. Приложение B), что говорит о ренорм-групповом поведении системы. Тогда,

используя формализм ренорм-группы, получаем систему уравнений на бегущие константы связи ($\Lambda = \ln(q_*/k)$):

$$\frac{d\kappa_0}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} \frac{1}{(1+2f)^3} (\kappa_0(1+5f+7f^2+2f^3) - \cancel{(1+4f)\delta\mathcal{K}_0}) \quad (27)$$

$$\frac{d\delta\kappa_2}{d\Lambda} = -\frac{2}{3d_c} \frac{1}{(1+2f)^3} [-(3+18f+33f^2+16f^3)\delta\kappa_2 + (3+12f+10f^2)\delta\mathcal{K}_2] \quad (28)$$

$$\frac{d\delta\kappa_4}{d\Lambda} = -\frac{1}{27d_c} \frac{1}{(1+2f)^3} [(11+66f+121f^2+62f^3)\delta\kappa_4 - (11+44f+40f^2)\delta\mathcal{K}_4] \quad (29)$$

$$\frac{d\mathcal{K}_0^*}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} \frac{1}{(1+2f)^3} ((f^3+2f^4)\kappa_0 + \cancel{(3f^2+2f^3)\delta\mathcal{K}_0}) \quad (30)$$

$$\frac{d\delta\mathcal{K}_2}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c} \frac{1}{(1+2f)^3} [(4f^3+10f^4)\delta\kappa_2 - (f^2+4f^3)\delta\mathcal{K}_2] \quad (31)$$

$$\frac{d\delta\mathcal{K}_4}{d\Lambda} = \frac{1}{27d_c} \frac{1}{(1+2f)^3} [-(18f^3+40f^4)\delta\kappa_4 + (7f^2+18f^3)\delta\mathcal{K}_4] \quad (32)$$

В уравнениях (27), (30) можно пренебречь анизотропными вкладами, чтобы в остальной системе сохранялся первый порядок по анизотропии.

3.2 Анализ уравнений РГ

Для анализа полученной системы, удобно записать ее в переменных, определённых (16), (17), для начала стоит разложить их до нужного порядка:

$$\gamma = \left(\frac{\kappa_0 + \delta\kappa_2 + \delta\kappa_4}{\kappa_0 - \delta\kappa_2 + \delta\kappa_4} \right)^{1/4} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\delta\kappa_2}{\kappa_0} \Rightarrow \frac{\delta\kappa_2}{\kappa_0} = 2(\gamma - 1), \quad \lambda \approx \frac{\delta\kappa_4}{\kappa_0} \quad (33)$$

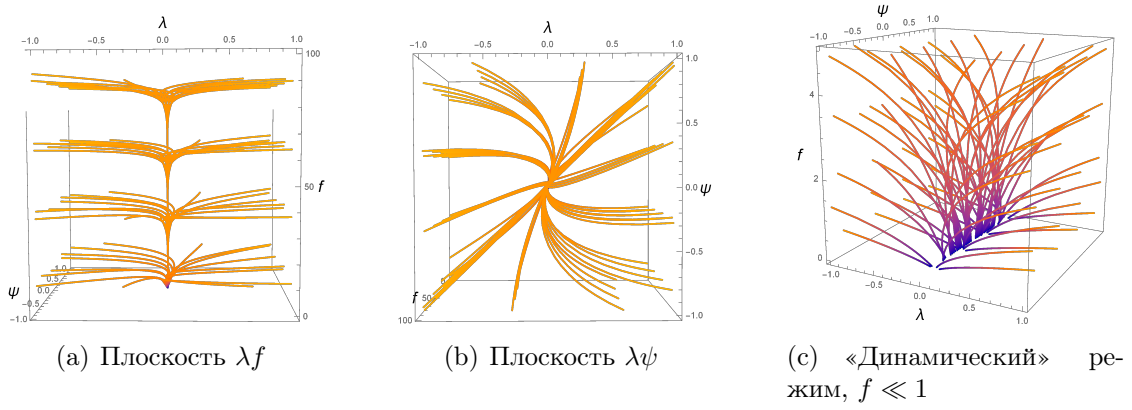
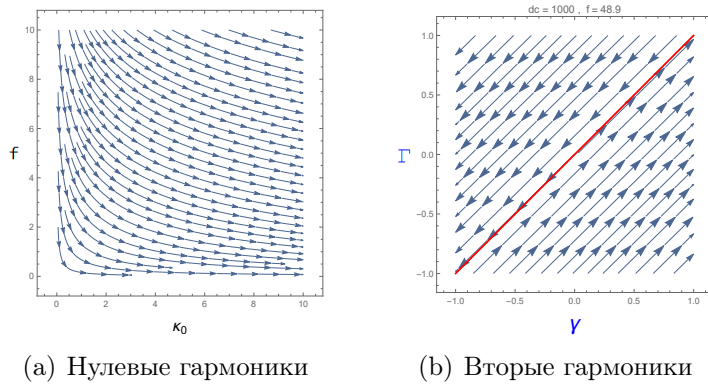
Аналогичный вид будут иметь переменные для гармоник матрицы \mathcal{K} . В новых переменных система принимает вид:

$$\frac{d\gamma}{d\Lambda} = -\frac{2}{3d_c} \frac{(3f+12f^2+10f^3)}{(1+2f)^3} (\Gamma - \gamma), \quad \frac{d\Gamma}{d\Lambda} = -\frac{2}{3d_c} \frac{(4f^2+10f^3)}{(1+2f)^3} (\Gamma - \gamma) \quad (34)$$

$$\frac{d\lambda}{d\Lambda} = -\frac{65+336f+499f^2+170f^3}{27d_c(1+2f)^3} \lambda + \frac{1}{27d_c} \frac{(11f+44f^2+40f^3)}{(1+2f)^3} \psi \quad (35)$$

$$\frac{d\psi}{d\Lambda} = -\frac{1}{27d_c} \frac{47f^2+90f^3}{(1+2f)^3} \psi - \frac{1}{27d_c} \frac{18f^2+40f^3}{(1+2f)^3} \lambda \quad (36)$$

$$\frac{d\kappa_0}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} \kappa_0 \frac{1+3f+f^2}{(1+2f)^2}, \quad \frac{df}{d\Lambda} = -\frac{2}{d_c} \frac{f(1+3f)}{(1+2f)^2} \quad (37)$$


 Рис. 6: Поведение РГ потока для амплитуд четвертых гармоник, $d_c = 1000$

 Рис. 7: Поведение РГ потока для оставшейся системы, $d_c = 1000$

Опишем некоторые свойства системы:

1. Соотношение $\gamma = \Gamma$ определяет линию фиксированных точек, рис. 7(b). Притом уравнения (34) можно переписать в форме:

$$\frac{dk}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c} k \frac{3f + 8f^2}{(1 + 2f)^3}, \quad k = \Gamma - \gamma \quad (38)$$

Решив, которое можно понять, что $k(\Lambda \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$, что говорит о неустойчивости соответствующей линии фиксированных точек.

2. Система имеет устойчивую фиксированную точку: $\lambda = 0$, $\psi f = 0$, притом поведение констант связи около линии фиксированных точек имеет вид:

$$\kappa_0 \sim (q_*/k)^{2/d_c}, \quad f \sim (q_*/k)^{-2/d_c}, \quad \lambda \sim (q_*/k)^{-65/27d_c}, \quad \psi \sim \psi_0 \quad (39)$$

что говорит о наличии бесконечного числа анизотропных чистых фаз, аналогичных таким в [9], [13].

3. В режиме сильного беспорядка $f \gg 1$ у системы есть фиксированная линия $\lambda = \psi$, рис. 6(b), которая сохраняет данное соотношение. Притом эта линия является устойчивой. В этом режиме также несложно понять, что f плывет логарифмически

с масштабом, поэтому можно считать её константой, а сами константы связи плывут к нулю и имеют вид:

$$\lambda \sim (q_*/k)^{-65/108d_c}, \quad \psi \sim (q_*/k)^{-65/108d_c} \quad (40)$$

потом происходит смена режима на «динамический» (рис. 7(c)) поведение констант связи в котором, описано выше.

4 Случай произвольной анизотропии

4.1 Общее скейлинг преобразование

Приступим теперь к построению теории аномальной упругости для произвольной силы анизотропии. Для этого распишем свободную энергию:

$$\mathcal{F}^{\text{eff}} = \sum_{n,m=1}^N \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \varkappa_{\alpha\beta}^{nm} k_\alpha^2 k_\beta^2 \mathbf{h}_k^n \mathbf{h}_{-k}^m + \sum_{n=1}^N \frac{1}{8} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} Y_0(\theta_q) \left| \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^2}{q^2} \mathbf{h}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^n \mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^n \right|^2 \quad (41)$$

Пользуясь логикой статьи [13] постараемся упростить данное выражение для свободной энергии. Сделаем преобразование системы координат:

$$k_x = Ak'_x, \quad k_y = Bk'_y$$

Тогда полная матрица изгибной жесткости переписется в виде:

$$\hat{\varkappa}'(\theta_k) = \left[\varkappa_{xx} A^4 - \mathcal{K}_{xx} A^4 \hat{J} \right] \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_k + \frac{1}{8} \cos 4\theta_k \right) + \left[\varkappa_{xy} A^2 B^2 - \mathcal{K}_{xy} A^2 B^2 \hat{J} \right] \times \\ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 4\theta_k \right) + \left[\varkappa_{yy} B^4 - \mathcal{K}_{yy} B^4 \hat{J} \right] \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\theta_k + \frac{1}{8} \cos 4\theta_k \right) \quad (42)$$

Далее нужно попытаться исключить вторую гармонику. Получаем систему уравнений вида:

$$\begin{cases} (\varkappa_{xx} - \mathcal{K}_{xx}) A^4 = (\varkappa_{yy} - \mathcal{K}_{yy}) B^4 \\ \mathcal{K}_{yy} B^4 = \mathcal{K}_{xx} A^4 \end{cases} \quad (43)$$

Она однородная, поэтому для наличия ненулевого решения приравняем её детерминант к нулю, получаем условие:

$$\varkappa_{xx} \mathcal{K}_{yy} - \varkappa_{yy} \mathcal{K}_{xx} = \Rightarrow \quad \gamma = \Gamma \quad (44)$$

Получается, что вторую гармонику возможно исключить из матрицы эффективной изгибной жесткости только в некотором симметричном случае, когда «тетрагональности» изгибной жесткости и беспорядка совпадают между собой. Расписывая данное соотношение через корреляторы беспорядка получим:

$$(b_{xx} \varkappa_{xx} - b_{yy} \varkappa_{yy})(\varkappa_{xx} \varkappa_{yy} - \varkappa_{xy}^2) = 0 \quad (45)$$

Например, данное соотношение выполняется в случае мембран с тетрагональной симметрией, когда $\gamma = \Gamma = 1$. Рассмотрим сначала симметричный случай.

4.2 Симметричный случай $\Gamma = \gamma$

4.2.1 Диаграммная техника

Решая систему (42) и выбирая коэффициенты A , B так, чтобы якобиан матрицы равнялся единице, получаем:

$$B = \left(\frac{\varkappa_{xx} - \mathcal{K}_{xx}}{\varkappa_{yy} - \mathcal{K}_{yy}} \right)^{1/8} = \left(\frac{\mathcal{K}_{xx}}{\mathcal{K}_{yy}} \right)^{1/8} = \left(\frac{\varkappa_{xx}}{\varkappa_{yy}} \right)^{1/8} = \sqrt{\gamma} = \sqrt{\Gamma} \quad (46)$$

Тогда амплитуды гармоник изгибной жесткости в старой системе координат, имеющие вид:

$$\delta \varkappa_2 = \frac{\varkappa_{xx} - \varkappa_{yy}}{2} = \tilde{\varkappa} \frac{(\gamma^4 - 1)}{2\gamma^2}, \quad \delta \varkappa_4 = \frac{\tilde{\varkappa} (1 - \gamma^2)^2 (1 + \lambda) + 8\lambda\gamma^2}{8\gamma^2(1 + \lambda)} \quad (47)$$

$$\varkappa_0 = \frac{\tilde{\varkappa} (3\gamma^4 + 2\gamma^2 + 3)(1 + \lambda) - 8\lambda\gamma^2}{8\gamma^2(1 + \lambda)} \Rightarrow \frac{\delta \varkappa_4}{\varkappa_0} = \frac{(1 - \gamma^2)^2 (1 + \lambda) + 8\lambda\gamma^2}{(3\gamma^4 + 2\gamma^2 + 3)(1 + \lambda) - 8\lambda\gamma^2} \quad (48)$$

перепишутся в новой системе координат в форме:

$$\varkappa'_0 = \frac{\tilde{\varkappa}}{1 + \lambda}, \quad \delta \varkappa'_4 = \frac{\lambda \tilde{\varkappa}}{1 + \lambda}, \quad \delta \varkappa'_2 = 0, \quad \tilde{\varkappa} = (\varkappa_{xx} \varkappa_{yy})^{1/2}, \quad \lambda = \frac{\delta \varkappa'_4}{\varkappa'_0} \quad (49)$$

аналогичный вид будут иметь амплитуды гармоник для матрицы $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$. Анизотропный модуль Юнга примет вид:

$$\tilde{Y}_0(\theta_q) = 4c_{66} \left[\sin^2(2\theta) + 4c_{66} \frac{(\gamma^{-2} c_{11} \cos^4 \theta - (c_{12}/2) \sin^2(2\theta) + c_{22} \gamma^2 \sin^4 \theta)}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2} \right]^{-1} \quad (50)$$

В таком случае затравочная матричная функция Грина будет иметь вид:

$$\hat{G}(k) = \frac{T}{k^4} \varkappa'^{-1}(\theta_k) = \frac{T}{k^4} \frac{1}{\varkappa'_0 + \delta \varkappa'_4 \cos 4\theta_k} \left(1 + \frac{\mathcal{K}'_0 + \delta \mathcal{K}'_4 \cos 4\theta_k}{\varkappa'_0 + \delta \varkappa'_4 \cos 4\theta_k} \hat{J} \right) = \frac{T}{k^4} \frac{1}{\varkappa^{(0)}(\theta_k)} \left(1 + f(\theta_k) \hat{J} \right) \quad (51)$$

Нетрудно понять, что диаграммная техника будет аналогична таковой в 3.1, с учетом замены: $Y_0 \rightarrow \tilde{Y}(\theta_q)$ и без «анизотропного креста», потому что по всем ним проведено подсуммирование. Тогда для поиска перенормировок констант связи в первом приближении по $1/d_c$ нужно посчитать диаграммы вида 8. После вычисления поляризационного оператора и экранированного взаимодействия, получаем что в универсальном режиме ($q \ll q_*$) оно перестает зависеть от голого значения анизотропного модуля Юнга, как и в 3.1. И имеет вид:

$$\hat{\Pi}(\mathbf{q}) = \frac{d_c}{3T} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \hat{G}(-\mathbf{k}) \hat{G}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} = \frac{d_c T}{q^2} \hat{\mathcal{P}}(\theta_q) \quad (52)$$

$$\tilde{\mathcal{J}}^{nm} = \tilde{Y}_0 \left(1 + 3\tilde{Y}_0 \Pi^{nm} / 2 \right)^{-1} \approx \frac{2q^2}{3d_c T} (\mathcal{P}^{nm}(\theta_q))^{-1} \quad (53)$$

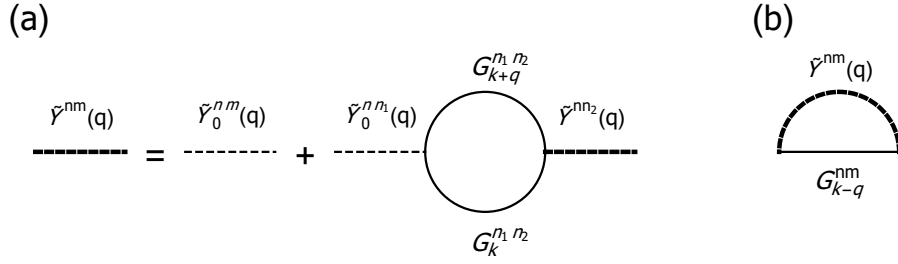


Рис. 8: Диаграммы однопетлевого приближения (а) RPA-типе ряд для экранированного взаимодействия, (б) поправка к собственнo-энергетической функции в первом порядке по $1/d_c$

где функция $\hat{\mathcal{P}}(\theta_q)$ имеет вид:

$$\hat{\mathcal{P}}(\theta_q) = \frac{1}{3} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^2} \frac{\left(1 + f(\theta_{-k}) + f(\theta_{k+q}) + f(\theta_{-k})f(\theta_{k+q})\hat{J}\right)}{(\mathbf{k} + \mathbf{q})^4 \varkappa^{(0)}(\theta_{k+q}) k^4 \varkappa^{(0)}(\theta_{-k})} \quad (54)$$

Подсчёт однопетлевой поправки к собственнo-энергетической функции и решение уравнения Дайсона (Приложение С) приводят к уравнениям РГ в форме:

$$\frac{d\kappa_0}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} \kappa_0 F_0(f_0, \lambda, \psi), \quad \frac{d\delta\kappa_4}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c} \kappa_0 F_4(f_0, \lambda, \psi), \quad \frac{d\delta\kappa_2}{d\Lambda} = 0 \quad (55)$$

$$\frac{d\mathcal{K}_0}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} \kappa_0 \Phi_0(f_0, \lambda, \psi), \quad \frac{d\delta\mathcal{K}_4}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c} \kappa_0 \Phi_4(f_0, \lambda, \psi), \quad \frac{d\delta\mathcal{K}_2}{d\Lambda} = 0 \quad (56)$$

где функции F_{2m}, Φ_{2m} определены как:

$$F_{2m}(f_0, \lambda, \psi) = \frac{1}{16\pi} \oint \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{\cos(2m\theta_q)}{1 + \lambda \cos(4\theta_q)} \frac{1}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \left(1 + f_0 \frac{1 + \psi \cos(4\theta_q)}{1 + \lambda \cos(4\theta_q)} - \frac{f_0^2 \pi_2}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \right) \quad (57)$$

$$\Phi_{2m}(f_0, \lambda, \psi) = \frac{1}{16\pi} \oint \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{f_0^3 \pi_2}{(\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12}))^2} \frac{1 + \psi \cos(4\theta_q)}{1 + \lambda \cos(4\theta_q)} \cos(2m\theta_q) \quad (58)$$

функции $\pi_i(\theta_q)$ определены в Приложении С. Комментарий по поводу уравнений на вторые гармоники. С помощью симметрии поправок к собственнo-энергетической функции (Приложение С) можно доказать, что вторые гармоники не будут индуцироваться в эффективной матрице изгибной жесткости. Для этого рассмотрим выражение (137), в котором в подынтегральном выражении сделаем замену вида: $\theta_q \rightarrow \pi/2 - \theta_q$.

