

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
Факультет Физики

Парфенов Максим Вячеславович

«Топологические возбуждения в нелинейной
сигма-модели в классе С»

Выпускная квалификационная работа
по направлению подготовки 03.04.02 Физика
образовательная программа «Физика»

Научный руководитель:
Бурмистров Игорь Сергеевич,
док. физ.-мат. наук,
проф. фак. Физики НИУ ВШЭ,
проф. РАН

Москва
2024

Содержание

1 Введение	3
1.1 Действие нелинейной сигма модели	5
1.2 Неунитарный поворот матричного базиса	7
1.3 Редукция в класс A	8
2 Краевая нелинейная сигма-модель	8
2.1 Краевая теория	9
2.2 Вывод краевого действия	10
2.3 Диффузионный предел	12
3 Инстантонные решения с топологическим зарядом равным ± 1	14
3.1 Построение инстантонного решения	14
3.2 Квантовые флуктуации в окрестности инстантона	17
3.3 Собственная система для $O^{(a)}$	18
3.4 Анализ нулевых мод	20
4 Вычисление поправки к свободной энергии	21
4.1 Детерминанты для массивных мод	22
4.2 Якобиан нулевых мод	24
4.3 Итоговый результат	25
5 Аномальные размерности чисто-скейлинговых операторов	26
5.1 Средняя локальная плотность состояний	27
5.2 Операторы с двумя Q -матрицами	30
5.3 Операторы с произвольным числом Q -матриц	31
6 Инстантонные поправки к спиновым проводимостям	31
6.1 Продольная спиновая проводимость	32
6.2 Поперечная спиновая проводимость	33
6.3 РГ-уравнения	34
6.4 Кроссовер между СКЭХ и ЦКЭХ	35
7 Заключение	37
A Однопетлевая поправка к LDoS и к спиновой проводимости в П-В регуляризации	39
B Детали вычисления перенормировки чисто-скейлинговых операторов	41
B.1 Операторы с двумя Q -матрицами	41
B.2 Операторы с тремя Q -матрицами	41
C Исключение ультрафиолетовых расходимостей с помощью метода пространственно переменной массы	43
D Учет флуктуаций в предэкспоненте для LDoS	44
E Усреднение мацубаровских формул для проводимостей	45
F Инвариантная форма чисто-скейлинговых операторов с двумя Q-матрицами	48

Аннотация

В последнее время большой интерес вызывает изучение критического поведения квантовых систем. Имеются некоторые теоретические доказательства существования спинового квантового эффекта Холла в двумерных сверхпроводящих системах со спариванием $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$. В этой работе рассматривается теория спинового квантового Холловского перехода, используя обобщение репличной NL σ M Пруискена с топологическим θ -членом для сверхпроводящего класса C. Используя свойства действия NL σ M, мы показываем наличие классических решений седловых уравнений, представляющие собой нетривиальные топологические конфигурации матричного поля Q , называемые инстантонами. В гауссовом приближении мы находим действие для малых флуктуаций вокруг инстантонных решений. После этого вычисляются инстантонные поправки к статистической сумме, моментам усредненной по беспорядку локальной плотности состояний, продольной и поперечной спиновой проводимостям. Также в работе обсуждается кроссовер между симметричными классами A и C.

1 Введение

Классическим примером квантового фазового перехода является переход Андерсона [1, 2], который представляет собой переход между металлической фазой, в которой поведение волновых функция является делокализованным и фазой изолятора, где волновые функции локализованы. Такой переход может осуществляться, например, при увеличении силы беспорядка или при изменении энергии электронов в системе. Одним из основных свойств данного перехода является мультифрактальное поведение электронных волновых функций в критической точке. А именно, такое поведение представляет из себя нетривиальный, сильно не-гауссовый скейлинг моментов усредненных по беспорядку волновых функций электронов как функций размера системы: $\langle |\psi(\mathbf{x})|^{2q} \rangle \sim L^{\tau_q - d}$, с нетривиальными τ_q , называемыми критическими экспонентами [3]. Из волновых функций можно собирать различные комбинации, которые показывают аналогичный скейлинг, в таком случае τ_q обозначаются как γ_{λ} ($\lambda = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)$ – мультииндекс оператора, \mathbf{q}_i – упорядоченный набор целых чисел) и называются аномальными размерностями, а сами комбинации называются чисто-скейлинговыми операторами (*pure-scaling operators*) [4–10]. Как пример таких операторов можно привести, например, усредненную по беспорядку плотность состояний ($\lambda = (1)$) или ее моменты ($\lambda = (\mathbf{q})$). Мультифрактальное поведение волновых функций (а значит и аномальные размерности некоторых чисто-скейлинговых операторов) оказывают эффект на некоторые физические свойства систем, например увеличение температуры перехода в грязных сверхпроводниках или усиление взаимодействия с фононами [11–14].

Для 10 классов симметрии Алтланда-Цирнбауэра [15–17], аномальные размерности чисто-скейлинговых операторов вычислялись как численно [4, 18, 19], так и аналитически [3]. Одним из самых удобных аналитических инструментов для получения аномальных размерностей чисто-скейлинговых операторов для Андерсоновского перехода в $d = 2$ является нелинейная сигма модель (NL σ M) – эффективная матричная теория поля для мягких диффузионных мод [4, 20]. Она позволяет контролируемым образом получать аномальные размерности как ряд по $1/g$, где g – заряд теории поля, который для данной теории поля представляет собой проводимость [21–23] (в зависимости от класса симметрии она может быть спиновой/термической). Однако, для класса C, который рассматривается в данной работе, существует отображение на теорию перколяции [24–26], что позволяет вычислить некоторые аномальные размерности чисто-скейлинговых операторов точно в точке перехода. Помимо этого, для невзаимодействующей системы аномальные размерности γ_{λ} связаны между собой точными соотношениями, называемыми симметричными соотношениями Вейля [4], эти соотношения следуют из алгебраической структуры исследуемых сигма-модельных многообразий. Учёт электрон-электронного взаимодействия приводит к тому, что уже даже в однопетлевом приближении соотношения Вейля перестают выполняться [27].

Скейлинговая теория предсказывает локализацию всех электронных состояний в $d = 2$ для любой силы беспорядка [29]. Однако, как известно, для частиц в сильном перпендикулярном магнитном поле это не так, а именно, в режиме целочисленного квантового

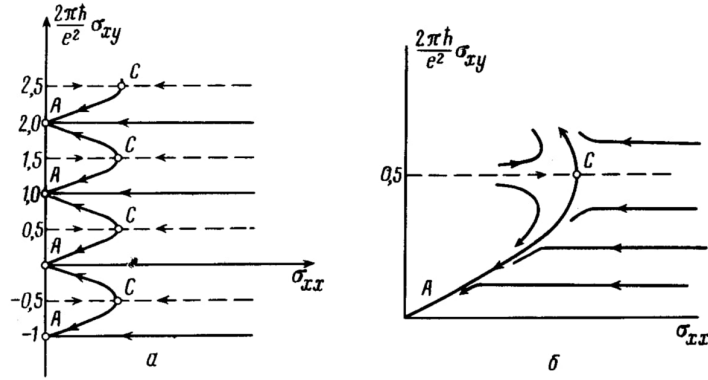


Рис. 1: Ренорм-групповой поток в режиме ЦКЭХ, взят из работы [28]

эффекта Холла при переходе между плато возникает ненулевое значение диссипативной продольной проводимости σ_{xx} [30–32]. Такой эффект оказывается возможным объяснить с помощью добавления топологического θ -слагаемого в действие нелинейной сигма-модели. Микроскопический вывод такого слагаемого получен Пруискеным [33]. Так как такое слагаемое может быть представлено как интеграл по границе, оно не вносит вклада в пертурбативные поправки (как ряд по $1/\sigma_{xx}$) к аномальным размерностям и перенормировке продольной проводимости. Однако, с помощью него оказывается возможным получить непертурбативные поправки, которые и ответственны за делокализационный переход при переходе между плато поперечной проводимости [28, 34, 35]. Оказывается, что такой переход имеет топологическую природу, так как значение топологического члена не равно нулю только на специальных классических решениях седловых уравнений сигма-модели – инстантонах и антиинстантонах, которые являются матричным обобщением решений, которые были получены Белавиным и Поляковым для двумерного ферромагнетика ($O(3)$ -модель) [36]. Учёт квантовых флуктуаций на фоне таких решений позволяет получить непертурбативные перенормировки как диссипативной, так и поперечной проводимостей, что приводит к делокализационному переходу в $\theta = \pi$, так как такие перенормировки являются логарифмическими оказывается удобным использовать процедуру ренормализационной группы для суммирования ведущих логарифмов, а сама ренорм-групповая диаграмма имеет известный вид Рис. 1 [28, 34]. Однако, не только в классе А (целочисленный квантовый эффект Холла) возможно наличие топологического члена, из 10 классов симметрии такой вид слагаемых доступен для $d = 2$ еще в двух сверхпроводящих классах С и D: спиновый квантовый эффект Холла (T -симметрия нарушена, но спиновая симметрия сохранена) и термический квантовый эффект Холла (нарушена как T -симметрия, так и спиновая симметрия) соответственно [37]. В данной работе будут рассматриваться топологические свойства спинового квантового эффекта Холла.

Предполагается, что физическая реализация класса С возможна в сверхпроводниках с нетривиальным спариванием $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ [23, 38–42]. Первым основным отличием от целочисленного эффекта Холла является то, что из-за несохранения числа квазичастиц в таких системах проводимость не является хорошо определенной наблюдаемой, поэтому

происходит квантование спиновой проводимости, которая может быть определена через отклик системы на градиент магнитного поля: $j_x^z = g_H [-\partial B^z(y)/\partial y]$. За возникновение квантования спиновой проводимости в таких системах ответственны краевые моды, которые представляют собой когерентное движение частицы и дырки, которое на квазиклассическом языке может быть связано с возникновением граничных андреевских состояний с нулевой энергией [38, 43–46]. Вторым отличием можно назвать то, что плато видны не на целых значениях поперечной спиновой проводимости, а на четных целых. Однако при учете расщепления за счет Зеемановского поля происходит нарушение $SU(2)$ симметрии до $U(1)$, которое определяет кроссовер между двумя классами симметрии (переход из класса C в класс A), что делает доступным наличие фазы с поперечной спиновой проводимостью $g_H = 1$ [38, 40, 47]. Хочется отметить, что полный микроскопический вывод репличной нелинейной сигма-модели для класса C с топологическим членом пока что не был сделан, однако был произведен вывод ее суперсимметричного аналога [48].

Основные вопросы, на которые отвечает данная работа, можно сформулировать так:

1. Какого микроскопическое обоснование возникновения топологического члена в действии нелинейной сигма-модели для класса C ?
2. Как устроен инстантон с топологическим зарядом равным единице для класса C и каковы его отличия от инстантона класса A ? Какова устойчивость такого решения по отношению к редукции между классами симметрии?
3. Как устроены инстантонные поправки к аномальным размерностям чисто-скейлинговых операторов? Удовлетворяют ли они симметричным соотношениям Вейля?
4. Какой вид на языке сигма-модели имеют операторы спиновой проводимости? Как устроены непертурбативные перенормировки бета-функций продольной и поперечной спиновой проводимости? В чем отличие ренорм-групповой диаграммы для спинового квантового эффекта Холла от аналогичной для целочисленного квантового эффекта Холла?

1.1 Действие нелинейной сигма модели

Мы используем формализм финкельштейновской нелинейной сигма модели для симметричного класса C (подробнее см. ссылки [22, 27, 49–51]), в применении к невзаимодействующим электронам. Так как эффекты взаимодействия в данной работе не рассматриваются, мы редуцируем пространство положительных и отрицательных Мацубаровских частот до запаздывающе-опережающего пространства, оставляя только две частоты. Таким образом, мы получаем следующую форму $NL\sigma M$ Пруискена:

$$S_\sigma = -\frac{g}{16} \int_x \text{Tr} (\nabla \mathcal{Q})^2 + \frac{g_H}{16} \int_x \text{Tr} [\varepsilon_{jk} \mathcal{Q} \nabla_j \mathcal{Q} \nabla_k \mathcal{Q}], \quad (1)$$