- Функции $(1 + f\hat{J})$ и $\varkappa^{(0)}$ вследствие своей тетрагональной симметрии не изменяются;
- Функция $\cos 2\theta_q$ – меняет знак;

Поэтому осталось доказать, что матрица \mathcal{P}^{-1} , а значит и \mathcal{P} остаются неизменными. Рассмотрим выражение (54). В нём нужно проверить, что все входящие в него функции сим-

метричны относительно данных преобразований:

1. Начнем с векторного произведения и четвертой степени суммы векторов:

$$\frac{\sin^4(\theta_k - \theta_q)}{(k^2 + 2kq \cos(\theta_k - \theta_q) + q^2)^2} \xrightarrow{\theta_q = \pi/2 - \theta'_q} \frac{\sin^4(\theta_k - \pi/2 + \theta'_q)}{(k^2 + 2kq \cos(\theta_k - \pi/2 + \theta'_q) + q^2)^2} \xrightarrow{\theta_k = \pi/2 - \theta'_k} \frac{\sin^4(-\theta'_k + \theta_q)}{(k^2 + 2kq \cos(-\theta'_k + \theta_q) + q^2)^2} = \frac{\sin^4(\theta'_k - \theta_q)}{(k^2 + 2kq \cos(\theta'_k - \theta_q) + q^2)^2}$$

Интеграл от этого выражения не меняется, потому что интегрирование все равно проводится по периоду, хоть и сдвинутому.

2. Теперь с изгибной жесткостью и функцией f , которые не зависят от q :

$$\varkappa(\theta_{-k}) \xrightarrow{\theta_k = \pi/2 - \theta'_k} \varkappa(\theta'_{-k}), \quad f(\theta_{-k}) \xrightarrow{\theta_k = \pi/2 - \theta'_k} f(\theta'_{-k})$$

Это является простым следствием тетрагональной симметрии.

3. Теперь разберёмся с $\cos \theta_{k+q}$ и $\sin \theta_{k+q}$:

$$\cos \theta_{k+q} = \frac{\xi \cos \theta_k + \cos \theta_q}{(\xi^2 + 2\xi \cos \theta_{kq} + 1)^{1/2}} \xrightarrow[\theta_q = \pi/2 - \theta'_q]{\theta_k = \pi/2 - \theta'_k} \frac{\xi \sin \theta_k + \sin \theta_q}{(\xi^2 + 2\xi \cos \theta_{kq} + 1)^{1/2}} = \sin \theta_{k+q}$$

$$\sin \theta_{k+q} = \frac{\xi \sin \theta_k + \sin \theta_q}{(\xi^2 + 2\xi \cos \theta_{kq} + 1)^{1/2}} \xrightarrow[\theta_q = \pi/2 - \theta'_q]{\theta_k = \pi/2 - \theta'_k} \frac{\xi \cos \theta_k + \cos \theta_q}{(\xi^2 + 2\xi \cos \theta_{kq} + 1)^{1/2}} = \cos \theta_{k+q}$$

Теперь, вспоминая вид косинуса четверного аргумента:

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x, \quad \text{symmetry: } \cos x \rightarrow \sin x$$

Поэтому функции $\varkappa(\theta_{k+q})$ и $f(\theta_{k+q})$ не меняют своего вида при таких преобразованиях, интегралы от них также не меняют своего значения из-за периодичности функций.

Из всего вышеперечисленного следует, что функция $\mathcal{P}(\theta_q) = \mathcal{P}(\pi/2 - \theta_q)$, а это значит, что вторая гармоника не индуцируется.

4.2.2 Анализ уравнений РГ

Перепишем уравнения (55), (56) в переменных (16), (17):

$$\frac{d\chi_0}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} \chi_0 F_0(f_0, \lambda, \psi), \quad \frac{d\lambda}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c} F_4(f_0, \lambda, \psi) - \frac{2}{d_c} \lambda F_0(f_0, \lambda, \psi) \quad (59)$$

$$\frac{df_0}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} \Phi_0(f_0, \lambda, \psi) - \frac{2}{d_c} f_0 F_0(f_0, \lambda, \psi), \quad \frac{d\psi}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c} \frac{1}{f_0} \Phi_4(f_0, \lambda, \psi) - \frac{2}{d_c} \frac{\psi}{f_0} \Phi_0(f_0, \lambda, \psi) \quad (60)$$

$$\frac{d\gamma}{d\Lambda} = 0, \quad \frac{d\Gamma}{d\Lambda} = 0 \quad (61)$$

Последние два уравнения говорят о том, что константы связи γ, Γ выпадают из нашей теории в универсальном режиме, т.к. они все входят только в перескеленный анизотропный модуль Юнга. Все уравнения выше записаны в преобразованной системе координат.

Рассмотрим основные следствия, полученные в ходе анализа системы (59)-(61) (Приложение С.3.1):

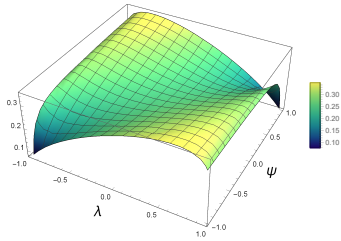
1. Можно доказать, что у системы есть точная линия фиксированных точек $\lambda = 0, f_0 = 0, \psi = \psi_*$. Очевидно, что функции $\Phi_{2m} \rightarrow 0 \sim f_0^3$ при $f_0 = 0$, поэтому правая часть уравнения (60) обнуляется как f_0^2 . Далее посмотрим на функции F_{2m} :

$$F_{2m}(0, \lambda, \psi) \rightarrow \frac{1}{16\pi} \oint \frac{d\theta_q \cos(2m\theta_q)}{2\pi \kappa(\lambda, \theta_q)} \frac{1}{\pi_0(\lambda, \theta_q)} \xrightarrow{\lambda=0} \oint \frac{d\theta_q}{2\pi} \cos(2m\theta_q) = 0, \quad m \neq 0 \quad (62)$$

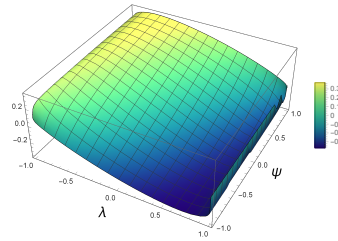
Поэтому правая часть уравнения (59), обнуляется. Что вместе с утверждением выше доказывает существование линии фиксированных точек. Данная линия является устойчивой, также как и в 3.2. Поведение плавующих констант связи в «динамическом» режиме аналогично таковому в (39). Такое поведение говорит о том, что устойчивость анизотропных фаз в однопетлевом приближении не зависит ни от анизотропии, ни от наличия в системе беспорядка.

2. В режиме сильного беспорядка $f_0 \gg 1$ сохраняется линия фиксированных точек $\lambda = \psi$. Для доказательства запишем приближенные выражения для функций F_{2m}, Φ_{2m} :

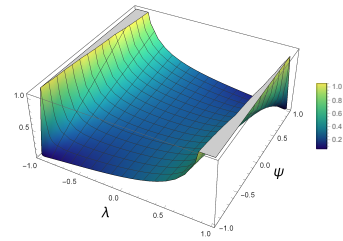
$$F_{2m} \approx \frac{1}{16\pi} \oint \frac{d\theta \cos 2m\theta}{2\pi \kappa(\lambda, \theta)} \left(\frac{1}{2\pi_1} \frac{\kappa(\psi, \theta)}{\kappa(\lambda, \theta)} - \frac{\pi_2}{4\pi_1^2} \right), \quad f_0 \tilde{\Phi}_{2m} \approx f_0 \frac{1}{16\pi} \oint \frac{d\theta \kappa(\psi, \theta)}{2\pi \kappa^2(\lambda, \theta)} \cos 2m\theta \frac{\pi_2}{4\pi_1^2} \quad (63)$$



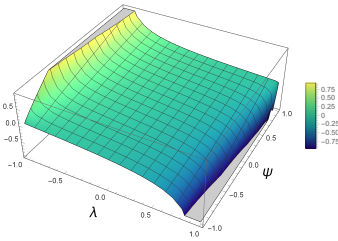
(a) Функция F_0



(b) Функция F_4



(c) Функция $\tilde{\Phi}_0$



(d) Функция $\tilde{\Phi}_4$

Рис. 9: Численные графики функций F_{2m}, Φ_{2m} для $f_0 \gg 1$

Перепишем тогда приближенные уравнения РГ:

$$\frac{d\lambda}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c} F_4(\lambda, \psi) - \frac{2}{d_c} \lambda F_0(\lambda, \psi), \quad \frac{d\psi}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c} \tilde{\Phi}_4(\lambda, \psi) - \frac{2}{d_c} \psi \tilde{\Phi}_0(\lambda, \psi) \quad (64)$$

Теперь сделаем несколько простых замечаний, являющихся следствием (130)-(133):

$$\pi_0(\lambda, \theta_q) = \pi_1(\lambda, \lambda, \theta_q) = \pi_2(\lambda, \lambda, \theta_q) \quad (65)$$

Тогда теперь проверим является ли линия $\psi = \lambda$ – линией фиксированных точек. Для этого подставим соотношение выше в полученные разложения:

$$F_{2m}(\lambda, \lambda) = \frac{1}{16\pi} \oint \frac{d\theta \cos 2m\theta}{2\pi \kappa(\lambda, \theta)} \frac{1}{4\pi_0}, \quad \tilde{\Phi}_{2m}(\lambda, \lambda) = \frac{1}{16\pi} \oint \frac{d\theta \cos 2m\theta}{2\pi \kappa(\lambda, \theta)} \frac{1}{4\pi_0} \quad (66)$$

Видно, что полученные функции совпадают в точности, что означает, что совпадают и уравнения РГ, что и означает наличие линии $\lambda = \psi$, вдоль которое данное соотношение сохраняется. Эта линия является устойчивой (Приложение С), что говорит о том, что она притягивает к себе РГ поток 10. Также на этой линии $f_0 \sim \text{const}$, т.е. в ведущем приближении оно ведет себя также, как и в линейном случае («логарифмический режим»).

3. В режиме сильного беспорядка константа связи f_0 изменяет своё поведение (относительно линейного случая) за счёт нелинейных вкладов по анизотропии в уравнение РГ:

$$\frac{df_0}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} f_0 \left(\tilde{\Phi}_0(\lambda, \psi) - F_0(\lambda, \psi) \right) \quad (67)$$

у константы связи появляются области немонотонности (Приложение С), что говорит о том, что при некоторой начальной анизотропии сила беспорядка может локально увеличиваться с изменением волнового вектора. Поэтому поведение константы связи f_0 уже не является логарифмическим, но все еще является медленным. Поведение остальных констант связи аналогично линейному случаю 40.

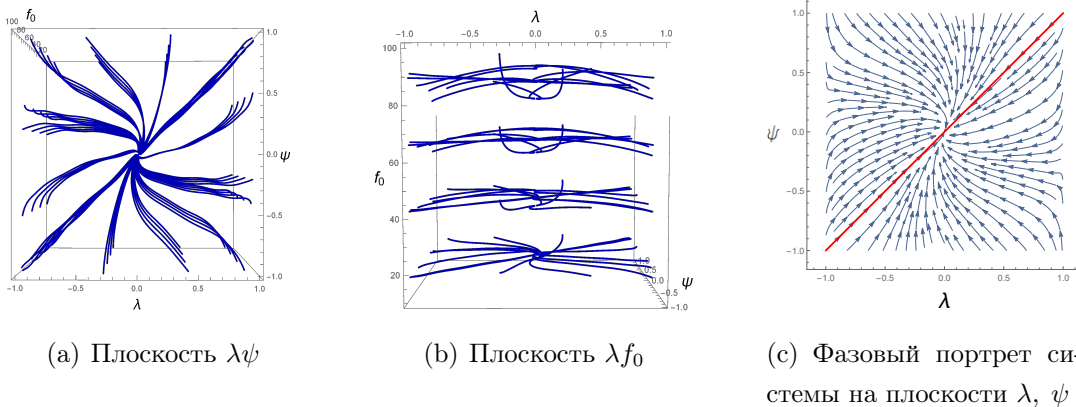


Рис. 10: Численный РГ поток для произвольной анизотропии в случае $\gamma^{(0)} = \Gamma^{(0)}$, $d_c = 1000$

4. В системе есть симметрия вида $\lambda \rightarrow -\lambda$, $\psi \rightarrow -\psi$. Такая симметрия есть в системе, когда уравнения записаны в терминах нулевых амплитуд гармоник, а не в «изотропных» переменных $(\tilde{f}, \tilde{\varkappa})$.

4.3 Общий случай $\Gamma \neq \gamma$

4.3.1 Диаграммная техника и уравнения РГ

Рассмотрим теперь случай когда $\gamma^{(0)} \neq \Gamma^{(0)}$, когда избавиться от обеих вторых гармоник не получится. Но всё ещё возможно сделать преобразование координат, чтобы занулить вторую гармонику в матрице изгибной жесткости. Сделаем скейлинг, аналогичный таковому в (4.1). После этого получаем:

$$k_x \rightarrow k_x/\sqrt{\gamma}, \quad k_y \rightarrow k_y\sqrt{\gamma} \quad (68)$$

Тогда матрица изгибной жесткости:

$$\hat{\varkappa}(\theta) = \frac{\tilde{\varkappa}(1 + \lambda \cos 4\theta)}{1 + \lambda} - (\mathcal{K}'_0 + \delta\mathcal{K}'_2 \cos 2\theta + \delta\mathcal{K}'_4 \cos 4\theta) \hat{J} \quad (69)$$

Теперь довольно важно посмотреть куда переходит $\delta\mathcal{K}_2$ при таком скейлинге:

$$\delta\mathcal{K}'_2 = -\frac{1}{2\gamma^2}\mathcal{K}_{xx} + \frac{\gamma^2}{2}\mathcal{K}_{yy} = \frac{\tilde{\mathcal{K}}}{2\gamma^2\Gamma^2} (\Gamma^4 - \gamma^4) \quad (70)$$

Остальные амплитуды гармоник для матрицы $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ будут иметь вид, аналогичный (47), (48) с заменой $\gamma \rightarrow \gamma/\Gamma$. Диаграммная техника будет аналогична 8, с учётом того, что затравочная матричная функция Грина будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \hat{G}(k) &= \frac{T}{k^4} \hat{\varkappa}'^{-1}(\theta_k) = \frac{T}{k^4} \frac{1}{\varkappa'_0 + \delta\varkappa'_4 \cos 4\theta_k} \left(1 + \frac{\mathcal{K}'_0 + \delta\mathcal{K}'_2 \cos 2\theta_k + \delta\mathcal{K}'_4 \cos 4\theta_k}{\varkappa'_0 + \delta\varkappa'_4 \cos 4\theta_k} \hat{J} \right) = \\ &= \frac{T}{k^4} \frac{1}{\varkappa^{(0)}(\theta_k)} \left(1 + f(\theta_k) \hat{J} \right) \end{aligned} \quad (71)$$

Дальнейший вывод поправок к собственно-энергетической функции аналогичен (Приложение С), с учётом замены $f(\theta_k)$. Тогда получаем уравнения РГ в виде (все переменные – отношения соответствующих амплитуд гармоник к амплитуде нулевой гармоники):

$$\frac{d\varkappa_0}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} \varkappa_0 F_0(f_0, \lambda, \psi, \omega), \quad \frac{d\lambda}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c} F_4(f_0, \lambda, \psi, \omega) - \frac{2}{d_c} \lambda F_0(f_0, \lambda, \psi, \omega) \quad (72)$$

$$\frac{df_0}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} \Phi_0(f_0, \lambda, \psi, \omega) - \frac{2}{d_c} f_0 F_0(f_0, \lambda, \psi, \omega), \quad \frac{d\psi}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c} \frac{1}{f_0} \Phi_4(f_0, \lambda, \psi, \omega) - \frac{2}{d_c} \frac{\psi}{f_0} \Phi_0(f_0, \lambda, \psi, \omega) \quad (73)$$

$$\frac{d\omega}{d\Lambda} = -\frac{8}{3d_c} \frac{1}{f_0} \Phi_2(f_0, \lambda, \psi, \omega) - \frac{2}{d_c} \frac{\omega}{f_0} \Phi_0(f_0, \lambda, \psi, \omega), \quad \frac{d\varpi}{d\Lambda} = -\frac{8}{3d_c} F_2(f_0, \lambda, \psi, \omega) - \frac{2}{d_c} \varpi F_0(f_0, \lambda, \psi, \omega) \quad (74)$$

где я ввёл переменные $\varpi = \delta\mathcal{K}_2/\mathcal{K}_0$, $\omega = \delta\mathcal{K}_2/\mathcal{K}_0$, а функции F_{2m} , Φ_{2m} имеют вид:

$$F_{2m}(f_0, \lambda, \psi, \omega) = \frac{1}{16\pi} \oint \frac{d\theta_q \cos(2m\theta_q)}{2\pi \kappa^{(1)}(\lambda, \theta_q)} \frac{1}{\pi_0 + 2f_0\pi_{11}} \left(1 + f_0 \frac{\kappa^{(2)}(\omega, \psi, \theta_q)}{\kappa^{(1)}(\lambda, \theta_q)} - \frac{f_0^2 \pi_2}{\pi_0 + 2f_0\pi_{11}} \right) \quad (75)$$

$$\Phi_{2m}(f_0, \lambda, \psi, \omega) = \frac{1}{16\pi} \oint \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{f_0^3 \pi_2}{(\pi_0 + 2f_0\pi_{11})^2} \frac{\kappa^{(2)}(\omega, \psi, \theta_q)}{(\kappa^{(1)}(\lambda, \theta_q))^2} \cos(2m\theta_q) \quad (76)$$

$$\kappa^{(1)}(x, \theta) = 1 + x \cos(4\theta), \quad \kappa^{(2)}(x, y, \theta) = 1 + y \cos(2\theta) + x \cos(4\theta) \quad (77)$$

Заметим несколько важных и простых свойств системы (штрихи у переменных убраны):

1. $\lambda = 0, f = 0$ — линия фиксированных точек для системы уравнений на f, λ, ψ, ω . Её устойчивость нужно проверять отдельно.
2. ϖ — «slave» переменная, но всё же вторая гармоника индуцируется RG потоком, даже если изначально её занулить скейлингом. Поэтому во всех функциях в знаменателях нужно сделать замену $\kappa^{(1)}(\lambda, \theta) \rightarrow \kappa^{(2)}(\lambda, \varpi, \theta)$. Что повлияет на вид уравнений RG.
3. $\omega = 0$ даёт зануление функций F_2, Φ_2 , по тем же симметричным причинам, которые высказаны в главе 4.2, что говорит о том, что такое значение гарантирует зануление правой части уравнения на ω . Вспоминая, что $\omega \sim (\Gamma - \gamma)$ можно сделать вывод, что данный предел соответствует предыдущему рассмотренному симметричному случаю 4.2.
4. Важно, что вид уравнений 72 - 74 не зависит от общего преобразования растяжения, имеющего единичный якобиан, что говорит о наличии внутренней симметрии.
5. После того, как ϖ начнёт индуцироваться, из-за нового вида функции Грина (78) возникнут новые ограничения на параметры λ, ϖ , область существования которых будет иметь вид:

$$\hat{G}(k) = \frac{T}{k^4} \hat{\mathcal{K}}^{-1}(\theta_k) = \frac{T}{k^4} \frac{1}{\mathcal{K}'_0 + \delta\mathcal{K}'_2 \cos 2\theta_k + \delta\mathcal{K}'_4 \cos 4\theta_k} \left(1 + \frac{\mathcal{K}'_0 + \delta\mathcal{K}'_2 \cos 2\theta_k + \delta\mathcal{K}'_4 \cos 4\theta_k}{\mathcal{K}'_0 + \delta\mathcal{K}'_2 \cos 2\theta_k + \delta\mathcal{K}'_4 \cos 4\theta_k} \hat{j} \right) \quad (78)$$

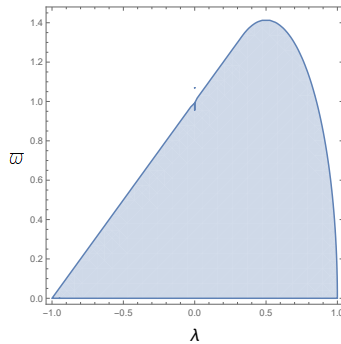


Рис. 11: Область существования параметров λ, ϖ

4.3.2 Анализ уравнений РГ

Выпишем основные следствия анализа системы 72 - 74. В основном, мы будем интересоваться только устойчивостью анизотропных фаз (Приложение С.3.2):

1. Поведение констант связи λ , ψ в первом нелинейном порядке не отличается от поведения в случае $\gamma^{(0)} = \Gamma^{(0)}$, также не изменятся показатели, описанные в (39).
2. У системы возникает устойчивая фиксированная точка $\omega f_0 = 0$, $\varpi = 0$. Что окончательно доказывает, что у системы есть бесконечное число устойчивых анизотропных фаз. Если произвести разложение более точно, то станет понятно, что настоящей линией фиксированных точек будет:

$$\varpi^2 = 8\lambda(1 - \lambda) \quad (79)$$

именно так выглядит полученная в [13] линия фиксированных точек, если совершить обратное преобразование координат. Понятно, беспорядок не будет оказывать влияния на её устойчивость.

3. В режиме большого беспорядка линия фиксированных точек изменяет вид, относительно 4.2 и приобретает вид: $\lambda = \psi$, $\varpi = \omega$. На ней поведение f_0 не отличается от линейного случая.

5 Переход в трубчатую фазу

Следуя [9], [13], я могу ввести анизотропный фактор сжатия, который зависит от импульса: $\xi_\alpha^2(k) = 1 - \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \theta(q-k) q_\alpha^2 \langle h_i^n h_i^n \rangle$, где $\langle h_i^n h_i^n \rangle = d_c \mathcal{G}_k^{nn}$ — коррелятор изгибных фононов. Это выражение учитывает вклады фононов с импульсом q больше k . Используя вид затравочной функции Грина для случая $\gamma^{(0)} = \Gamma^{(0)}$ (этот случай рассматриваем из-за его простоты), можно получить:

$$\xi_x^2 = 1 - \frac{d_c T}{4\pi B^2 \varkappa'_0} \ln\left(\frac{q_*}{k}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(1 + f_0 \frac{1-\lambda\psi}{1-\lambda^2}\right), \quad B = \left(\frac{\varkappa_{xx} - \mathcal{K}_{xx}}{\varkappa_{yy} - \mathcal{K}_{yy}}\right)^{1/8} \quad (80)$$

$$\xi_y^2 = 1 - \frac{d_c T B^2}{4\pi \varkappa'_0} \ln\left(\frac{q_*}{k}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(1 + f_0 \frac{1-\lambda\psi}{1-\lambda^2}\right) \quad (81)$$

Эти выражения имеют инфракрасные расходимости ($k \rightarrow 0$), что говорит о ренорм-групповом поведении ξ_α^2 :

$$\frac{d\xi_x^2}{d\Lambda} = -\frac{d_c T}{4\pi B^2 \varkappa'_0} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(1 + f_0 \frac{1-\lambda\psi}{1-\lambda^2}\right), \quad \frac{d\xi_y^2}{d\Lambda} = -\frac{d_c T B^2}{4\pi \varkappa'_0} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(1 + f_0 \frac{1-\lambda\psi}{1-\lambda^2}\right) \quad (82)$$

Критической температуре соответствует предел $f_0 \rightarrow 0$, критический беспорядок я буду искать в пределе $T = 0$. Для их получения нужно решить соответствующую систему уравнений и найти решение уравнения $\xi_\alpha^2(\Lambda \rightarrow \infty) = 0$.

5.1 Поправка к критической температуре

Так как точное решение системы возможно только численно, начнём строить аналитику для предельных случаев. Первым рассмотрим случай малых f_0 , что аналогично высоким температурам. Обговорим условия применимости: $f_0 \ll 1$, $\lambda \ll 1$, $f_0 \lambda \psi \sim \lambda^2$. Тогда разложим уравнения (82) до нужного порядка:

$$\frac{d\xi_x^2}{d\Lambda} = -\frac{d_c T}{4\pi B^2 \varkappa'_0} \left(1 + (1-\lambda\psi)f_0 + \frac{\lambda^2}{2}\right) \quad (83)$$

Надо помнить, что в данной записи мы в некотором смысле превышаем точность, т.к. \varkappa_0 содержит анизотропию, но при дальнейших разложениях это не сыграет никакой роли. Далее запишем полную систему уравнений РГ, учитывая нужный порядок ($O(f)$, $O(\lambda^2, \lambda f)$):

$$\frac{df_0}{d\Lambda} = -\frac{2}{d_c} f_0 + O(\lambda^2 f_0), \quad \frac{d\psi}{d\Lambda} = 0 + O(f_0^2), \quad \frac{d\lambda}{d\Lambda} = \left(-\frac{65}{27d_c} + \frac{2}{d_c} f_0\right) \lambda + \frac{11}{27d_c} \psi f_0 + O(\lambda^2 \psi f_0) \quad (84)$$

$$\frac{d \ln \varkappa_0}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} - \frac{50}{81d_c} \lambda^2 + \left(-\frac{2}{d_c} + \frac{100}{81d_c} \psi \lambda\right) f_0 + O(\lambda^2 f_0) \quad (85)$$

Затем аккуратно решаем данную систему (Приложение D.1) и получаем критическую температуру, которая определяется выражением: $\xi_x^2(T_{cr}^x, \Lambda \rightarrow \infty) = 0$, раскрывая $T f_0 =$

$\tilde{\tau}_0(1 + \lambda_0)/\tilde{\varkappa}_0(1 + \psi_0)$, разложившись можно получить:

$$T_{cr}^x(\tilde{\tau}_0) = \frac{8\pi B^2 \tilde{\varkappa}_0}{d_c^2} \left(1 - \lambda_0 + \frac{421}{552} \lambda_0^2\right) - \frac{\tilde{\tau}_0}{\tilde{\varkappa}_0} (1 + \lambda_0 - \psi_0) \quad (86)$$

$$T_{cr}^y(\tilde{\tau}_0) = \frac{8\pi \tilde{\varkappa}_0}{B^2 d_c^2} \left(1 - \lambda_0 + \frac{421}{552} \lambda_0^2\right) - \frac{\tilde{\tau}_0}{\tilde{\varkappa}_0} (1 + \lambda_0 - \psi_0) \quad (87)$$

Из этого выражения с нашей точностью можно получить несколько выводов:

1. Найдена поправка к критической температуре с точностью до λ_0^2 , $\psi_0^2 \ll 1$. Линейный порядок совпадает с [13] при $\tilde{\tau}_0 = 0$.
2. Получено, что в данном приближении поправка от беспорядка не зависит от γ , что, как кажется, является следствием внутренней симметрии задачи.
3. Связь с изотропным случаем [12] понятна:

$$\frac{T_{cr}(\tilde{\tau}_0 = 0)}{\varkappa_0} = \mathcal{T}_{cr} = \frac{8\pi}{d_c^2} = \frac{4\pi\eta}{d_c} \quad (88)$$

5.2 Критический беспорядок в случае слабой анизотропии

В случае сильного беспорядка задача значительно усложняется, потому что возникает перемешивание переменных в уравнениях ренорм-группы, которое мешает их просто решать. Поэтому пользуясь свойствами системы определим порядок, в котором будем все решать:

- Для простоты рассмотрим случай нулевой температуры, т.е. найдём критическое значение беспорядка. Для этого, чтобы избежать возникновения сингулярностей безразмерим $f_0 = \phi/T$, тогда запишем уравнение (82) в приближении нулевой температуры и слабой анизотропии:

$$\frac{d\xi_x^2}{d\Lambda} = -\frac{d_c}{4\pi B^2 \varkappa_0} \left(1 - \psi\lambda + \frac{3}{2}\lambda^2 + O(\psi\lambda^3)\right) \phi \quad (89)$$

Видно, что полученное выражение является точным вплоть до третьего порядка по анизотропии.

- Степени анизотропии в уравнениях РГ идут «шашечками» (Приложение С), поэтому, чтобы уловить первые поправки по анизотропии можно рассматривать второй порядок, т.к. в уравнениях на нулевую гармонику и на f_0 анизотропия возникает именно в таком приближении. В таком случае уравнения на четвертые гармоники беспорядка и изгибной жесткости можно решать в линейном приближении.
- Как было указано в главе 4.2 уравнения на λ , ψ в ведущем порядке в пределе $f_0 \rightarrow \infty$ являются константой по f_0 , следующие поправки будут вести себя как $1/f_0 \sim T$ и

выпадут в приближении нулевой температуры, в уравнении же на f_0 остаётся лишь линейный порядок по данной переменной.

С учетом вышесказанного, система уравнений принимает вид:

$$\frac{d\psi}{d\Lambda} = -\frac{5}{12d_c}\psi - \frac{5}{27d_c}\lambda + O(\delta\mathcal{K}^3), \quad \frac{d\lambda}{d\Lambda} = \frac{5}{27d_c}\psi - \frac{85}{108d_c}\lambda + O(\delta\mathcal{K}^3) \quad (90)$$

$$\frac{d\phi}{d\Lambda} = \frac{5}{81d_c}(3\lambda^2 - \lambda\psi - 2\psi^2)\phi, \quad \frac{d \ln \mathcal{K}_0}{d\Lambda} = \frac{1}{2d_c} + \frac{5}{27d_c}\lambda^2 - \frac{35}{81d_c}\lambda\psi + \frac{5}{54d_c}\psi^2 \quad (91)$$

Решая полученную систему (Приложение D.2), можно получить τ_{cr} , определённого из $\phi_0 = \tilde{\tau}_0(1 + \lambda_0)/\tilde{\mathcal{K}}_0(1 + \psi_0)$:

$$\tau_{cr}^x(T=0) = \frac{2\pi B^2 \tilde{\mathcal{K}}_0^2(1 - 2\lambda_0 + \psi_0)}{d_c^2} + \frac{\pi B^2 \tilde{\mathcal{K}}_0^2(1542739\lambda_0^2 - 1189036\lambda_0\psi_0 + 91715\psi_0^2)}{292008d_c^2} \quad (92)$$

$$\tau_{cr}^y(T=0) = \frac{2\pi \tilde{\mathcal{K}}_0^2(1 - 2\lambda_0 + \psi_0)}{B^2 d_c^2} + \frac{\pi \tilde{\mathcal{K}}_0^2(1542739\lambda_0^2 - 1189036\lambda_0\psi_0 + 91715\psi_0^2)}{292008B^2 d_c^2} \quad (93)$$

Также можно провести аналогию с изотропным случаем [12]:

$$\frac{\tau_{cr}(T=0)}{\mathcal{K}_0^2} = b_{cr} = \mathcal{B}_{cr} = \frac{2\pi}{d_c^2} = \frac{4\pi\eta'_\infty}{d_c} \quad (94)$$

5.3 Критический беспорядок на линии $\psi = \lambda$

Найдем поведение τ_{cr} на линии фиксированных точек $\lambda = \psi$. Запишем точные уравнения, которые мы использовали в 4.2 (63), а также получим уравнение на изотропную составляющую изгибной жесткости:

$$\frac{d\lambda}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c}F_4(\lambda, \lambda) - \frac{2}{d_c}\lambda F_0(\lambda, \lambda) = \frac{2}{d_c}g(\lambda), \quad g(\lambda) = F_4(\lambda)/3 - \lambda F_0(\lambda) \quad (95)$$

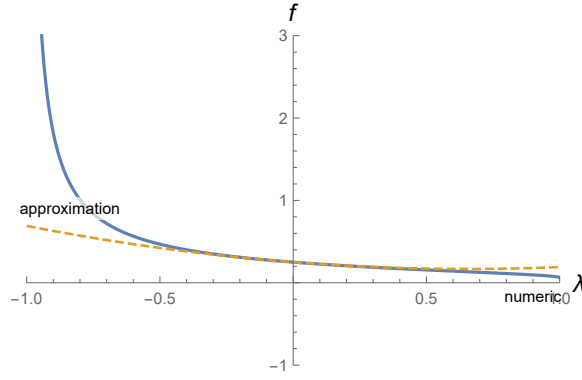
$$\frac{d \ln \tilde{\mathcal{K}}}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c}\chi(\lambda), \quad \chi(\lambda) = \frac{F_4(\lambda)/3 + F_0(\lambda)}{1 + \lambda}, \quad \frac{d\phi}{d\Lambda} = 0 \quad (96)$$

В этом приближении уравнение на фактор сжатия выглядит как:

$$\frac{d\xi_x^2}{d\Lambda} = -\frac{d_c}{4\pi B^2 \tilde{\mathcal{K}}} \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \phi_0, \quad \frac{d\xi_y^2}{d\Lambda} = -\frac{d_c B^2}{4\pi \tilde{\mathcal{K}}} \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \phi_0 \quad (97)$$

Которое имеет формальное решение в виде:

$$\xi_x^2 = 1 - \frac{d_c^2}{8\pi B^2 \tilde{\mathcal{K}}_0^2} \tau_0 \int_{\lambda_0}^0 \frac{d\tau}{g(\tau)} \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2} \exp \left[- \int_{\lambda_0}^{\tau} du \frac{\chi(u)}{g(u)} \right] \quad (98)$$

Рис. 12: Функция, определяющая τ_{cr}

Решая уравнение, определяющее критическое значение силы беспорядка ($\lambda \rightarrow 0$ из решений уравнений РГ 4.2):

$$\tau_{cr}^x(\lambda_0) = \frac{8\pi B^2 \tilde{\kappa}_0^2}{d_c^2} f(\lambda_0) = \frac{2\pi B^2 \tilde{\kappa}_0^2}{d_c^2} f^{cl}(\lambda_0), \quad f(\lambda_0) = \left[\int_{\lambda_0}^0 \frac{d\tau}{g(\tau)} \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2} \exp \left[- \int_{\lambda_0}^{\tau} du \frac{\chi(u)}{g(u)} \right] \right]^{-1} \quad (99)$$

$$\tau_{cr}^y(\lambda_0) = \frac{8\pi \tilde{\kappa}_0^2}{B^2 d_c^2} f(\lambda_0) = \frac{2\pi \tilde{\kappa}_0^2}{d_c^2 B^2} f^{cl}(\lambda_0) \quad (100)$$

$$f^{cl}(\lambda_0) \approx 1 - \lambda_0 + \frac{421}{552} \lambda_0^2, \quad |\lambda_0| \ll 1 \quad (101)$$

где $f^{cl}(\lambda_0)$ определена в [13]. Получилось, что наша задача свелась к чистому случаю [13] с точностью до коэффициента 1/4. Никакой параметрической малости критического беспорядка в таком случае не возникает.