где $\int_{\mathbf{x}} = \int d^2\mathbf{x}$ и ε_{jk} обозначает символ Леви-Чивиты. Поле \mathcal{Q} представляет собой бесследовую эрмитову матрицу, определенную на $N_r \times N_r$ репличном, 2×2 запаздывающе-опережающем (RA) и 2×2 спиновом пространствах, которая удовлетворяет стандартному нелинейному условию нормировки и симметричному соотношению Боголюбова-де Жена (БдЖ):

$$\mathcal{Q}^2 = 1, \quad \mathcal{Q} = -\overline{\mathcal{Q}}, \quad \overline{\mathcal{Q}} = \mathbf{s}_2 L_0 \mathcal{Q}^T L_0 \mathbf{s}_2, \quad L_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s}_0 \otimes \hat{1}_r \\ \mathbf{s}_0 \otimes \hat{1}_r & 0 \end{pmatrix}_{\text{RA}}. \quad (2)$$

Здесь индекс RA означает матрицу, действующую в пространстве RA. Параметр g (g_H) обозначает затравочную безразмерную продольную (поперечную) спиновую проводимость, $\hat{1}_r$ обозначает единичную матрицу в пространстве реплик, а \mathbf{s}_j — стандартные матрицы Паули, действующие в спиновом пространстве. Заметим, что из симметричных соображений последний (топологический) член в правой части ур. (1) имеет точно такой же вид, как и в случае класса A [33].

Нелинейное ограничение на \mathcal{Q} -матрицу и соотношение БдЖ-симметрии определяют многообразие σ -модели: $\mathcal{Q} \in G/K = \text{Sp}(2N)/\text{U}(N)$, где $N = 2N_r$. В конце всех вычислений мы должны брать репличный предел: $N_r \rightarrow 0$. Возникновение нетривиальных топологических состояний в такой сигма модели может быть интерпретировано как чисто математический результат теории гомотопий (π_n — гомотопические группы):

$$\pi_2(\text{Sp}(2N)/\text{U}(N)) = \mathbb{Z} \quad (3)$$

этот результат может быть получен из цепочки равенств:

$$\pi_2(G/K) = \pi_1(K) = \pi_1(\text{U}(N)) = \mathbb{Z} \quad (4)$$

подробное описание данных соотношений и их физический смысл можно посмотреть в [52].

Чтобы устранить условие нелинейной нормировки, мы можем переписать \mathcal{Q} -матрицу в терминах локального матричного поворота:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{T}^{-1} \Lambda \mathcal{T}, \quad \Lambda = \sigma_3 \otimes \mathbf{s}_0 \otimes \hat{1}_r \quad (5)$$

где σ_3 — соответствующая матрица Паули в пространстве RA. Матрица Λ называется металлическим седлом и является не чем иным, как квазиклассической функцией Грина квазичастиц в диффузном пределе. Унитарные матрицы $\mathcal{T} \in \text{U}(N)$ удовлетворяют

$$\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^\dagger, \quad (\mathcal{T}^{-1})^\dagger L_0 \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_2 L_0 \mathcal{T}. \quad (6)$$

откуда следует, что такие матрицы должны принадлежать симплектической группе $\mathcal{T} \in \text{Sp}(2N)$.

1.2 Неунитарный поворот матричного базиса

Модель, определенная в разд. 1.1 в пределе одной реплики является 4×4 матричной теорией. Это может привести к сильному усложнению выкладок. Чтобы избежать потенциальных трудностей, выполним неунитарный поворот матричного базиса, вводя новую Q -матрицу, как

$$Q = U^{-1}QU, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{1}_r \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{\text{RA,S}} \quad (7)$$

Здесь индекс RA, S означает матрицу, действующую в объединенном RA и спиновом пространствах (внешняя структура RA, внутренняя спиновая). Мы используем общее свойство симплектической группы, а именно то, что кососимметрическая матрица, входящая в условие БДЖ симметрии может быть выбрана произвольным образом. Оказывается удобным выбрать ее так, чтобы она действовала только в спиновом пространстве:

$$Q = -\bar{Q}, \quad \bar{Q} = \mathbf{s}_2 Q^T \mathbf{s}_2. \quad (8)$$

Как будет показано ниже такое представление окажется самым удобным для получения инстантонных решений.

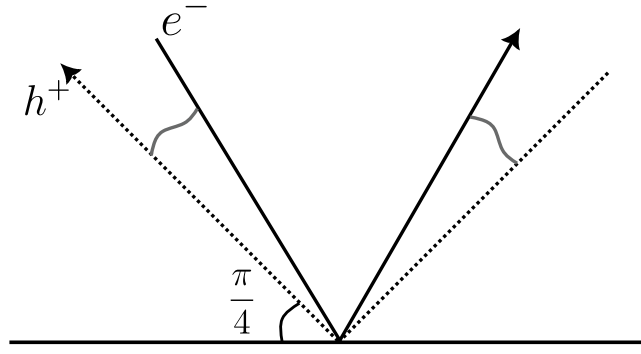
Также отметим, что вращение (7) меняет определение металлического седла:

$$\Lambda \rightarrow \underline{\Lambda} = \mathbf{s}_3 \otimes \hat{1}_r \otimes \hat{1}_{\text{RA}}. \quad (9)$$

Легко проверить, что преобразование (7) не меняет форму действия (1).

После преобразования (7) мы не можем различать пространства RA и реплики, поэтому удобно ввести новое обозначение: $n = 2N_r$ для размерности объединенного пространства RA/реплики.

Хочется отметить, что такой неунитарный поворот, хоть и выглядит несколько искусственно, в реальности имеет физическую интерпретацию. Оказывается, что используя краевую теорию для дираковских квазичастиц на границе сверхпроводника с $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ спариванием, разработанную в [38], после добавления в систему рассеяния на примесях (удовлетворяющего необходимым симметриям) можно получить краевую сигма модель, похожую на таковую для класса A (см. Раздел 2). Тогда, в терминах такой сигма-модели матричный поворот будет осуществлять переход от ψ -представления фермионных квазичастиц, которые переносят заряд к χ -представлению, которое можно интерпретировать как фермионные квазичастицы, переносящие спин [53]. Остановимся на этом подробнее в следующем разделе.