5.4 Критический беспорядок в случае $\psi \neq \lambda$

Для начала запишем полную систему, которую мы будем решать (функции определены как в (63)):

$$\frac{d\lambda}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c} F_4(\lambda, \psi) - \frac{2}{d_c} \lambda F_0(\lambda, \psi), \quad \frac{d\psi}{d\Lambda} = \frac{2}{3d_c} \tilde{\Phi}_4(\lambda, \psi) - \frac{2}{d_c} \psi \tilde{\Phi}_0(\lambda, \psi) \quad (102)$$

$$\frac{d\phi}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} \phi \left(\tilde{\Phi}_0(\lambda, \psi) - F_0(\lambda, \psi) \right), \quad \frac{d \ln \kappa_0}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} F_0(\lambda, \psi) \quad (103)$$

По виду РГ 10 потока можно понять, что основной вклад будет из области $\lambda \sim 1$ там и будем проводить наше разложение. Пользуясь асимптотиками из главы C.3.1, получим систему уравнений в форме:

$$\frac{d\lambda}{d\Lambda} \approx -\frac{2}{d_c} \tilde{F}_0 \left(\frac{1}{3} + \lambda \right), \quad \frac{d\psi}{d\Lambda} \approx -\frac{2}{d_c} \frac{\tilde{\Phi}_0(1-\psi)}{1-\lambda} \left(\frac{1}{3} + \psi \right), \quad \frac{df_0}{d\Lambda} \approx \frac{2}{d_c} f_0 \frac{\tilde{\Phi}_0(1-\psi)}{1-\lambda} \quad (104)$$

где константы \tilde{F}_0 , $\tilde{\Phi}_0$ – константы, которые я буду находить численно. Перепишем уравнения для новой переменной $u = 1 - \lambda$ в ведущем порядке по u :

$$\frac{du}{d\Lambda} \approx \frac{8}{3d_c} \tilde{F}_0 \Rightarrow u = u_0 + \frac{8}{3d_c} \tilde{F}_0 \Lambda, \quad \frac{d\psi}{du} = -\frac{3}{4} \frac{\tilde{\Phi}_0}{\tilde{F}_0} \left(\frac{1}{3} + \psi \right) \frac{1 - \psi}{u}, \quad \frac{df_0}{du} \approx \frac{3}{4d_c} f_0 \frac{\tilde{\Phi}_0}{\tilde{F}_0} \frac{1 - \psi}{1 - \lambda} \quad (105)$$

Решая данную систему (Приложение D.3) получаем, с учётом $f_0/\varkappa_0 = b(1 + \lambda_0)^2/(1 + \psi_0)$:

$$b_{cr}^x = \frac{32\pi}{3d_c^2} \gamma \tilde{F}_0 (1 + \psi_0) \left[\int_{u_0}^1 du' \frac{f_0(u')}{\varkappa_0(u')} \frac{1 - \psi(u')}{u'^{3/2}} \right]^{-1} = \frac{32\pi}{3d_c^2} \gamma \tilde{F}_0 \frac{2^{-1-2\alpha} 3^{-1/2+\alpha} e^{-3u_0/4} u_0^\alpha (1 + \psi_0)}{(1 - \psi_0)(\Gamma(-1/2 + \alpha, 3u_0/4) - \Gamma(-1/2 + \alpha, 3/4))} \approx \frac{8\pi \gamma \tilde{F}_0}{3d_c^2} \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{1 + \psi_0}{1 - \psi_0} \sqrt{1 - \lambda_0} \quad (106)$$

где $\alpha = \tilde{\Phi}_0/\tilde{F}_0$ и использовано, что $\alpha < 1/2$, $u_0 \ll 1$.

Как видно беспорядок получается параметрически малым — ведет себя как $(1 - \lambda_0)^{1/2}$ при $\lambda_0 \sim 1$. Этот результат говорит о том, что в сильно анизотропном, свободно-подвешенном материале с орторомбической симметрией вида $\gamma^{(0)} = \Gamma^{(0)}$ (например, в материале с тетрагональной симметрией TeSl [8]), при низкой температуре можно наблюдать переход в трубчатую фазу, если достаточно исказить его поверхность.

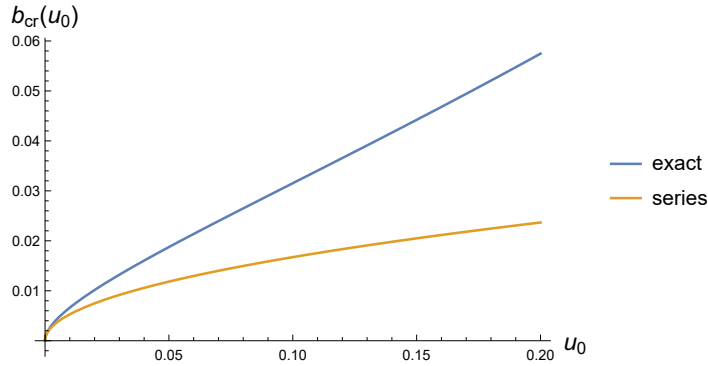


Рис. 13: Критический беспорядок как функция $u_0 = 1 - \lambda_0$, $d_c = 1000$, $\psi_0 = -0.99$, $\lambda_0 = 0.99$, $f_0 = 200$, $\alpha = 0.1569$

6 Заключение

На основе [9], [13] была построена теория аномальной упругости в универсальном режиме (сильное взаимодействие изгибных фононных мод) для двумерных мембран с орторомбической кристаллической симметрией и случайной кривизной, вызванной наличием дефектов. С помощью метода реплик было получено усредненное по беспорядку эффективное действие, используя которое были получены однопетлевые (в первом порядке по $1/d_c$) поправки к собственно-энергетической функции, которые содержат логарифмические инфракрасные расходимости, что позволяет использовать формализм ренормализационной группы для исследования перенормировок констант связи. Была получена и проанализирована система нелинейных РГ уравнений. Основными результатами данного анализа явились:

1. Критические экспоненты, которые описывают скейлинг констант связи (амплитуд угловых гармоник изгибной жесткости) в разных режимах.
2. Для общего случая орторомбической симметрии была доказана устойчивость чистых, анизотропных фаз, характеризующихся параметрами тетрагональности γ , Γ .
3. Также для некоторых простых случаев были найдены решения системы уравнений РГ, описывающие поведение соответствующих констант связи.

Также для симметричного случая $\Gamma = \gamma$ был исследован переход в трубчатую фазу. Было получено, что критический беспорядок, определяющий переход, может быть параметрически малым для сильно анизотропных материалов, что говорит о том, что при низких температурах плоская фаза является неустойчивой относительно слабого беспорядка.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-52-12019.

А Усреднение по беспорядку

Усредним теперь $\exp(-\mathcal{F}_0^{rep}/T)$ с учетом (6):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \frac{1}{2T} \left[\varkappa_{\alpha\beta}^{(0)} (\nabla_{\alpha}^2 h_i^n + \zeta_i^{\alpha}) (\nabla_{\beta}^2 h_i^n + \zeta_i^{\beta}) \right] + \frac{1}{2} \zeta_j^{\alpha} A_{\alpha\beta}^{-1} \zeta_j^{\beta} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2T} \varkappa_{\alpha\beta}^{(0)} \nabla_{\alpha}^2 h_i^n \nabla_{\beta}^2 h_i^n + \\
 & \quad + \frac{\varkappa_{\alpha\beta}^{(0)}}{2T} \zeta_i^{\alpha} \sum_{n=1}^N \nabla_{\beta}^2 h_i^n + \frac{\varkappa_{\alpha\beta}^{(0)}}{2T} \zeta_i^{\beta} \sum_{n=1}^N \nabla_{\alpha}^2 h_i^n + \frac{1}{2} \zeta_j^{\alpha} \left(\frac{N \varkappa_{\alpha\beta}^{(0)}}{T} + A_{\alpha\beta}^{-1} \right) \zeta_j^{\beta} = \\
 & = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2T} \varkappa_{\alpha\beta}^{(0)} \nabla_{\alpha}^2 h_i^n \nabla_{\beta}^2 h_i^n + \zeta_i^{\alpha} J_i^{\alpha} + \frac{1}{2} \zeta_j^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta} \zeta_j^{\beta}; \quad J_i^{\alpha} = \frac{\varkappa_{\alpha\beta}^{(0)}}{T} \sum_{n=1}^N \nabla_{\beta}^2 h_i^n, \quad \Lambda_{\alpha\beta} = \frac{N \varkappa_{\alpha\beta}^{(0)}}{T} + A_{\alpha\beta}^{-1}
 \end{aligned} \tag{107}$$

Берем континуальный интеграл по полю беспорядка и получаем:

$$\begin{aligned}
 & \exp \left(- \int d^2 \mathbf{x} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2T} \varkappa_{\alpha\beta}^{(0)} \nabla_{\alpha}^2 h_i^n \nabla_{\beta}^2 h_i^n \right) \int \mathcal{D}\zeta^x \mathcal{D}\zeta^y \exp \left(- \int d^2 \mathbf{x} \left[\zeta_i^{\alpha} J_i^{\alpha} + \frac{1}{2} \zeta_j^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta} \zeta_j^{\beta} \right] \right) = \\
 & \quad \exp \left(- \int d^2 \mathbf{x} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2T} \varkappa_{\alpha\beta}^{(0)} \nabla_{\alpha}^2 h_i^n \nabla_{\beta}^2 h_i^n \right) \exp \left(\frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} J_i^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^{-1} J_i^{\beta} \right) \tag{108}
 \end{aligned}$$

Стоит выписать полученную матрицу в явном виде:

$$\hat{\varkappa} = \varkappa_{\alpha\beta}^{(0)} - \mathcal{K}_{\alpha\beta} \hat{J} \tag{109}$$

Где матрица $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ (где уже взят предел $N \rightarrow 0$):

$$\mathcal{K}_{xx} = \frac{b_{xx} \varkappa_{xx}^2 + 2b_{xy} \varkappa_{xx} \varkappa_{xy} + b_{yy} \varkappa_{xy}^2}{T}, \quad \mathcal{K}_{xy} = \frac{b_{xx} \varkappa_{xx} \varkappa_{xy} + b_{yy} \varkappa_{xy} \varkappa_{yy} + b_{xy} (\varkappa_{xy}^2 + \varkappa_{yy} \varkappa_{xx})}{T} \tag{110}$$

$$\mathcal{K}_{yy} = \frac{b_{yy} \varkappa_{yy}^2 + 2b_{xy} \varkappa_{yy} \varkappa_{xy} + b_{xx} \varkappa_{xy}^2}{T} \tag{111}$$

Продемонстрирую вывод амплитуд гармоник:

$$\varkappa(\theta_k) = \varkappa_{xx} \cos^4(\theta_k) + 2\varkappa_{xy} \cos^2(\theta_k) \sin^2(\theta_k) + \varkappa_{yy} \sin^4(\theta_k) \tag{112}$$

Пользуясь тригонометрическими формулами:

$$\begin{aligned}
 \varkappa_{xx} \cos^4(\theta_k) &= \varkappa_{xx} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_k + \frac{1}{8} \cos 4\theta_k \right), \quad \varkappa_{yy} \sin^4(\theta_k) = \varkappa_{yy} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\theta_k + \frac{1}{8} \cos 4\theta_k \right) \\
 \varkappa_{xy} \cos^2(\theta_k) \sin^2(\theta_k) &= \varkappa_{xy} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4\theta_k \right)
 \end{aligned}$$

Откуда видно, что в разложении участвуют вторая и четвертая гармоники. Записывая каждую капшу как линейную комбинацию гармоник и решая полученную систему уравне-

ний нетрудно получить (15) из основного текста. Запишем вид амплитуд угловых гармоник через компоненты матриц:

$$\varkappa_0 = \frac{3\varkappa_{xx} + 2\varkappa_{xy} + 3\varkappa_{yy}}{8}, \quad \delta\varkappa_2 = \frac{\varkappa_{xx} - \varkappa_{yy}}{2}, \quad \delta\varkappa_4 = \frac{\varkappa_{xx} - 2\varkappa_{xy} + \varkappa_{yy}}{8} \quad (113)$$

Как уже было сказано выше у матрицы $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ структура совпадает, поэтому несложно написать:

$$\mathcal{K}_0 = \frac{3\mathcal{K}_{xx} + 2\mathcal{K}_{xy} + 3\mathcal{K}_{yy}}{8}, \quad \delta\mathcal{K}_2 = \frac{\mathcal{K}_{xx} - \mathcal{K}_{yy}}{2}, \quad \delta\mathcal{K}_4 = \frac{\mathcal{K}_{xx} - 2\mathcal{K}_{xy} + \mathcal{K}_{yy}}{8} \quad (114)$$

В Диаграммы линейного приближения

В.1 Поляризационный пузырь

Рассмотрим диаграмму 4(a):

$$\begin{aligned} \Pi_q &= \frac{d_c}{T} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} G_0^{nm}(\mathbf{k}) G_0^{nm}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) = d_c T \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} \frac{(\varkappa_0^{-1})^{mn}}{k^4} \frac{(\varkappa_0^{-1})^{mn}}{|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^4} = \\ &= \frac{d_c T}{\varkappa_0^2} [(1 + 2f)\delta^{nm} + f^2 J^{nm}] I(\mathbf{q}); \quad f = \frac{\mathcal{K}_0^*}{\varkappa_0} = \frac{4b_0\varkappa_0}{T} \end{aligned}$$

$$I(\mathbf{q}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} \frac{1}{k^4} \frac{1}{|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^4} = \frac{1}{2\pi q^4} \int \frac{dk}{k^3} \int \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^4} = \frac{3}{16\pi q^4} \int \frac{dk}{k^3} \min[k^4, q^4] = \frac{3}{16\pi q^2}$$

Получаем:

$$\Pi_q^{nm} = \frac{3d_c T}{16\pi \varkappa_0^2 q^2} [(1 + 2f)\delta^{nm} + f^2 J^{nm}] \quad \Rightarrow \quad (\Pi_q^{-1})^{nm} = \frac{16\pi \varkappa_0^2 q^2}{3d_c T(1 + 2f)} \left[\delta^{nm} - \frac{f^2}{1 + 2f} J^{nm} \right]$$

Тогда запишем экранированное взаимодействие:

$$\frac{\mathcal{J}_q^{nm}}{2} = \frac{Y_q}{2} (1 + Y_q \Pi_q^{nm} / 2)^{-1} = Y_q \frac{q^2}{q^2 + q_*^2} \left[\delta^{nm} + \left(\frac{q^2}{q^2 + q_*^2} - 1 \right) \frac{f^2}{1 + 2f} J^{nm} \right] \quad (115)$$

$$q_*^2 = \frac{3d_c T}{16\pi \varkappa_0^2} \frac{Y_q}{2} (1 + 2f) \sim \frac{3d_c T}{16\pi \varkappa_0^2} \frac{Y_q}{2}$$

Считая $q_* \gg q$ получаем:

$$\mathcal{J}_q^{nm} = \frac{32\pi \varkappa_0^2 q^2}{3d_c T(1 + 2f)} \left[\delta^{nm} - \frac{f^2}{1 + 2f} J^{nm} \right] = 2(\Pi_q^{-1})^{nm} \quad (116)$$

Как видно, экранированное взаимодействие перестает зависеть от голого значения модуля Юнга.

В.2 Поправка к собственнно-энергетической функции в нулевом порядке по анизотропии

Рассмотрим диаграмму 4(b):

$$\begin{aligned}
 - \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} \mathcal{J}_q^{nm} G_0^{nm}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) &= - \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} \frac{32\pi \varkappa_0^2 q^2}{3d_c T(1+2f)} [\delta^{nm} - \gamma J^{nm}] \frac{T(\delta^{nm} + f J^{nm})}{\varkappa_0 |\mathbf{q} - \mathbf{k}|^4} = \\
 &= - \frac{16\varkappa_0}{3d_c(1+2f)^2} ((1+3f+f^2)\delta^{nm} - f^3 J^{nm}) \int d\mathbf{q} \frac{1}{q} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^4}
 \end{aligned}$$

Последний интеграл по углу берется аналогично интегралу выше, а интеграл по модулю волнового вектора логарифмически расходится на больших волновых векторах (на малых он ограничен областью в функции \min) и подлежит ультрафиолетовой обрезке на обратной длине Гинзбурга, тогда получается ответ:

$$\boxed{\Sigma^{(0)} = - \frac{2\varkappa_0 (1+3f+f^2)\delta^{nm} - f^3 J^{nm}}{d_c (1+2f)^2} k^4 \ln\left(\frac{q_*}{k}\right)} \quad (117)$$

В.3 Поправки к собственнно-энергетической функции в первом порядке по анизотропии

Рассмотрим диаграмму 5(a):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} \mathcal{J}_q^{nm} G_0^{nn'}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) V^{n'm'}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) G_0^{m'm}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) &= \\
 \frac{1}{T} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} \frac{32\pi \varkappa_0^2 q^2}{3d_c T(1+2f)} \left[\delta^{nm} - \frac{f^2}{1+2f} J^{nm} \right] \frac{T(\delta^{m'm} + f J^{m'm})}{\varkappa_0 |\mathbf{q} - \mathbf{k}|^4} \frac{T(\delta^{nn'} + f J^{nn'})}{\varkappa_0 |\mathbf{q} - \mathbf{k}|^4} |\mathbf{q} - \mathbf{k}|_\alpha^2 |\mathbf{q} - \mathbf{k}|_\beta^2 \times \\
 &\quad \times (\delta \varkappa_{\alpha\beta} \delta^{n'm'} - \delta \mathcal{K}_{\alpha\beta} J^{n'm'})
 \end{aligned}$$

Матричное произведение даст вклад вида:

$$\begin{aligned}
 \left[\delta^{nm} - \frac{f^2}{1+2f} J^{nm} \right] (\delta^{m'm} + f J^{m'm}) (\delta^{nn'} + f J^{nn'}) (\delta \varkappa_{\alpha\beta} |\mathbf{q} - \mathbf{k}|_\alpha^2 |\mathbf{q} - \mathbf{k}|_\beta^2 \delta^{n'm'} - \\
 \delta \mathcal{K}_{\alpha\beta} |\mathbf{q} - \mathbf{k}|_\alpha^2 |\mathbf{q} - \mathbf{k}|_\beta^2 J^{n'm'}) = (\beta + \alpha(1+2f) - \gamma\alpha) \delta^{nm} - \gamma(\beta + 2f\alpha) J^{nm}
 \end{aligned}$$

Интегралы я считаю с логарифмической точностью, потому что именно так мы получаем ведущую инфракрасную асимптотику. После взятия интегралов по модулю волнового вектора и по углам получаем результат:

$$\boxed{\Sigma_1^{(1)} = \frac{1}{24d_c(1+2f)} \left(\delta^{nm} \sigma_1^{(1)}(\theta_k) + J^{nm} \sigma_2^{(1)}(\theta_k) \right) k^4 \ln\left(\frac{q_*}{k}\right)} \quad (118)$$

Выпишу коэффициенты в явном виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(1)} = & \left[\delta \mathcal{K}_{xx} \left(1 + 2f - \frac{f^2}{1+2f} \right) - \delta \mathcal{K}_{xx} \right] (18 - 16 \cos 2\theta_k + \cos 4\theta_k) + 2 \left[\delta \mathcal{K}_{xy} \left(1 + 2f - \frac{f^2}{1+2f} \right) - \right. \\ & \left. \delta \mathcal{K}_{xy} \right] \times (6 - \cos 4\theta_k) + \left[\delta \mathcal{K}_{yy} \left(1 + 2f - \frac{f^2}{1+2f} \right) - \delta \mathcal{K}_{yy} \right] (18 + 16 \cos 2\theta_k + \cos 4\theta_k) \quad (119) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^{(1)} = & -\frac{f^2}{1+2f} \left([-\delta \mathcal{K}_{xx} + 2f \delta \mathcal{K}_{xx}] (18 - 16 \cos 2\theta_k + \cos 4\theta_k) + 2 [-\delta \mathcal{K}_{xy} + 2f \delta \mathcal{K}_{xy}] (6 - \cos 4\theta_k) + \right. \\ & \left. + [-\delta \mathcal{K}_{yy} + 2f \delta \mathcal{K}_{yy}] (18 + 16 \cos 2\theta_k + \cos 4\theta_k) \right) \quad (120) \end{aligned}$$

Рассмотрим диаграмму 5(b):

$$-\frac{2d_c}{2T^2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} \frac{[\mathbf{p} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} \mathcal{J}_q^{nn'} \mathcal{J}_q^{mm'} V_p^{n''m''} G_0^{nm}(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) G_0^{n'm'}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|) G_0^{m'n''}(p) G_0^{m''m'}(p) \quad (121)$$

Начнем с матриц:

$$\begin{aligned} & \left(\delta^{nn'} - \gamma J^{nn'} \right) \left(\delta^{mm'} - \gamma J^{mm'} \right) \left(\alpha \delta^{n''m''} + \beta J^{n''m''} \right) \left(\delta^{nm} + f J^{nm} \right) \left(\delta^{n'm'} + f J^{n'm'} \right) \times \\ & \left(\delta^{n'n''} + f J^{n'n''} \right) \times \left(\delta^{m'm''} + f J^{m'm''} \right) = [(\alpha + \beta + 3\alpha f)(1 - 2\gamma) + f(\alpha + 2\beta + 5\alpha f)] \delta^{nm} + \\ & [f^2(\beta + 2\alpha f) - 2\gamma f(\alpha + \beta + 3\alpha f)] J^{nm} \quad (122) \end{aligned}$$

После взятия интегралов по модулю и углам с логарифмической точностью получаем:

$$\begin{aligned} xx : \frac{162 + 36 \cos 2\theta_k - \cos 4\theta_k}{3072} &= \frac{1}{3072} \sigma_{xx}^{(2)}(\theta_k); \quad yy : \frac{162 - 36 \cos 2\theta_k - \cos 4\theta_k}{3072} = \frac{1}{3072} \sigma_{yy}^{(2)}(\theta_k) \\ xy : \frac{54 + \cos 4\theta_k}{3072} &= \frac{1}{3072} \sigma_{xy}^{(2)}(\theta_k) \end{aligned}$$

Тогда несложно понять простые замены в $\mathcal{A}^{nm}(\theta_k)$:

$$\begin{aligned} \alpha' &\mapsto (\delta \mathcal{K}_{xx} \sigma_{xx}^{(2)}(\theta_k) + 2\delta \mathcal{K}_{xy} \sigma_{xy}^{(2)}(\theta_k) + \delta \mathcal{K}_{yy} \sigma_{yy}^{(2)}(\theta_k)) \\ \beta' &\mapsto -(\delta \mathcal{K}_{xx} \sigma_{xx}^{(2)}(\theta_k) + 2\delta \mathcal{K}_{xy} \sigma_{xy}^{(2)}(\theta_k) + \delta \mathcal{K}_{yy} \sigma_{yy}^{(2)}(\theta_k)) \end{aligned}$$

Запишем тогда ответ на диаграмму:

$$\boxed{\Sigma_2^{(1)} = -\frac{1}{108d_c(1+2f)^2} \mathcal{A}^{nm}(\theta_k) k^4 \ln\left(\frac{q_*}{k}\right)} \quad (123)$$

Определяя матрицу в виде:

$$\mathcal{A}_{\theta_k}^{nm} = [(\alpha' + \beta' + 3\alpha' f)(1 - 2\gamma) + f(\alpha' + 2\beta' + 5\alpha' f)] \delta^{nm} + [f^2(\beta' + 2\alpha' f) - 2\gamma f(\alpha' + \beta' + 3\alpha' f)] J^{nm}$$

Для получения уравнений РГ нужно переписать поправки в терминах амплитуд угловых гармоник. После некоторого вычисления, пользуясь формулой (15) можно получить:

$$\Sigma^{(1)} = \frac{1}{d_c} \left[\left(2\mathcal{L}_0 + \frac{2}{3}\mathcal{L}_2 \cos 2\theta_k + \frac{1}{27}\mathcal{L}_4 \cos 4\theta_k \right) \delta^{nm} - \left(2\mathcal{T}_0 + \frac{2}{3}\mathcal{T}_2 \cos 2\theta_k + \frac{1}{27}\mathcal{T}_4 \cos 4\theta_k \right) J^{nm} \right] k^4 \Lambda \quad (124)$$

Где функции определены в виде:

$$\frac{2}{d_c} \frac{1+4f}{(1+2f)^3} \delta T_0 = \frac{2}{d_c} \mathcal{L}_0$$

$$\frac{2}{3d_c} \frac{1}{(1+2f)^3} \left(-(3+18f+33f^2+16f^3)\delta\mathcal{L}_2 + (3+12f+10f^2)\delta T_2 \right) \cos 2\theta_k = \frac{2}{3d_c} \mathcal{L}_2 \cos 2\theta_k$$

$$\frac{1}{27d_c} \frac{1}{(1+2f)^3} \left((11+66f+121f^2+62f^3)\delta\mathcal{L}_4 - (11+44f+40f^2)\delta T_4 \right) \cos 4\theta_k = \frac{1}{27d_c} \mathcal{L}_4 \cos 4\theta_k$$

Затем аналогично запишем все вклады перед J^{nm} :

$$\frac{2}{d_c} \frac{f^2(3+2f)}{(1+2f)^3} \delta T_0 = -\frac{2}{d_c} \mathcal{T}_0$$

$$\frac{2}{3d_c} \frac{1}{(1+2f)^3} \left((4f^3+10f^4)\delta\mathcal{L}_2 - (f^2+4f^3)\delta T_2 \right) \cos 2\theta_k = -\frac{2}{3d_c} \mathcal{T}_2 \cos 2\theta_k$$

$$\frac{1}{27d_c} \frac{1}{(1+2f)^3} \left(-(18f^3+40f^4)\delta\mathcal{L}_4 + (7f^2+18f^3)\delta T_4 \right) \cos 4\theta_k = -\frac{1}{27d_c} \mathcal{T}_4 \cos 4\theta_k$$

Именно в такой форме она будет использована для решения уравнения Дайсона (26).

С Диаграммы для произвольной анизотропии

С.1 Поляризационный оператор

Рассмотрим диаграмму 8(a). Запишем аналитическое выражение:

$$\hat{\Pi}(\mathbf{q}) = \frac{d_c}{3T} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \hat{G}(-\mathbf{k}) \hat{G}(\mathbf{k}+\mathbf{q}) \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} = \frac{d_c T}{q^2} \mathcal{P}(\theta_q) \quad (125)$$

$$\hat{\mathcal{P}}(\theta_q) = \frac{1}{3} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^2} \frac{\left(1 + f(\theta_{-k}) + f(\theta_{k+q}) + f(\theta_{-k})f(\theta_{k+q}) \hat{J} \right)}{(\mathbf{k}+\mathbf{q})^4 \mathcal{L}^{(0)}(\theta_{k+q}) k^4 \mathcal{L}^{(0)}(\theta_{-k})} \quad (126)$$

Для удобства дальнейших вычислений разобьем эту функцию на 4 составляющих:

$$\mathcal{P}_0(\theta_q) = \frac{1}{3} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^2} \frac{1}{(\mathbf{k}+\mathbf{q})^4 \mathcal{L}^{(0)}(\theta_{k+q}) k^4 \mathcal{L}^{(0)}(\theta_{-k})}$$

$$\mathcal{P}_{11}(\theta_q) = \frac{1}{3} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^2} \frac{f(\theta_{-k})}{(\mathbf{k}+\mathbf{q})^4 \mathcal{L}^{(0)}(\theta_{k+q}) k^4 \mathcal{L}^{(0)}(\theta_{-k})}$$

$$\mathcal{P}_{12}(\theta_q) = \frac{1}{3} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^2} \frac{f(\theta_{k+q})}{(\mathbf{k} + \mathbf{q})^4 \varkappa^{(0)}(\theta_{k+q}) k^4 \varkappa^{(0)}(\theta_{-k})}$$

$$\mathcal{P}_2(\theta_q) = \frac{1}{3} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^2} \frac{f(\theta_{k+q}) f(\theta_{-k})}{(\mathbf{k} + \mathbf{q})^4 \varkappa^{(0)}(\theta_{k+q}) k^4 \varkappa^{(0)}(\theta_{-k})} \Rightarrow \hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{12} + \mathcal{P}_2 \hat{J}$$

Нетрудно заметить, что заменой вида $\mathbf{k} = -\mathbf{k} - \mathbf{q}$ можно получить, что

$$\mathcal{P}_{12}(\theta_q) = \mathcal{P}_{11}(\theta_q) \quad (127)$$

Теперь было бы неплохо максимально обезразмерить интегралы. Для этого сначала обезразмерим все функции углов:

$$\varkappa^{(0)}(\theta_k) = \varkappa'_0 \left(1 + \frac{\delta \varkappa'_4}{\varkappa'_0} \cos 4\theta_k \right) = \varkappa'_0 (1 + \lambda \cos 4\theta_k) \quad (128)$$

$$f(\theta_k) = f_0 \frac{1 + \delta \mathcal{K}'_4 / \mathcal{K}'_0 \cos 4\theta_k}{1 + \delta \varkappa'_4 / \varkappa'_0 \cos 4\theta_k} = f_0 \frac{1 + \psi \cos 4\theta_k}{1 + \lambda \cos 4\theta_k} \quad (129)$$

Теперь запишем простые соотношения на сами скалярные произведения и на косинусы углов от суммы векторов:

$$(\mathbf{k} + \mathbf{q})^4 = (k^2 + 2kq \cos \theta_{kq} + q^2)^2 = q^4 ((k/q)^2 + 2k/q \cos 2\theta_{kq} + 1)^2 = q^4 (\xi^2 + 2\xi \cos \theta_{kq} + 1)^2$$

Распишем покомпонентно:

$$k_x + q_x = k \cos \theta_k + q \cos \theta_q = |\mathbf{k} + \mathbf{q}| \frac{k \cos \theta_k + q \cos \theta_q}{(k^2 + 2kq \cos \theta_{kq} + q^2)^{1/2}}$$

$$k_y + q_y = k \sin \theta_k + q \sin \theta_q = |\mathbf{k} + \mathbf{q}| \frac{k \sin \theta_k + q \sin \theta_q}{(k^2 + 2kq \cos \theta_{kq} + q^2)^{1/2}}$$

$$\cos \theta_{k+q} = \frac{\xi \cos \theta_k + \cos \theta_q}{(\xi^2 + 2\xi \cos \theta_{kq} + 1)^{1/2}}, \quad \sin \theta_{k+q} = \frac{\xi \sin \theta_k + \sin \theta_q}{(\xi^2 + 2\xi \cos \theta_{kq} + 1)^{1/2}}$$

Теперь запишем все полученное вместе, заменяя интегрирование по модулю на интегрирование по обезразмеренному модулю:

$$\mathcal{P}_0(\theta_q) = \frac{1}{3} \frac{1}{\varkappa_0^2} \int \frac{d\xi \xi}{2\pi} \oint \frac{d\theta_k}{2\pi} \frac{\sin^4 \theta_{kq}}{(\xi^2 + 2\xi \cos \theta_{kq} + 1)^2} \frac{1}{(1 + \lambda \cos 4\theta_{k+q}) (1 + \lambda \cos 4\theta_{-k})} = \frac{1}{\varkappa_0^2} \pi_0(\theta_q) \quad (130)$$

$$\mathcal{P}_{11}(\theta_q) = \frac{1}{3} \frac{f_0}{\varkappa_0^2} \int \frac{d\xi \xi}{2\pi} \oint \frac{d\theta_k}{2\pi} \frac{\sin^4 \theta_{kq}}{(\xi^2 + 2\xi \cos \theta_{kq} + 1)^2} \frac{1 + \psi \cos 4\theta_{-k}}{(1 + \lambda \cos 4\theta_{k+q}) (1 + \lambda \cos 4\theta_{-k})^2} = \frac{f_0}{\varkappa_0^2} \pi_{11}(\theta_q) \quad (131)$$

$$\mathcal{P}_{12}(\theta_q) = \frac{1}{3} \frac{f_0}{\varkappa_0^2} \int \frac{d\xi \xi}{2\pi} \oint \frac{d\theta_k}{2\pi} \frac{\sin^4 \theta_{kq}}{(\xi^2 + 2\xi \cos \theta_{kq} + 1)^2} \frac{1 + \psi \cos 4\theta_{k+q}}{(1 + \lambda \cos 4\theta_{k+q})^2 (1 + \lambda \cos 4\theta_{-k})} = \frac{f_0}{\varkappa_0^2} \pi_{12}(\theta_q) \quad (132)$$

$$\mathcal{P}_2(\theta_q) = \frac{1}{3} \frac{f_0^2}{\varkappa_0^2} \int \frac{d\xi \xi}{2\pi} \oint \frac{d\theta_k}{2\pi} \frac{\sin^4 \theta_{kq}}{(\xi^2 + 2\xi \cos \theta_{kq} + 1)^2} \frac{(1 + \psi \cos 4\theta_{k+q})(1 + \psi \cos 4\theta_{-k})}{(1 + \lambda \cos 4\theta_{k+q})^2 (1 + \lambda \cos 4\theta_{-k})^2} = \frac{f_0^2}{\varkappa_0^2} \pi_2(\theta_q) \quad (133)$$

Нетрудно получить соотношение между π_{11} и π_0 :

$$\pi_{11} = \pi_{12} = \pi_1 = \pi_0 - \frac{\psi - \lambda}{2} \frac{\partial \pi_0}{\partial \lambda} \quad (134)$$

Теперь запишем решение уравнения Дайсона на экранированное взаимодействие:

$$\tilde{\mathcal{J}}^{nm} = \tilde{Y}_0 \left(1 + 3\tilde{Y}_0 \Pi^{nm} / 2 \right)^{-1} \approx \boxed{\frac{2q^2}{3d_c T} (\mathcal{P}^{nm}(\theta_q))^{-1}} \quad (135)$$

Как и оказалось, это выражение не зависит от голого значения анизотропного модуля Юнга.