 Рис. 2: Когерентное андреевское состояние с $E = 0$ вблизи границы

1.3 Редукция в класс А

Как было отмечено в [27], действие $NL\sigma M$ (1) можно свести к $NL\sigma M$ для класса А, нарушив вращательную спиновую симметрию от $SU(2)$ до $U(1)$. Тогда матрица \mathcal{Q} в спиновом пространстве приобретает диагональный вид:

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_\uparrow & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_\downarrow \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_\downarrow = -L_0 \mathcal{Q}_\uparrow^\top L_0. \quad (10)$$

Тогда структура в спиновом пространстве исчезает и оказывается возможным, используя связь между диагональными компонентами матрицы \mathcal{Q} , написать единое действие только на \mathcal{Q}_\uparrow . Оно будет иметь вид:

$$S_\sigma^{(A)} = -\frac{g}{8} \int_x \text{Tr} (\nabla \mathcal{Q}_\uparrow)^2 + \frac{g_H}{8} \int_x \text{Tr} [\varepsilon_{jk} \mathcal{Q}_\uparrow \nabla_j \mathcal{Q}_\uparrow \nabla_k \mathcal{Q}_\uparrow], \quad (11)$$

что совпадает с известным результатом, полученным Пруискеным [33]. Здесь хочется отметить несколько важных моментов:

1. На оставшуюся \mathcal{Q} -матрицу осталось только три ограничения: бесследовость, эрмитовость и условие нормировки, как это и должно быть для класса А.
2. Микроскопически такая редукция (кроссовер) может быть реализована с помощью учета Зеемановского расщепления, что приводит к нарушению БдЖ симметрии и разрушению многообразия класса С до многообразия класса А.

2 Краевая нелинейная сигма-модель

Покажем в явном виде, что наличие краевых мод для класса С приводит к возникновению топологического члена в сигма-модельном действии. Для вывода краевой нелинейной сигма-модели мы будем использовать полученную в [38] одномерную краевую теорию для дираковских фермионов. Микроскопическое происхождение такой теории – разложение решеточной модели сверхпроводника с $d_{x^2-y^2}$ спариванием около нулей щели, с учётом

наличия нарушающего T -симметрию id_{xy} вклада в параметр порядка (именно он ответствен за квантование спиновой проводимости). Схематическое изображение такой краевой моды представлено на Рис. 2. Хочется также отметить, что полное микроскопическое описание структуры краевых состояний в таких системах до сих не получено. За подробностями вывода Гамильтониана см. вышеуказанный первоисточник, в данной главе мы сфокусируемся лишь на получении топологического члена в действии.

2.1 Краевая теория

Для начала определим вид краевой модели. Запишем Гамильтониан такой теории:

$$H_{\text{edge}} = \int dy \psi^\dagger (-iv_e \partial_y) \psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \quad (12)$$

$v_e = v_F$ – скорость Ферми квазичастиц. Такой Гамильтониан оказывается инвариантным относительно $SU(2)$ поворота спинора $\psi \rightarrow \mathcal{U}\psi$, где $\mathcal{U} = \exp(i\theta_i \mathbf{s}_i)$. В терминах таких фермионов плотность спина имеет вид ($\hbar = 1$):

$$S_i = \frac{1}{2} \psi^\dagger \mathbf{s}_i \psi \quad (13)$$

Для дальнейших вычислений оказывается удобным ввести новые переменные (сменить ψ -представление на χ -представление):

$$\psi_\uparrow = \chi_\uparrow, \quad \psi_\downarrow = \chi_\downarrow^\dagger \quad (14)$$

нетрудно заметить, что вид Гамильтониана (12) не изменится, однако изменится вид плотности спина по оси Oz :

$$S_z = \frac{1}{2} \chi^\dagger \chi \quad (15)$$

то есть плотность спина по оси Oz совпадает с плотностью χ -частиц. Конкретизируем преобразование симметрии для χ -частиц:

$$\chi \rightarrow \mathcal{C}(\chi^\dagger)^T, \quad \mathcal{C} = i\mathbf{s}_2 \quad (16)$$

это соответствует выбору $\theta_1 = \theta_0 = \theta_3 = 0$ и $\theta_2 = \pi/2$. Теперь учтем рассеяние на примесях, для этого запишем удовлетворяющий условиям БДЖ-симметрии вклад в Гамильтониан:

$$H = -\mathcal{C}H^T\mathcal{C}^{-1} \Rightarrow H_{\text{imp}}^{(\chi)} = \int dy \chi^\dagger(\eta_i \mathbf{s}_i) \chi, \quad V = \eta_i \mathbf{s}_i \quad (17)$$

где мы будем считать беспорядок нескоррелированными гауссовыми случайными величинами с дисперсией:

$$\langle \eta_i(y) \eta_j(y') \rangle = \lambda_0 \delta_{ij} \delta(y - y') \quad (18)$$

в терминах ψ -полей Гамильтониан беспорядка имеет вид:

$$H_{\text{imp}}^{(\psi)} = \int dy [\eta^+ \psi \sigma^- \psi + \text{H.c.} + \eta_z \psi^\dagger \psi] \quad (19)$$

где $\eta^\pm = \eta_x \pm i\eta_y$ и $\sigma^\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$. Мы видим возникновение аномальных слагаемых, что может быть интерпретировано как флуктуационная сверхпроводимость, а также наличие таких вкладов явно нарушает зарядовую симметрию, что приводит к несохранению числа частиц (зарядовый ток не является хорошей наблюдаемой). Хочется отметить, что данный Гамильтониан можно переписать в матричной форме введя биспинорное представление, или, иными словами, добавить PH (частично-дырочное) пространство:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \\ \psi_\uparrow^\dagger \\ \psi_\downarrow^\dagger \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow^\dagger \\ \psi_\downarrow^\dagger \\ \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}^T = \Psi^T \tau_x \quad (20)$$

где τ_x матрица, действующая в PH пространстве. В таком представлении матричная форма Гамильтониана имеет вид:

$$\mathcal{H}^{(\Psi)} = \begin{pmatrix} -iv_e \partial_y + \eta_3 & 0 & 0 & \eta_1 - i\eta_2 \\ 0 & -iv_e \partial_y + \eta_3 & -\eta_1 + i\eta_2 & 0 \\ 0 & -\eta_1 - i\eta_2 & -iv_e \partial_y - \eta_3 & 0 \\ \eta_1 + i\eta_2 & 0 & 0 & -iv_e \partial_y - \eta_3 \end{pmatrix} \quad (21)$$

можно проверить, что данный Гамильтониан при неунитарном матричном повороте (7) переходит в Гамильтониан χ -представления:

$$U \mathcal{H}^{(\Psi)} U^{-1} = H^{(\chi)} \otimes \hat{1}_{RA} \quad (22)$$

что и было упомянуто в 1.2.