С.2 Поправка к собственно-энергетической функции

Рассмотрим диаграмму 8(b). Запишем аналитическое выражение:

$$\begin{aligned} \Sigma_k^{nm} &= -\frac{1}{T} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^4} G^{nm}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{\mathcal{J}}^{nm}(\mathbf{q}) = \\ &= -\frac{2}{3d_c T} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{q^2} \frac{(1 + f(\theta_{k-q}) J^{nm}) (\mathcal{P}^{nm}(\theta_q))^{-1}}{|\mathbf{k} - \mathbf{q}|^4 \varkappa^{(0)}(\theta_{k-q})} \end{aligned}$$

Сначала возьмём интеграл по модулю волнового вектора. Он расходится логарифмически, поэтому, как обычно, обрежем его на векторе Гинзбурга:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{q k^4 q^4 \sin^4 \theta_{kq}}{q^2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^4} \approx \int_0^{q_*} \frac{dq}{2\pi} \frac{q k^4 q^4 \sin^4 \theta_{kq}}{q^2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^4} \approx \frac{k^4 \sin^4 \theta_{kq}}{2\pi} \ln \left(\frac{q_*}{k} \right)$$

Вернёмся к интегралу по углу:

$$-\frac{2}{3d_c T} \frac{1}{2\pi} k^4 \ln \left(\frac{q_*}{k} \right) \oint \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{\sin^4 \theta_{kq}}{\varkappa^{(0)}(\theta_{k-q})} (1 + f(\theta_{k-q}) \hat{J}) \hat{\mathcal{P}}^{-1}(\theta_q)$$

Сделаем приближение, основанное на предположении, что $q_* \gg k$: $\theta_{k-q} \rightarrow \pi - \theta_q$, $\theta_k \rightarrow 0$, а также:

$$\begin{aligned} \sin^4 \theta_{k-q} &= \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2\theta_k \cos 2\theta_q - \cancel{4 \sin 2\theta_k \sin 2\theta_q} + \cos 4\theta_k \cos 4\theta_q + \cancel{\sin 4\theta_k \sin 4\theta_q}) \approx \\ &= \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2\theta_k \cos 2\theta_q + \cos 4\theta_k \cos 4\theta_q) \end{aligned}$$

Тогда, полученный интеграл запишется в виде:

$$-\frac{1}{24\pi d_c T} k^4 \ln \left(\frac{q_*}{k} \right) \oint \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{(1 + f(\pi - \theta_q) \hat{J}) \hat{\mathcal{P}}^{-1}(\theta_q)}{\varkappa^{(0)}(\pi - \theta_q)} (3 - 4 \cos 2\theta_k \cos 2\theta_q + \cos 4\theta_k \cos 4\theta_q) \quad (136)$$

Для дальнейшего нужно обратить матрицу \mathcal{P} :

$$\hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{\varkappa_0^2} \pi_0(\theta_q) + \frac{f_0}{\varkappa_0^2} \pi_{11}(\theta_q) + \frac{f_0}{\varkappa_0^2} \pi_{13}(\theta_q) + \frac{f_0^2}{\varkappa_0^2} \pi_2(\theta_q) \hat{j} = \frac{1}{\varkappa_0^2} \left(\pi_0(\theta_q) + f_0(\pi_{11}(\theta_q) + \pi_{12}(\theta_q)) + f_0^2 \pi_2(\theta_q) \hat{j} \right)$$

Тогда по правилам обращения репличных матриц:

$$\hat{\mathcal{P}}^{-1} = \frac{\varkappa_0^2}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \left(1 - \frac{f_0^2 \pi_2}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \hat{j} \right)$$

Сосчитаем матричный кусок:

$$\hat{\mathcal{P}}^{-1}(1 + f(\theta_{k-q}) \hat{j}) = \frac{\varkappa_0^2}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \left(1 + f(\pi - \theta_q) - \frac{f_0^2 \pi_2}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} - \frac{f_0^2 \pi_2 f(\pi - \theta_q)}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \hat{j} \right)$$

Тогда, пользуясь определениями (129) и (128), а также угловой симметрией получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_k = & -\frac{\varkappa_0}{24\pi d_c T} k^4 \ln\left(\frac{q_*}{k}\right) \oint \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{1}{1 + \lambda \cos 4\theta_q} \frac{1}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \left(1 + f_0 \frac{1 + \psi \cos 4\theta_q}{1 + \lambda \cos 4\theta_q} - \right. \\ & \left. \frac{f_0^2 \pi_2}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} - \frac{f_0^3 \pi_2}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \frac{1 + \psi \cos 4\theta_q}{1 + \lambda \cos 4\theta_q} \hat{j} \right) (3 - 4 \cos 2\theta_k \cos 2\theta_q + \cos 4\theta_k \cos 4\theta_q) \end{aligned} \quad (137)$$

С.2.1 Уравнения РГ в первом порядке по $1/d_c$

Перепишем теперь выражение для собственно-энергетической функции с учётом полученного выше:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_k = & -\frac{\varkappa_0}{24\pi d_c T} k^4 \ln\left(\frac{q_*}{k}\right) \oint \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{1}{1 + \lambda \cos 4\theta_q} \frac{1}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \left(1 + f_0 \frac{1 + \psi \cos 4\theta_q}{1 + \lambda \cos 4\theta_q} - \right. \\ & \left. \frac{f_0^2 \pi_2}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} - \frac{f_0^3 \pi_2}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \frac{1 + \psi \cos 4\theta_q}{1 + \lambda \cos 4\theta_q} \hat{j} \right) (3 + \cos 4\theta_k \cos 4\theta_q) \end{aligned}$$

Разобьём эту функцию на несколько частей, каждая из которых ответственна за соответствующую гармонику. Запишем их, для этого введем функцию:

$$\kappa(\alpha, \theta_q) = 1 + \alpha \cos 4\theta_q$$

$$\Sigma_{\varkappa_0} = -\frac{\varkappa_0}{8\pi d_c T} \left(k^4 \ln\left(\frac{q_*}{k}\right) \right) \oint \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{1}{\kappa(\lambda, \theta_q)} \frac{1}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \left(1 + f_0 \frac{\kappa(\psi, \theta_q)}{\kappa(\lambda, \theta_q)} - \frac{f_0^2 \pi_2}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \right)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\delta\varkappa_4} = & -\frac{\varkappa_0}{24\pi d_c T} \left(k^4 \ln\left(\frac{q_*}{k}\right) \right) \cos 4\theta_k \oint \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{\cos 4\theta_q}{\kappa(\lambda, \theta_q)} \frac{1}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \left(1 + f_0 \frac{\kappa(\psi, \theta_q)}{\kappa(\lambda, \theta_q)} - \right. \\ & \left. \frac{f_0^2 \pi_2}{\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12})} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{\kappa_0} &= \frac{\varkappa_0}{8\pi d_c T} \left(k^4 \ln \left(\frac{q_*}{k} \right) \right) \oint \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{f_0^3 \pi_2}{(\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12}))^2} \frac{\kappa(\psi, \theta_q)}{\kappa^2(\lambda, \theta_q)} \\ \Sigma_{\delta\kappa_4} &= \frac{\varkappa_0}{24\pi d_c T} \left(k^4 \ln \left(\frac{q_*}{k} \right) \right) \cos 4\theta_k \oint \frac{d\theta_q}{2\pi} \frac{f_0^3 \pi_2}{(\pi_0 + f_0(\pi_{11} + \pi_{12}))^2} \frac{\kappa(\psi, \theta_q)}{\kappa^2(\lambda, \theta_q)} \cos 4\theta_q\end{aligned}$$

Запишем итоговое выражение для собственно-энергетической функции, которое мы и будем использовать для решения уравнения Дайсона:

$$\boxed{\hat{\Sigma}_k = \Sigma_{\varkappa_0} + \Sigma_{\delta\varkappa_4} + (\Sigma_{\kappa_0} + \Sigma_{\delta\kappa_4})\hat{J}} \quad (138)$$

С.3 Асимптотические выражения для полученных функций

С.3.1 Симметричный случай

Разложение по $|\lambda|, |\psi| \ll 1$

Для начала запишем разложения для функций π_i :

$$\pi_0(\theta) \approx \frac{1}{16\pi} \left[1 + \frac{2}{9} \cos(4\theta)\lambda + \frac{85 - 2 \cos(8\theta)}{90} \lambda^2 + \frac{\cos(4\theta)(86 + 3 \cos(8\theta))}{315} \lambda^3 \right] \quad (139)$$

$$\begin{aligned}\pi_1(\theta) \approx \frac{1}{16} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(4\theta)\lambda - \frac{1}{9} \cos(4\theta)\psi - \frac{85 - 2 \cos(8\theta)}{90} \lambda\psi + \frac{85 - 2 \cos(8\theta)}{45} \lambda^2 + \right. \\ \left. \frac{\cos(4\theta)(86 + 3 \cos(8\theta))}{126} \lambda^3 - \frac{\cos(4\theta)(86 + 3 \cos(8\theta))}{210} \lambda^2\psi \right] \quad (140)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2(\theta) \approx \frac{1}{16} \left[1 + \frac{4}{9} \cos(4\theta)\lambda - \frac{2}{9} \cos(4\theta)\psi - \frac{80 - 2 \cos(8\theta)}{45} \lambda\psi + \frac{125 - 3 \cos(8\theta)}{45} \lambda^2 - \frac{1}{18} \psi^2 + \right. \\ \left. + \frac{2 \cos(4\theta)(69 + 2 \cos(8\theta))}{105} \lambda^3 - \frac{\cos(4\theta)(398 + 9 \cos(8\theta))}{315} \lambda^2\psi + \frac{2}{9} \cos(4\theta)\lambda\psi^2 \right] \quad (141)\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что тождество (134) в данном случае выполняется. Также видно, что функции π_i действительно раскладываются по гармоникам $\cos(4m\theta)$, а значит обладают тетрагональной симметрией. Далее распишем разложение функций F_0, F_4, Φ_0 и Φ_4 (для удобства $f_0 \equiv f$):

$$\begin{aligned}F_0 \approx \frac{1 + 3f + f^2}{(1 + 2f)^2} + \frac{(-50 - 450f - 1419f^2 - 1312f^3 + 240f^4)}{162(1 + 2f)^4} \lambda^2 - \\ \frac{f(-50 - 269f - 192f^2 + 140f^4)}{81(1 + 2f)^4} \lambda\psi + \frac{f^2(31 + 128f + 120f^2)}{162(1 + 2f)^4} \psi^2 \quad (142)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_4 \approx & -\frac{(f(f(62f+121)+66)+11)\lambda}{18(2f+1)^3} + \frac{f(40f^2+44f+11)\psi}{18(2f+1)^3} + \frac{f(136f^4+144f^3+34f^2)\psi^3}{972(2f+1)^5} + \\
 & \frac{(f(f(6f(4f(720f+4411))+17375)+38339)+6324)+527)\lambda^3}{9720(2f+1)^5} - \\
 & \frac{f(4f(f(2f(3238f+8333))+11423)+2613)+527)\lambda^2\psi}{3240(2f+1)^5} + \\
 & \frac{(21096f^5+37220f^4+19612f^3+3118f^2)\lambda\psi^2}{3240(2f+1)^5} \quad (143)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_0 \approx & \frac{f^3}{(2f+1)^2} - \frac{(40f(f+2)+27)f^3\psi^2}{162(2f+1)^4} + \frac{(480f^2+1000f+383)f^3\lambda^2}{162(2f+1)^4} - \\
 & \frac{(320f^2+560f+203)f^3\lambda\psi}{81(2f+1)^4} \quad (144)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_4 \approx & -\frac{f^3(20f+9)\lambda}{9(2f+1)^3} + \frac{f^3(18f+7)\psi}{18(2f+1)^3} - \frac{f^3(6f(f(2250f+6493)+4586)+5701)\lambda^3}{2430(2f+1)^5} - \\
 & \frac{f^3(616f^3+948f^2+420f+54)\psi^3}{1944(2f+1)^5} + \frac{f^3(2256f^3-2528f^2-3452f-802)\lambda\psi^2}{1620(2f+1)^5} - \\
 & \frac{f^3(2f(8f(995f+3793)+22673)+9471)\lambda^2\psi}{3240(2f+1)^5} \quad (145)
 \end{aligned}$$

Как видно, домножив на соответствующие коэффициенты линейные слагаемые совпадут с уравнениями (27)-(32). Теперь, собирая все коэффициенты можно получить уравнения (59), (60):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\kappa_0}{d\Lambda} = & \frac{2(f^2+3f+1)\kappa_0}{d_c(2f+1)^2} + \frac{f^2(120f^2+128f+31)\kappa_0\psi^2}{81d_c(2f+1)^4} + \\
 & \frac{(240f^4-1312f^3-1419f^2-450f-50)\kappa_0\lambda^2}{81d_c(2f+1)^4} - \\
 & \frac{2f(f(8f(35f-24)-269)-50)\kappa_0\lambda\psi}{81d_c(2f+1)^4} \quad (146)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{d\Lambda} = & -\frac{2(3f+1)f}{d_c(2f+1)^2} - \frac{4(20f^3+376f^2+236f+25)f^2\lambda\psi}{81d_c(2f+1)^4} - \frac{2(80f^2+104f+29)f^3\psi^2}{81d_c(2f+1)^4} + \\
 & \frac{2(120f^4+1156f^3+901f^2+225f+25)f\lambda^2}{81d_c(2f+1)^4} \quad (147)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\Lambda} = & -\frac{(170f^3 + 499f^2 + 336f + 65)\lambda}{27d_c(2f+1)^3} + \frac{f(40f^2 + 44f + 11)\psi}{27d_c(2f+1)^3} + \\ & \frac{f^2(3348f^3 + 7330f^2 + 4106f + 629)\lambda\psi^2}{2430d_c(2f+1)^5} + \frac{f^3(68f^2 + 72f + 17)\psi^3}{729d_c(2f+1)^5} + \\ & \frac{f(41296f^4 - 79144f^3 - 133292f^2 - 54732f - 6527)\lambda^2\psi}{4860d_c(2f+1)^5} + \\ & \frac{(-69120f^5 + 534984f^4 + 851250f^3 + 455759f^2 + 105324f + 9527)\lambda^3}{14580d_c(2f+1)^5} \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\Lambda} = & -\frac{2f^2(20f+9)\lambda}{27d_c(2f+1)^3} - \frac{f^2(90f+47)\psi}{27d_c(2f+1)^3} - \frac{f^2(13500f^3 + 38958f^2 + 27516f + 5701)\lambda^3}{3645d_c(2f+1)^5} - \\ & \frac{f^2(41680f^3 + 88112f^2 + 60614f + 13509)\lambda^2\psi}{4860d_c(2f+1)^5} + \frac{f^2(20328f^3 + 41936f^2 + 27254f + 5689)\lambda\psi^2}{1215d_c(2f+1)^5} + \\ & \frac{f^2(1132f^3 + 3126f^2 + 2202f + 459)\psi^3}{1458d_c(2f+1)^5} \end{aligned} \quad (149)$$

Устойчивость $\lambda = \psi$, $f_0 \gg 1$

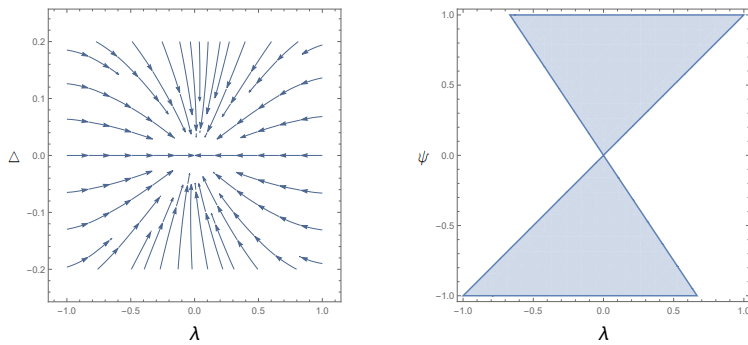
Для этого запишем линеаризованные уравнения на разность $\Delta = \psi - \lambda$:

$$\frac{d\lambda}{d\Lambda} = \frac{\Delta(3503\lambda^2 + 1800)}{9720d_c} + \frac{9527\lambda^3 - 35100\lambda}{58320d_c}, \quad \frac{d\psi}{d\Lambda} = \frac{\Delta(1837\lambda^2 - 900)}{2160d_c} + \frac{9527\lambda^3 - 35100\lambda}{58320d_c} \quad (150)$$

Вычитая одно из другого получаем:

$$\frac{d\Delta}{d\Lambda} = \Delta \frac{(9527\lambda^2 - 11700)}{19440d_c} \quad (151)$$

Получаем устойчивую фиксированную точку $\Delta = 0$, см. 14.



(а) Фазовый портрет системы (150), (151)

(б) Области немонотонности f_0

Рис. 14: Рисунки к Приложению

Немонотонность f_0

Запишем теперь уравнение на f :

$$\frac{df}{d\Lambda} = \frac{2}{d_c} f \left(\tilde{\Phi}_0(\lambda, \psi) - F_0(\lambda, \psi) \right) \quad (152)$$

Теперь можно написать уравнение для малых ψ , λ :

$$\frac{df}{d\Lambda} = \frac{5}{81d_c} f(3\lambda^2 - \lambda\psi - 2\psi^2) \quad (153)$$

Получаем немонотонное поведение на плоскости параметров ψ , λ , см. 14.

Асимптотики при $\lambda \sim 1$

Для анализа уравнений РГ в пределе $\lambda \sim 1$ нужно найти разложение функций π_1 и π_2 .

Запишем π_1 :

$$\pi_1 = \frac{1}{3} \int \frac{d\phi d\xi \xi \sin^4(\theta - \phi)(1 + \psi \cos 4\phi)}{(2\pi)^2 (1 + \lambda \cos 4\phi)^2} \times \frac{1}{(1 - \lambda)((\xi \cos \phi - \cos \theta)^2 + (\xi \sin \phi - \sin \theta)^2)^2 + 2\lambda((\xi \cos \phi - \cos \theta)^2 - (\xi \sin \phi - \sin \theta)^2)^2} \quad (154)$$

Основной вклад в интеграл приходит от нулей знаменателя в случае $\lambda = 1$. Они имеют вид:

$$\lambda \cos 4\phi = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi_* = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \phi_* = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right) \quad (155)$$

Запишем разложение функции около $\theta = \pi/4$ (именно этот предел нам понадобится в асимптотике функций F_{2m} , Φ_{2m}). Сделаем переобозначения:

$$\theta = \pi/4 + r\sqrt{1 - \lambda}, \quad \phi = \pi/4 + x\sqrt{1 - \lambda}, \quad \xi = 1 + z(1 - \lambda) \quad (156)$$

Тогда в разложенном виде функция имеет вид:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\approx \frac{1}{12\pi^2} \frac{1 - \psi}{(1 - \lambda)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - r)^4}{(1 + 8x^2)^2} \frac{dx dz}{(x - r)^4 + 8(x - r)^2 z^2} = \frac{\sqrt{2} + 4r \operatorname{arctg}(2\sqrt{2}r)}{384\pi} \frac{1 - \psi}{(1 - \lambda)^{3/2}} \\ &= \frac{1 - \psi}{(1 - \lambda)^{3/2}} h_1(r) \quad (157) \end{aligned}$$

Рассмотрим 2 предельных случая:

$$h_1(r) = \begin{cases} \frac{1}{192\sqrt{2\pi}} + \frac{r^2}{24\sqrt{2\pi}}, & r \ll 1 \\ \frac{r}{192} = \frac{|\cos 2\theta|}{384\sqrt{1-\lambda}}, & r \gg 1 \end{cases} \quad (158)$$

Запишем теперь π_2 :

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \frac{1}{3} \int \frac{d\phi d\xi \xi \sin^4(\theta - \phi)(1 + \psi \cos 4\phi)}{(2\pi)^2 (1 + \lambda \cos 4\phi)^2} \times \\ &\frac{(1 - \psi)((\xi \cos \phi - \cos \theta)^2 + (\xi \sin \phi - \sin \theta)^2)^2 + 2\psi((\xi \cos \phi - \cos \theta)^2 - (\xi \sin \phi - \sin \theta)^2)^2}{((1 - \lambda)((\xi \cos \phi - \cos \theta)^2 + (\xi \sin \phi - \sin \theta)^2)^2 + 2\lambda((\xi \cos \phi - \cos \theta)^2 - (\xi \sin \phi - \sin \theta)^2)^2} \end{aligned} \quad (159)$$

Рассуждения аналогичны указанным выше, запишем её в разложенном виде:

$$\begin{aligned} \pi_2 &\approx \frac{1}{12\pi^2} \frac{(1 - \psi)^2}{(1 - \lambda)^{5/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - r)^8}{(1 + 8x^2)^2 ((x - r)^4 + 8(x - r)^2 z^2)^2} dx dz = \frac{\sqrt{2} + 4r \operatorname{arctg}(2\sqrt{2}r)}{768\pi} \frac{(1 - \psi)^2}{(1 - \lambda)^{5/2}} \\ &= \frac{(1 - \psi)^2}{2(1 - \lambda)^{5/2}} h_1(r) \end{aligned} \quad (160)$$

Теперь, используя (63) получаем асимптотики:

$$F_0 = -F_4 \approx \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{dx(3 - 8x^2)}{(1 + 8x^2)^2 h_1(x)} = \tilde{F}_0 \quad (161)$$

$$\Phi_0 = -\Phi_4 \approx \frac{1}{64\pi^2} \frac{1 - \psi}{1 - \lambda} \int \frac{dx}{(1 + 8x^2)^2 h_1(x)} = \frac{1 - \psi}{1 - \lambda} \tilde{\Phi}_0 \quad (162)$$

Как и предсказывает численный расчёт 9, функции Φ_{2m} имеют расходимости при $\lambda \sim 1$.

С.3.2 Несимметричный случай

Разложение по $|\lambda|, |\psi|, |\varpi|, |\omega| \ll 1$

Запишем разложение функций π_i (без ϖ):

$$\pi_0(\theta) \approx \frac{1}{16\pi} \left[1 + \frac{2}{9} \cos(4\theta)\lambda + \frac{85 - 2 \cos(8\theta)}{90} \lambda^2 + \frac{\cos(4\theta)(86 + 3 \cos(8\theta))}{315} \lambda^3 \right] \quad (163)$$

$$\begin{aligned} \pi_1(\theta) \approx \frac{1}{16} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(4\theta)\lambda - \frac{1}{4} \cos(2\theta)\omega - \frac{1}{9} \cos(4\theta)\psi - \frac{85 - 2 \cos(8\theta)}{90} \lambda\psi + \frac{85 - 2 \cos(8\theta)}{45} \lambda^2 + \right. \\ \left. + \frac{\cos(2\theta)(5 + 2 \cos(4\theta))}{36} \lambda\omega \right] \end{aligned} \quad (164)$$

$$\pi_2(\theta) \approx \frac{1}{16} \left[1 + \frac{4}{9} \cos(4\theta)\lambda - \frac{1}{2} \cos(2\theta)\omega - \frac{2}{9} \cos(4\theta)\psi - \frac{80 - 2 \cos(8\theta)}{45} \lambda\psi + \frac{125 - 3 \cos(8\theta)}{45} \lambda^2 - \frac{1}{18} \psi^2 - \frac{3 - 2 \cos(4\theta)}{24} \omega^2 + \frac{\cos(2\theta)(5 + 2 \cos(4\theta))}{36} \lambda\omega + \frac{\cos(2\theta)(5 + 2 \cos(4\theta))}{36} \psi\omega \right] \quad (165)$$

Учитывая ϖ :

$$\delta\pi_0 \approx \frac{1}{16\pi} \left[\frac{1}{2} \cos(2\theta)\varpi + \frac{63 - 2 \cos(4\theta)}{72} \varpi^2 - \frac{\cos(2\theta)(5 + 2 \cos(4\theta))}{18} \lambda\varpi \right] \quad (166)$$

$$\delta\pi_1 \approx \frac{1}{16\pi} \left[\frac{3}{4} \cos(2\theta)\varpi + \frac{63 - 2 \cos(4\theta)}{36} \varpi^2 + \frac{\cos(2\theta)(5 + 2 \cos(4\theta))}{36} \lambda\varpi - \frac{63 - 2 \cos(4\theta)}{72} \omega\varpi + \frac{\cos(2\theta)(5 + 2 \cos(4\theta))}{36} \psi\varpi \right] \quad (167)$$

$$\delta\pi_2 \approx \frac{1}{16\pi} \left[\cos(2\theta)\varpi - \frac{5 \cos(2\theta)(5 + 2 \cos(4\theta))}{36} \lambda\varpi + \frac{5}{2} \varpi^2 - \frac{27 + 2 \cos(4\theta)}{18} \varpi\omega + \frac{\cos(2\theta)(5 + 2 \cos(4\theta))}{36} \psi\varpi \right] \quad (168)$$

Из этих разложений можно получить разложение функций Φ_i , F_i :

$$F_0 \approx \frac{(120f^2 + 128f + 31) f^2\psi^2}{162(2f + 1)^4} + \frac{(15f^2 + 17f + 4) f^2\omega^2}{8(2f + 1)^4} + \frac{(55f^2 + 37f + 4) f^2\varpi^2}{8(2f + 1)^4} - \frac{(35f^2 + 27f + 4) f^2\omega\varpi}{4(2f + 1)^4} + \frac{f^2 + 3f + 1}{(2f + 1)^2} + \frac{(-280f^3 + 192f^2 + 269f + 50) f \lambda\psi}{81(2f + 1)^4} + \frac{(240f^4 - 1312f^3 - 1419f^2 - 450f - 50) \lambda^2}{162(2f + 1)^4} \quad (169)$$

$$F_2 \approx \frac{(40f^2 + 48f + 11) f^2\psi\omega}{72(2f + 1)^4} + \frac{(10f^2 + 12f + 3) f\omega}{4(2f + 1)^3} - \frac{(460f^3 + 778f^2 + 401f + 65) f \lambda\omega}{72(2f + 1)^4} - \frac{(480f^3 + 788f^2 + 401f + 65) f \psi\varpi}{72(2f + 1)^4} - \frac{(16f^3 + 33f^2 + 18f + 3) \varpi}{4(2f + 1)^3} + \frac{(1160f^4 + 2198f^3 + 1596f^2 + 525f + 65) \lambda\varpi}{72(2f + 1)^4} \quad (170)$$

$$F_4 \approx \frac{f(40f^2 + 44f + 11) \psi}{18(2f + 1)^3} + \frac{f^2(25f^2 + 31f + 7) \omega^2}{48(2f + 1)^4} - \frac{(62f^3 + 121f^2 + 66f + 11) \lambda}{18(2f + 1)^3} - \frac{f(515f^3 + 833f^2 + 411f + 65) \omega\varpi}{72(2f + 1)^4} + \frac{(1215f^4 + 2613f^3 + 1906f^2 + 585f + 65) \varpi^2}{144(2f + 1)^4} \quad (171)$$

$$\Phi_0 \approx \frac{f^3}{(2f+1)^2} + \frac{(480f^2 + 1000f + 383) f^3 \lambda^2}{162(2f+1)^4} - \frac{(320f^2 + 560f + 203) f^3 \lambda \psi}{81(2f+1)^4} - \frac{(40f^2 + 80f + 27) f^3 \psi^2}{162(2f+1)^4} - \frac{(5f^2 + 10f + 3) f^3 \omega^2}{8(2f+1)^4} + \frac{(35f^2 + 50f + 17) f^3 \varpi^2}{8(2f+1)^4} - \frac{(15f^2 + 20f + 7) f^3 \omega \varpi}{4(2f+1)^4} \quad (172)$$

$$\Phi_2 \approx \frac{(4f+1)f^3\omega}{4(2f+1)^3} - \frac{(5f+2)f^3\varpi}{2(2f+1)^3} - \frac{(45f^2+25f+2)f^3\lambda\omega}{18(2f+1)^4} + \frac{(190f^2+190f+49)f^3\lambda\varpi}{36(2f+1)^4} + \frac{(20f^2-10f-7)f^3\psi\omega}{72(2f+1)^4} - \frac{(100f^2+65f+9)f^3\psi\varpi}{36(2f+1)^4} \quad (173)$$

$$\Phi_4 \approx -\frac{(20f+9)f^3\lambda}{9(2f+1)^3} + \frac{(18f+7)f^3\psi}{18(2f+1)^3} + \frac{(5f^2-10f-4)f^3\omega^2}{48(2f+1)^4} + \frac{(635f^2+510f+103)f^3\varpi^2}{144(2f+1)^4} - \frac{(195f^2+110f+13)f^3\omega\varpi}{72(2f+1)^4} \quad (174)$$

Линия фиксированных точек $\lambda = \psi$, $\varpi = \omega$

На $f \gg 1$ и при $\lambda = \psi$, $\varpi = \omega$ в уравнение на f обнуляется правая часть:

$$\frac{df}{d\Lambda} = -\frac{5f(-48\lambda^2 + 16\lambda\psi + 32\psi^2 + 81\omega^2 + 81\varpi^2 - 162\omega\varpi)}{1296d_c} \quad (175)$$

Фиксированная точка $\varpi = \omega = 0$

Поведение констант ω , ϖ кажется аналогичным с прошлым случаем: $\varpi \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \text{const}$, $\omega f \rightarrow 0$. Поведение ϖ :

$$\frac{d\varpi}{d\Lambda} = \frac{f(65\lambda\omega - 5\lambda\varpi - 54\omega + 65\psi\varpi + 54\varpi)}{27d_c} - \frac{65(\lambda\varpi)}{27d_c} \quad (176)$$

Поведение ω :

$$\frac{d\omega}{d\Lambda} = \frac{f^2(8\lambda\omega - 98\lambda\varpi + 7\psi\omega - 72\omega + 18\psi\varpi + 72\varpi)}{27d_c} \quad (177)$$

Получаем, что в низшем приближении по f : $\varpi \rightarrow 0$, если $\lambda > 0$ и $\omega \rightarrow \text{const}$, $\omega f \rightarrow 0$.