Вывод нелинейной сигма-модели будем производить в χ -представлении, где итоговый Гамильтониан имеет вид:

$$H = \int dy \chi^\dagger (-iv_e \partial_y) \chi + \int dy \chi^\dagger (\eta_i \mathbf{s}_i) \chi \quad (23)$$

2.2 Вывод краевого действия

Используя полученный вид Гамильтониана запишем фермионное реплицированное действие:

$$S_{\text{rep}} = -i \chi^\dagger (H - i0) \chi = -i \sum_\alpha \int dy \chi_\alpha^\dagger (-iv_e \partial_y) \chi_\alpha - i \sum_\alpha \int dy \chi_\alpha^\dagger (\eta_i \mathbf{s}_i) \chi_\alpha \quad (24)$$

где α – репличный индекс, а также мы добавили бесконечно малую мнимую часть энергии для подсчета запаздывающих функций Грина. Следующий шаг – удвоение переменных для корректного получения гидродинамических (диффузионных) мод. Для этого введем дополнительную структуру в виде $P - H$ пространства:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi \\ \mathcal{C}_S(\chi^\dagger)^T \end{pmatrix}, \quad \bar{\Phi} = \Phi^T \mathcal{C}_S \otimes \mathcal{C}_{\text{PH}}^T, \quad \mathcal{C}_i = i\sigma_2^{(i)} \quad (25)$$

где \mathcal{C}_i – матрица зарядового сопряжения в соответствующем пространстве. После такого удвоения переменных действие будет иметь вид:

$$S_{\text{rep}} = -i\bar{\Phi}_\alpha (H - i\Lambda 0) \Phi_\alpha \quad (26)$$

где $\Lambda \sim \mathfrak{s}_3$ в $P - H$ пространстве. Для усреднения данного действия по беспорядку нам понадобится лишь второй момент случайной величины беспорядка [4, 16]:

$$\int_{i \times \text{sp}(N)} \text{tr}(AV) \text{tr}(BV) d\mu(V) = \lambda_0 \text{tr}(AB - A\mathcal{C}_S B^T \mathcal{C}_S^{-1}). \quad (27)$$

tr – след только в спиновом пространстве. Мы выбираем матрицы A и B в виде $\sum_j \Phi_j \bar{\Phi}_j$, где j – объединенный реплично-РН индекс. Нетрудно проверить, что для такой матрицы выполнено условие БДЖ-симметрии в спиновом пространстве:

$$\sum_j \Phi_j \bar{\Phi}_j = -\mathcal{C}_S \left(\sum_j \Phi_j \bar{\Phi}_j \right)^T \mathcal{C}_S^{-1} \quad (28)$$

Здесь также хочется упомянуть, что если бы мы выводили нелинейную сигма-модель из Ψ -представления, то из определения биспиноров (20) преобразование БДЖ симметрии имело бы вид:

$$X_{Q_\Psi} = -\tau_x \mathcal{C} X_{Q_\Psi}^T \mathcal{C}^{-1} \tau_x, \quad X_{Q_\Psi} = \Psi_{p,\alpha}^\sigma \Psi_{p',\alpha'}^{\dagger\sigma'} \quad (29)$$

что совпадает с преобразованием БДЖ симметрии для NL σ M в изначальном базисе (2). Это в очередной раз доказывает, что введенный нами неунитарный матричный поворот осуществляет переход от ψ к χ представлению в терминах изначальных фермионов. После усреднения по беспорядку получаем действие с четверным взаимодействием:

$$S_{\text{rep}} = -i \sum_j \int dy \bar{\Phi}_j (-iv_e \partial_y) \Phi_j - \lambda_0 \int dy \text{tr} \left(\sum_{j,j'} \Phi_j \bar{\Phi}_j \Phi_{j'} \bar{\Phi}_{j'} \right) \quad (30)$$

четверное взаимодействие оказывается возможным переписать как:

$$\text{tr} \left(\sum_{j,j'} \Phi_j \bar{\Phi}_j \Phi_{j'} \bar{\Phi}_{j'} \right) = -\text{Tr} X_Q X_Q, \quad (X_Q)_{jj'} = \sum_\sigma \Phi_j^\sigma \bar{\Phi}_{j'}^\sigma \quad (31)$$

здесь Tr – обозначает след в репличном и РН пространствах. Используя преобразование Хаббарда-Стратоновича, оказывается возможным распарить четверное взаимодействие с помощью введения эрмитового матричного поля Q :

$$S_{\text{rep}} = -\frac{1}{4\lambda_0} \int dy \text{Tr} Q^2 - i \int dy \bar{\Phi} (H_0 - iQ) \Phi \quad (32)$$

Хочется отметить, что у матрицы Q исчезает структура в спиновом пространстве, что является следствием сохранения спина для Гамильтонианов класса С. Из определения векторов Φ получаем, что $2n \times 2n$ матрица Q удовлетворяет условию:

$$Q = -C_{\text{РН}} Q^T C_{\text{РН}}^{-1} = -s_2 Q^T s_2 \quad (33)$$

что совпадает с (8). Производя стандартное интегрирование по грассмановым переменным (выраженное через корень из детерминанта), получаем краевое действие:

$$S_\sigma = -\frac{1}{4\lambda_0} \int dy \text{Tr} Q^2 + \text{Tr} \ln (iv_e \partial_y + iQ) \quad (34)$$

Фактор $1/2$, приходящий из корня определителя, сокращается с фактором 2, происходящего из тривиальности матричной структуры в спиновом пространстве. Седловое решение имеет стандартный вид $Q = \underline{\Lambda}/2\tau$, где $\tau = 2\lambda_0/v_e$ из условия самосогласования.

Здесь также хочется явно показать как микроскопически реализован кроссовер в класс А. Добавление Зеемановского поля в терминах ψ фермионов имеет вид:

$$S_Z = -ih_Z \int dy \psi^\dagger s_3 \psi \quad (35)$$

где h_Z – Зеемановское поле. В терминах χ -фермионов такой вклад явно нарушает условие БдЖ симметрии:

$$S_Z = -ih_Z \int dy \chi^\dagger s_0 \chi, \quad s_0 = C s_0 C^{-1} \neq -C s_0 C^{-1} \quad (36)$$

тогда кроссовер оказывается возможным реализовать с помощью управления Зеемановским полем: класс С при $h_Z = 0$ и класс А при $h_Z \rightarrow \infty$. Также появление такого вклада в Гамильтониане приводит к тому, что условие (17) перестает выполняться для всего Гамильтониана, а значит действие после усреднения по беспорядку не сводится к выражению (30).

2.3 Диффузионный предел

Запишем стандартную параметризацию Q -матрицы в терминах матриц поворота (тут мы пренебрегаем массивной частью теории):

$$Q = \frac{1}{2\tau} t^{-1} \underline{\Lambda} t \quad (37)$$

тогда с точностью до постоянных вкладов, действие приобретает вид:

$$S = \text{Tr} \ln (\mathcal{B}[t] + G_0^{-1}), \quad \mathcal{B}[t] = H_0 - tH_0t^{-1} = iv_e t \partial_y t^{-1} = iv_e U[t] \quad (38)$$

где $G_0^{-1} = -H_0 + i\Lambda/2\tau$. Раскладывая след логарифма по вкладу матриц t , получаем:

$$S \approx \text{Tr} \mathcal{B}[t]G_0 - \frac{1}{2} \text{Tr} \mathcal{B}[t]G_0\mathcal{B}[t]G_0 \quad (39)$$

рассмотрим каждый вклад по отдельности:

$$\text{Tr} \mathcal{B}[t]G_0 = iv_e \int dy \text{Tr} (t \partial_y t^{-1} G_0(y, y)) = \frac{1}{2} \int dy \text{Tr} (t \partial_y t^{-1} \Lambda) = S_{\text{top}} \quad (40)$$

где мы воспользовались выражением для функции Грина в совпадающих точках:

$$G_0(y, y) = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{-v_e p + i\Lambda/2\tau} = -\frac{i}{2v_e} \Lambda \quad (41)$$

Отметим, что полученное выражение (40) представляет собой топологический θ -член, записанный в своей краевой форме. Теперь разберемся со вторым слагаемым в (39):

$$-\frac{1}{2} \text{Tr} \mathcal{B}[t]G_0\mathcal{B}[t]G_0 = \frac{v_e^2}{2} \int dy \int \frac{dp}{2\pi} \text{Tr} \left(U[t] \frac{1}{-v_e p + i\Lambda/2\tau} U[t] \frac{1}{-v_e p + i\Lambda/2\tau} \right), \quad (42)$$

где мы учли диффузионное приближение, состоящее в том, что $Q \sim \text{const}$ на масштабе $l = v_e \tau$. Важно, что в реальности для использования диффузионного приближения нужно стартовать с квазиодномерной задачи (иными словами, нужно учесть, что у нас число краевых каналов $N_{\text{ch}} \gg 1$), однако это качественно не меняет полученные результаты, а лишь усложняет выкладки. После взятия интеграла по импульсам в (42), получаем кинетический член в сигма модельном действии:

$$\frac{v_e \tau}{4} \int dy \text{Tr} (U[t]U[t] - U[t]\Lambda U[t]\Lambda) = -\frac{v_e \tau}{8} \int dy \text{Tr} (\partial_y q)^2. \quad (43)$$

где мы ввели краевую матрицу $q(y) = t^{-1}\Lambda t$. Тогда итоговое действие краевой нелинейной сигма-модели принимает вид:

$$S_q = -\frac{l}{8} \int dy \text{Tr} (\partial_y q)^2 + \frac{1}{2} \int dy \text{Tr} (t \partial_y t^{-1} \Lambda), \quad q = -s_2 q^T s_2 \quad (44)$$

Здесь мы можем заметить, что полученное действие является одномерным (краевым) аналогом двумерного (объемного) действия (1), которое мы используем для исследования критического поведения системы в режиме СКЭХ.

Разберемся теперь с нарушающим симметрию Зеемановским вкладом в действие. Рассмотрим детерминированный случай, когда Зеемановское поле не является случайным.

Тогда, после удвоения переменных такой вклад можно записать как:

$$S_Z = -i \int dy \bar{\Phi}_\alpha (h_Z \underline{\Lambda}) \Phi_\alpha \quad (45)$$

Так как такой вклад квадратичный по полям Φ , мы можем сразу проинтегрировать по грассмановым переменным. Тогда, после интегрирования мы получаем:

$$S_\sigma = -\frac{1}{4\lambda_0} \int dy \text{Tr} Q^2 + \text{Tr} \ln (iv_e \partial_y + iQ - h_Z \underline{\Lambda}) \quad (46)$$

Как видно, появление такого вклада эффективно действует как возникновение массы в некоторых диффузионных пропагаторах. После разложения в окрестности седлового решения (37) до ведущего (безградиентного) порядка, получаем вклад, нарушающий БДЖ симметрию:

$$S_Z = \frac{ih_Z}{2v_e} \int dy \text{Tr} \underline{\Lambda} q \quad (47)$$

как видно, такой вклад представляет собой оператор, аналогичный \mathcal{K}_1 (см. уравнение (111)) для объемного случая, что подтверждает выбор аномальной размерности $\gamma_{\mathcal{K}}$ оператора кроссовера в Главе 6.4.

3 Инстантонные решения с топологическим зарядом равным ± 1

В данном разделе демонстрируется, как пользуясь формализмом, разработанным А.М.М Пруискеным можно получить инстантонные решения в первом топологическом секторе (одноинстантонное приближение), а также основные отличия таких решений от инстантонных решений для класса А. Дальше в этом разделе будут рассмотрены малые флуктуации в окрестности инстантонного решения, решена задача Штурма-Лиувилля для возникающих операторов типа Шредингера. Данное рассмотрение поможет нам при дальнейшем подсчете гауссовых функциональных детерминантов, которые необходимы для вычисления физических наблюдаемых методом перевала.