D Решение уравнений для перехода в трубчатую фазу

D.1 Решение уравнений в случае $f \ll 1$

Будем аккуратно с заданной точностью решать уравнения (84), (85). Очевидно, что в данном приближении $\psi = \psi_0$ ($f_0^{(0)} \equiv f_0$):

$$\boxed{f(\Lambda) = f_0 e^{-\frac{2}{d_c}(\Lambda - \Lambda_0)}} \quad (178)$$

Некоторыми вычислениями можно получить:

$$\lambda(\Lambda) = \frac{1}{54} e^{f_0 \left(-e^{\frac{2\Lambda_0}{d_c} - \frac{2\Lambda}{d_c}} \right) - \frac{65\Lambda}{27d_c}} \left(54\lambda_0 e^{\frac{65\Lambda_0}{27d_c} + f_0} + 11f_0\psi_0 e^{\frac{11\Lambda}{27d_c} + \frac{2\Lambda_0}{d_c}} \left(f_0 \left(-e^{\frac{2\Lambda_0}{d_c} - \frac{2\Lambda}{d_c}} \right) \right)^{11/54} \times \right. \\ \left. \Gamma \left(-\frac{11}{54}, -e^{-\frac{2(\Lambda-\Lambda_0)}{d_c}} f_0 \right) - 11f_0(-f_0)^{11/54}\psi_0 e^{\frac{65\Lambda_0}{27d_c}} \Gamma \left(-\frac{11}{54}, -f_0 \right) \right) \quad (179)$$

Данное выражение заметно превышает точность, поэтому разложим его до нужного порядка:

$$\lambda(\Lambda) \approx f_0 \left(\lambda_0 e^{-\frac{65(\Lambda-\Lambda_0)}{27d_c}} \left(1 - e^{\frac{2\Lambda_0}{d_c} - \frac{2\Lambda}{d_c}} \right) + e^{-\frac{65\Lambda}{27d_c}} \left(\psi_0 e^{\frac{11\Lambda}{27d_c} + \frac{2\Lambda_0}{d_c}} - \psi_0 e^{\frac{65\Lambda_0}{27d_c}} \right) \right) + \lambda_0 e^{-\frac{65(\Lambda-\Lambda_0)}{27d_c}} \quad (180)$$

Далее полученные выражения подставляем в уравнение (85) и раскладываясь до нужного порядка получаем:

$$\ln \varkappa_0 = -\frac{10}{39} f_0 \lambda_0 \psi_0 e^{\frac{130\Lambda_0}{27d_c} - \frac{130\Lambda}{27d_c}} + f_0 e^{\frac{2\Lambda_0}{d_c} - \frac{2\Lambda}{d_c}} + \frac{5}{39} \lambda_0^2 e^{\frac{130\Lambda_0}{27d_c} - \frac{130\Lambda}{27d_c}} + \frac{2\Lambda}{d_c} - \frac{2\Lambda_0}{d_c} + \frac{10f_0\lambda_0\psi_0}{39} - f_0 + \ln \varkappa_0^{(0)} - \frac{5\lambda_0^2}{39} \quad (181)$$

Несколько замечаний по поводу данного выражения:

1. Для поиска выражения для нулевой гармоники нужно возводить в экспоненту, а затем снова раскладывать, иначе будет заработано превышение точности.
2. Надо помнить, что выражение содержит «врожденное» превышение точности, потому что:

$$\varkappa_0^{(0)} = \frac{\tilde{\varkappa}_0}{1 + \lambda_0} \quad (182)$$

Теперь подставляем в уравнение (83), интегрируем его и раскладываясь до нужного порядка. Ввиду громоздкости данного выражения писать его сюда бессмысленно. Помним, что фактор сжатия - монотонно убывает, поэтому если заулнения не будет на бесконечности, значит его не будет вовсе. Поэтому, чтобы определить критическую температуру возьмём предел:

$$\xi_x^2(\Lambda \rightarrow \infty) = 1 + \frac{131d_c^2 f_0 T \lambda_0 \psi_0}{2208\pi B^2 \varkappa_0^{(0)}} - \frac{d_c^2 f_0 T}{8\pi B^2 \varkappa_0^{(0)}} - \frac{131d_c^2 T \lambda_0^2}{4416\pi B^2 \varkappa_0^{(0)}} - \frac{d_c^2 T}{8\pi B^2 \varkappa_0^{(0)}} \quad (183)$$

Теперь сделаем подстановку через: $Tf_0 = \tilde{\tau}_0(1 + \lambda_0)/\tilde{\varkappa}_0(1 + \psi_0)$, а также (182) и сделаем разложение:

$$\xi_x^2 = 1 - \frac{d_c^2 T}{8\pi B^2 \tilde{\varkappa}_0} + \frac{d_c^2 \tau \psi_0}{8\pi B^2 \tilde{\varkappa}_0^2} - \frac{d_c^2 \tau}{8\pi B^2 \tilde{\varkappa}_0^2} + \frac{683d_c^2 \tau \lambda_0 \psi_0}{2208\pi B^2 \tilde{\varkappa}_0^2} - \frac{d_c^2 \tau \lambda_0}{4\pi B^2 \tilde{\varkappa}_0^2} - \frac{131d_c^2 T \lambda_0^2}{4416\pi B^2 \tilde{\varkappa}_0} - \frac{d_c^2 T \lambda_0}{8\pi B^2 \tilde{\varkappa}_0}, \quad \tau = T\tilde{T}_0 \quad (184)$$

Тогда критическая температура определяется выражением: $\xi_x^2(T_{cr}^x) = 0$.

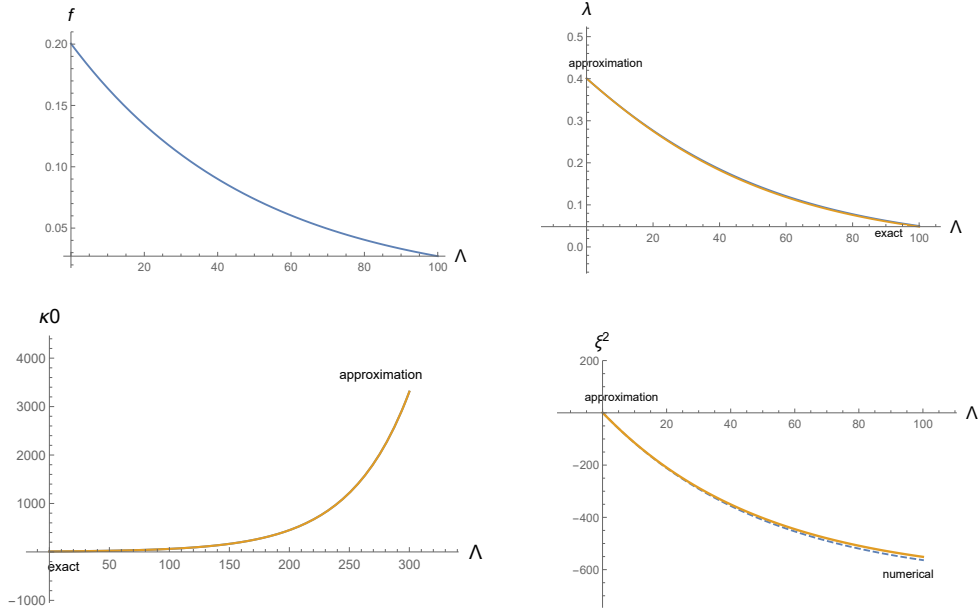


Рис. 15: Сравнение численных и приближенных решений уравнений RG (84), (85)

D.2 Случай $T = 0$ и слабая анизотропия

Начнем решать с (90) – это система линейных уравнений, поэтому решается она аналитически:

$$\lambda(\Lambda) = \frac{e^{-\frac{65(\Lambda-\Lambda_0)}{108d_c}} (27d_c\lambda_0 - 5\lambda_0\Lambda + 5\Lambda\psi_0 + 5\lambda_0\Lambda_0 - 5\Lambda_0\psi_0)}{27d_c} \quad (185)$$

$$\psi(\Lambda) = \frac{e^{-\frac{65(\Lambda-\Lambda_0)}{108d_c}} (27d_c\psi_0 - 5\lambda_0\Lambda + 5\Lambda\psi_0 + 5\lambda_0\Lambda_0 - 5\Lambda_0\psi_0)}{27d_c} \quad (186)$$

С помощью этих решений можно получить точное решение уравнения на ϕ :

$$\phi(\Lambda) = \phi_0 \exp \left(\frac{2}{507} (\lambda_0 - \psi_0) (29\lambda_0 + 36\psi_0) - \frac{2(\lambda_0 - \psi_0) e^{-\frac{65}{54d_c}(\Lambda-\Lambda_0)} (27d_c(29\lambda_0 + 36\psi_0) - 325(\lambda_0 - \psi_0)(\Lambda - \Lambda_0))}{13689d_c} \right) \quad (187)$$

Данное выражение содержит превышение точности, но разложенное выражение слишком громоздко для записи. Выход решения на константу легко объяснить – данное противоречие с выводом общего характера ($f = 0$ – устойчивая фиксированная точка) разрушается появлением сколь угодно малой температуры. Также если $f \rightarrow 0$ и $T \rightarrow 0$, тогда возникает неопределенность в пределе у ϕ , но как известно из 4.2, при $\lambda \rightarrow \psi$ оказывается, что $f \sim \text{const}$, а так как все остальные слагаемые, кроме ведущего в уравнении на f пропадают из-за предела $T = 0$ можно полагать, что противоречия не возникает.

Похожим образом можно решить уравнение на нулевую гармонику изгибной жесткости, получить точную функциональную зависимость, а затем разложить её, опять же приводить аналитическое выражение не имеет смысла, ввиду его громоздкости.

Далее по тем же принципам решаем уравнение (89), устремляем $\Lambda \rightarrow \infty$ и раскладываем превышения точности в ϕ_0 и \varkappa_0 :

$$\xi_x^2(\infty) = -\frac{481799d_c^2\lambda_0\tau_0\psi_0^2}{584016\pi B^2\tilde{\varkappa}_0^2} + \frac{286757d_c^2\lambda_0\tau_0\psi_0}{292008\pi B^2\tilde{\varkappa}_0^2} - \frac{d_c^2\lambda_0\tau_0}{\pi B^2\tilde{\varkappa}_0^2} - \frac{492301dc^2\tau_0\psi_0^2}{1168032\pi B^2\tilde{\varkappa}_0^2} + \frac{d_c^2\tau_0\psi_0}{2\pi B^2\tilde{\varkappa}_0^2} - \frac{d_c^2\tau_0}{2\pi B^2\tilde{\varkappa}_0^2} + 1 \quad (188)$$

Отсюда по оговоренным выше правилам можно получить τ_{cr} .

D.3 Случай $T = 0$ и произвольная анизотропия, при условии

$$\psi \neq \lambda$$

Для начала этот случай был решён численно, чтобы была возможность сравнивать наши приближения с реальными решениями.

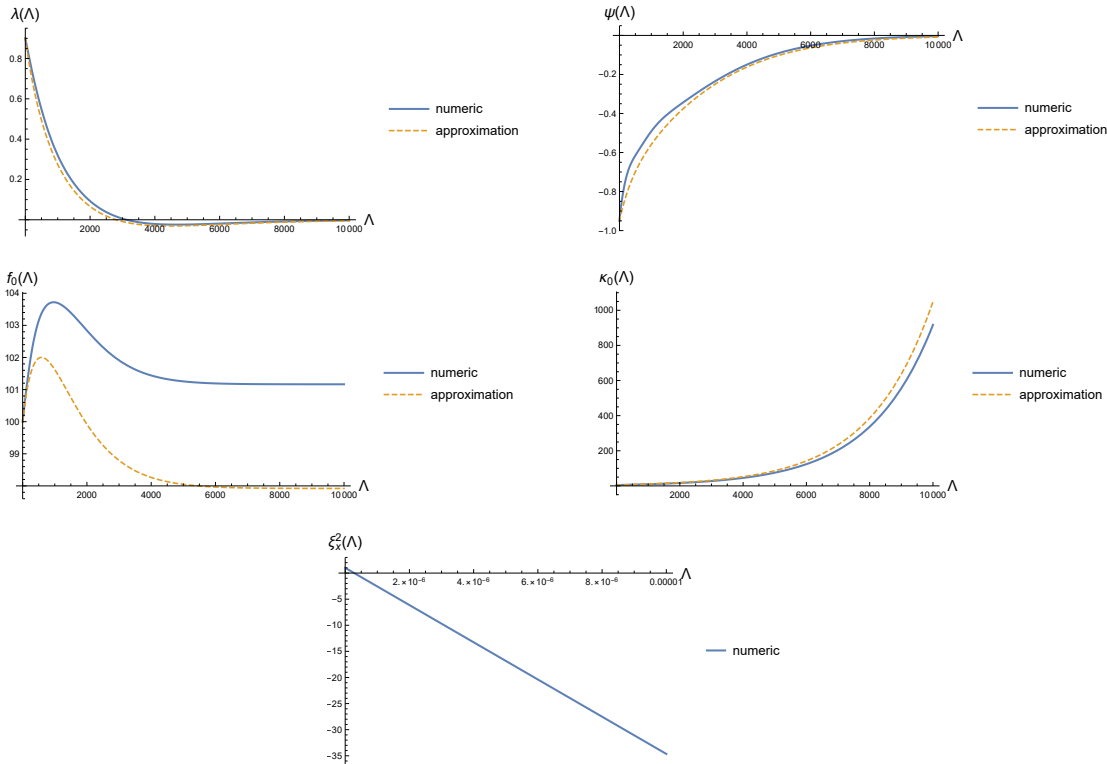


Рис. 16: Численные решения (102) и их сравнение с приближением слабой анизотропии: $\lambda^{(0)} = 0.9$, $\psi^{(0)} = -0.95$, $\phi_0^{(0)} = 100$, $\varkappa_0^{(0)} = 5$, $\xi_x^{2(0)} = 1$, $d_c = 1000$.

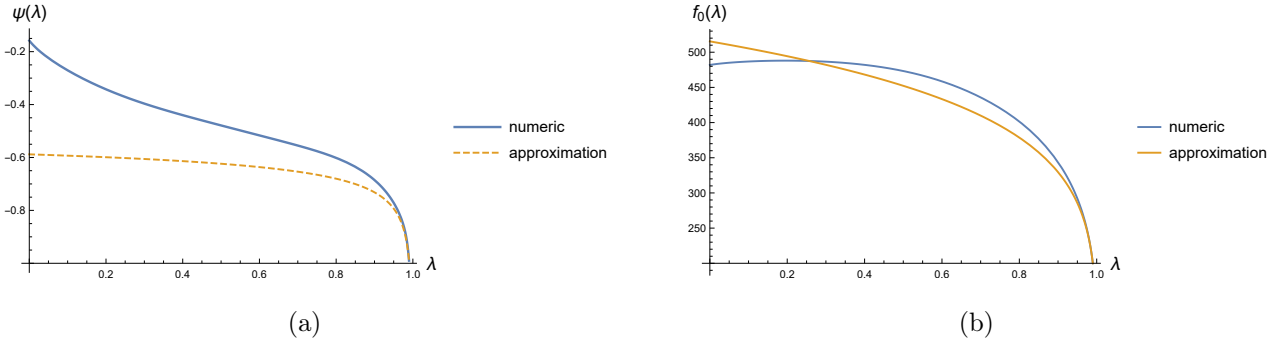


Рис. 17: Сравнение решений уравнений (105) $d_c = 1000$, $\psi_0 = -0.99$, $\lambda_0 = 0.99$, $f_0 = 200$, $\alpha = 0.1569$

Уравнения (105) имеют решение в виде:

$$\psi = \frac{(u/u_0)^{-\alpha}(1 + 3\psi_0)/(1 - \psi_0) - 1}{3 + (u/u_0)^{-\alpha}(1 + 3\psi_0)/(1 - \psi_0)}, \quad f_0 = \frac{f_0^{(0)}}{4} \left(1 + 3\psi_0 + 3 \left(\frac{u}{u_0} \right)^\alpha (1 - \psi_0) \right) \quad (189)$$

где $\alpha = \tilde{\Phi}_0/\tilde{F}_0$ – численная константа. Заодно запишем:

$$\varkappa_0 = \varkappa_0^{(0)} \exp \left[\frac{3}{4}(u - u_0) \right] \quad (190)$$

А теперь записываем основное уравнение:

$$\frac{d\xi_x^2}{du} = -\frac{3d_c^2}{32\pi\gamma\tilde{F}_0} \frac{f_0}{\varkappa_0} \frac{1 - \psi}{u^{3/2}} \Rightarrow \xi_x^2 = 1 - \frac{3d_c^2}{32\pi\gamma\tilde{F}_0} \int_{u_0}^u du' \frac{f_0(u')}{\varkappa_0(u')} \frac{1 - \psi(u')}{u'^{3/2}} \quad (191)$$

Тогда критический беспорядок имеет вид (106).

Список литературы

- [1] D.R. Nelson, L. Peliti, Fluctuations in membranes with crystalline and hexatic order, *J. Physique* 48 (1987) 1085-1092.
- [2] Maya Paczuski, Mehran Kardar, and David R. Nelson, Landau Theory of the Crumpling Transition, *Phys. Rev. Lett.* 60, 2638 (1988)
- [3] Ryan J.T. Nicholl, Hiram J. Conley, Nickolay V. Lavrik, et al., The effect of intrinsic crumpling on the mechanics of free-standing graphene, *Nat. Commun.* (2015)
- [4] Xi Ling, Han Wang, Shengxi Huang, The renaissance of black phosphorus, *PNAS* 112 (15) 4523-4530 (2015)
- [5] Banhart, F., Kotakoski, J., Krasheninnikov, A. V., Structural Defects in Graphene, *ACS Nano* 5(1):26-41 (2010)
- [6] I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, and A. D. Mirlin. Anomalous hooke's law in disordered graphene. *2D Materials*, 4(1):011003, 2017.
- [7] Л. М. Зубов, Уравнения Кармана для упругой пластинки с дислокациями и дисклинациями, *Доклады Академии наук*, том 412, 3, 343-346 (2007)
- [8] Siwen Zhao, Baojuan Dong, et al. In-plane anisotropic electronics based on low-symmetry 2D material: progress and prospects, *NA*, Issue 1 (2020)
- [9] I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, and A. D. Mirlin, Rippling and crumpling in disordered free-standing graphene, *Phys. Rev. B* 92, 155428 (2015).
- [10] I. S. Burmistrov, V. Yu. Kachorovskii, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, Differential Poisson's ratio of a crystalline two-dimensional membrane, *Ann. Phys. (NY)* 396, 119 (2018).
- [11] D. R. Saykin, I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, and I. S. Burmistrov, Absolute Poisson's ratio and the bending rigidity exponent of a crystalline two-dimensional membrane, *Ann. Phys. (NY)* 414, 168108 (2020).
- [12] D. R. Saykin, V. Yu. Kachorovskii, I. S. Burmistrov, Phase diagram of a flexible two-dimensional material, *Phys. Rev. 2*, 043099 (2020).
- [13] I. S. Burmistrov, V. Yu. Kachorovskii, M. J. Klug, J. Schmalian, Emergent continuous symmetry in anisotropic flexible two-dimensional materials
- [14] J. Toner, Elastic anisotropies and long-ranged interactions in solid membranes, *Phys. Rev. Lett.* 62, 905 (1989).