3.1 Построение инстантонного решения

Для получения седловых решений с нетривиальными топологическими свойствами будем следовать работе [54]. Существование устойчивых инстантонных конфигураций поля \mathcal{Q} следует из неравенства Полякова-Шварца:

$$\text{Tr} (\nabla_x \mathcal{Q} \pm i \mathcal{Q} \nabla_y \mathcal{Q})^2 \geq 0 \quad (48)$$

удобным оказывается переписать его в терминах топологического заряда $\mathcal{C}[\mathcal{Q}]$:

$$\frac{1}{16} \int_x \text{Tr} (\nabla \mathcal{Q})^2 \geq \pi |\mathcal{C}[\mathcal{Q}]|, \quad \mathcal{C}[\mathcal{Q}] = \frac{1}{16\pi i} \int_x \text{Tr} \varepsilon_{jk} \mathcal{Q} \nabla_j \mathcal{Q} \nabla_k \mathcal{Q} \quad (49)$$

Замечаем, что полученный нами результат имеет вид сигма-модельного действия, а следовательно, стабильные конфигурации матричного поля, которые минимизируют действие, определяются уравнением самодуальности:

$$\nabla_x \mathcal{Q} \pm i \mathcal{Q} \nabla_y \mathcal{Q} = 0. \quad (50)$$

Отметим, что уравнение (50) инвариантно относительно преобразований (7). Решать его удобнее после неунитарного поворота. Тогда рецепт построения инстантонного решения может быть описан так: установим количество реплик в повернутом базисе равным единице, $n = 1$, тогда уравнение (50) можно решить в терминах инстантона Белавина-Полякова, аналогичного тому, который был получен Пруискеным для класса А [34]:

$$\Lambda_{\text{inst}, n=1} = \begin{pmatrix} |e_1|^2 - e_0^2 & 2e_0 e_1 \\ 2e_0 e_1^* & -(|e_1|^2 - e_0^2) \end{pmatrix}, \quad (51)$$

где

$$e_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{|z - z_0|^2 + \lambda^2}}, \quad e_1 = \frac{z - z_0}{\sqrt{|z - z_0|^2 + \lambda^2}}. \quad (52)$$

Здесь $z_0 = x_0 + iy_0$ обозначает положение центра инстантона, а λ — его размер. Топологический заряд (49) для этого решения равен единице: $\mathcal{C}[\mathcal{Q}] = 1$. Решение с отрицательным топологическим зарядом (антиинстантон) можно получить комплексным сопряжением решения (51).

Обобщение решения (51) для случая $n > 1$ строится в форме, которая явно нарушает репличную симметрию:

$$\Lambda_{\text{inst}, n>1} = \begin{pmatrix} \Lambda_{\text{inst}, n=1} & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{s}_3 & \dots \\ & \dots & \\ \dots & 0 & \mathbf{s}_3 \end{pmatrix}_r. \quad (53)$$

Здесь нижний индекс r означает, что матрица записана в пространстве реплик. Следовательно, полное инстантонное многообразие можно записать в терминах унитарных вращений \mathcal{T}_0 и \tilde{R} относительно металлического седла $\underline{\Lambda}$:

$$\mathcal{Q}_{\text{inst}} = \mathcal{T}_0^{-1} \Lambda_{\text{inst}, n>1} \mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_0^{-1} \tilde{R}^{-1} \underline{\Lambda} \tilde{R} \mathcal{T}_0, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & \hat{1}_r \end{pmatrix}_r = \begin{pmatrix} e_1^* & 0 & e_0 & 0 \\ 0 & \hat{1}_r & 0 & 0 \\ -e_0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{1}_r \end{pmatrix}_{\mathbf{s}, r} \quad (54)$$

Здесь $\mathcal{T}_0 \in \text{Sp}(2n)$ обозначает произвольное глобальное унитарное вращение, описыва-

ющее ориентацию инстантона в смежном пространстве $\text{Sp}(2n)/\text{U}(n)$. Можно проверить, что $\mathcal{Q}_{\text{inst}}$ удовлетворяет соотношению симметрии БДЖ (8). Классическое действие для инстантонного решения (54) конечно:

$$S_{\text{cl}} = -\pi g + \pi i g_H. \quad (55)$$

Заметим, что классическое действие S_{cl} не зависит от z_0 , λ и \mathcal{T}_0 , т.е. их можно идентифицировать как нулевые моды действия NL σ M. Как было сказано выше, из микроскопической теории [38, 40] известно, что плато поперечной спиновой проводимости возникают на четных целых значениях кванта спиновой проводимости, поэтому в отличие от класса A (ЦКЭХ) разбить g_H нужно на целое число $k \in \mathbb{Z}$ и дробную часть θ/π в виде:

$$g_H = 2k + \theta/\pi, \quad 0 < \theta \leq 2\pi. \quad (56)$$

здесь коэффициент перед топологическим θ -углом определен так, чтобы полный оборот соответствовал переходу между плато.

В данной работе будут рассматриваться только одноинстантонные эффекты, иными словами инстантоны с топологическими зарядами $|\mathcal{C}[\mathcal{Q}]| \geq 2$ будут исключены из рассмотрения. Оправданность такого рассмотрения является не до конца доказанной [55], однако мы предполагаем, что из-за экспоненциальной малости много инстантонных поправок (см. (55)) для качественного описания свойств спинового квантового эффекта Холла ими можно пренебречь.

Для полноты картины необходимо сравнить полученное решение с инстантоном класса A. Для этого запишем инстантон в изначальном матричном базисе $\mathcal{Q}_{\text{inst}}$ ($n = 1$):

$$\mathcal{Q}_{\text{inst}} = \frac{1}{r^2 + \lambda^2} \begin{pmatrix} r^2 \mathbf{s}_0 - \lambda^2 \mathbf{s}_1 & r \lambda e^{i\theta} (i \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_3) \\ -r \lambda e^{-i\theta} (i \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3) & -r^2 \mathbf{s}_0 - \lambda^2 \mathbf{s}_1 \end{pmatrix}_{RA} \quad (57)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{y}\right), \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (58)$$

Самое главное свойство данного решения – «размазанность» инстантона по спиновому пространству. Это свойство приводит к разрушению данного решения при попытке его редукции в класс A: так как данную матрицу нельзя диагонализировать в спиновом пространстве глобальным поворотом. Однако можно попытаться записать решение, которое будет удовлетворять редукции, оно окажется двухинстантонным ($\mathcal{C}[\mathcal{Q}] = \pm 2$):

$$\Lambda_{\text{inst}} = R^{-1} \Lambda R \quad (59)$$

Соответствующие матрицы поворота имеют вид:

$$R = \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & L_0 \bar{R}_0 L_0 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = R^\dagger = \begin{pmatrix} R_0^{-1} & 0 \\ 0 & L_0 R_0^T L_0 \end{pmatrix} \quad (60)$$

простыми словами построение такого решения можно описать так: мы помещаем в RR матричный элемент в редуцированной Q -матрице (10) инстантон Белавина-Полякова для класса A , после этого восстанавливаем AA матричный элемент с помощью их линейной связи с RR элементом. Тогда такое решение при редукции перейдет в два инстантона класса A , что следует из вида действия (11). Физически, это означает, что квантование спиновой проводимости для класса A происходит единицами (обычный целочисленный эффект Холла), а значит топологический заряд эффективно должен быть равен двойке (чтобы за один поворот θ -угла у нас происходило два квантовых перехода).

3.2 Квантовые флуктуации в окрестности инстантона

Для построения теории возмущений вблизи инстантонного решения воспользуемся экспоненциальной параметризацией Q -матрицы:

$$Q = \tilde{R}^{-1} \mathcal{V} \tilde{R}, \quad \mathcal{V} = e^{-W/2} \Lambda e^{W/2} \quad (61)$$

После нам нужно поставить ограничения на флуктуационную матрицу W :

1. Ввиду биекции между Q -матрицей и флуктуациями нам необходимо выбрать W антидиагональной в спиновом пространстве:

$$\{W, \Lambda\} = 0, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 & 0 \end{pmatrix}_S \quad (62)$$

2. Учитывая эрмитовость Q -матрицы, W должна быть антиэрмитовой матрицей:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \hat{w}_1 \\ -\hat{w}_1^\dagger & 0 \end{pmatrix}_S \quad (63)$$

3. Как следствие условия симметрии БдЖ, матрица W должна удовлетворять:

$$W = -\bar{W} \Rightarrow w_1^T = w_1 = w, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & \hat{w} \\ -\hat{w}^* & 0 \end{pmatrix}_S \quad (64)$$

Наличие инстантона может быть интерпретировано как появление неабелева векторного потенциала, $A_j = \tilde{R} \nabla_j \tilde{R}^{-1}$, в $NL\sigma M$ действии, т.е.:

$$-\frac{g}{16} \int_x \text{Tr} (\nabla \mathcal{Q})^2 = -\frac{g}{16} \int_x \text{Tr} (\nabla_j \mathcal{V} - [\mathcal{V}, A_j])^2. \quad (65)$$

После этого, используя полученные выше симметрии полей w и w^* , мы можем разложить

действие (65) до второго порядка по флуктуациям w , w^* :

$$\delta S_\sigma = -\frac{g}{8} \int d\mathbf{x} \mu^2(r) \left[\sum_{\alpha=2}^n w^{\alpha\alpha} O^{(0)} w^{*\alpha\alpha} + 2 \sum_{1 < \alpha < \beta \leq n} w^{\alpha\beta} O^{(0)} w^{*\alpha\beta} + 2 \sum_{\alpha=2}^n w^{1\alpha} O^{(1)} w^{*1\alpha} + w^{11} O^{(2)} w^{*11} \right], \quad (66)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$ и греческие индексы обозначают матричную структуру в репличном пространстве. Здесь мы определили операторы $O^{(a)}$ и меру $\mu^2(r)$:

$$O^{(a)} = \frac{(r^2 + \lambda^2)^2}{4\lambda^2} \left[\nabla_j + \frac{ia}{r^2 + \lambda^2} \varepsilon_{jk} x_k \right]^2 + \frac{a}{2}, \quad \mu(r) = \frac{2\lambda}{r^2 + \lambda^2} \quad (67)$$

Появление меры $\mu^2(r)$ указывает, что поиск системы собственных чисел и векторов удобнее проводить после обратной стереографической проекции из плоского пространства на сферу радиуса λ . Поэтому нам следует ввести новые переменные — сферические углы:

$$\cos \phi = \frac{r^2 - \lambda^2}{r^2 + \lambda^2} = \eta, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (68)$$

В терминах новых переменных величины e_1 и e_0 можно записать как:

$$e_0 = \sqrt{\frac{1-\eta}{2}}, \quad e_1 = \sqrt{\frac{1+\eta}{2}} e^{i\theta} \quad (69)$$

а операторы принимают вид:

$$O^{(a)} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{1 - \eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{ia}{1 - \eta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{a^2}{4} \frac{1 + \eta}{1 - \eta} + \frac{a}{2} \quad (70)$$

Оператор	Количество полей $w^{\alpha\beta}$	Вырождение
$O^{(0)}$	$(n^2 - n)/2$	1
$O^{(1)}$	$(n - 1)$	2
$O^{(2)}$	1	3

Таблица 1: Количество полей для каждого кинетического оператора

3.3 Собственная система для $O^{(a)}$

Собственную систему операторов (70) можно найти стандартным образом через решение уравнения типа-Шрёдингера:

$$O^{(a)} \Phi^{(a)}(\eta, \theta) = E^{(a)} \Phi^{(a)}(\eta, \theta) \quad (71)$$

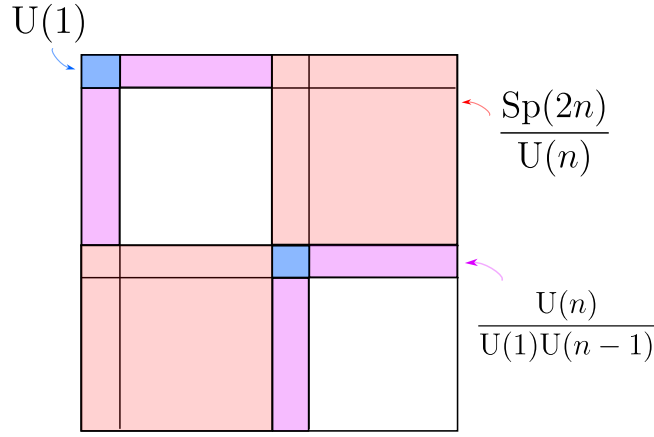


Рис. 3: Механизм нарушения симметрии в терминах генераторов (77) для произвольной матрицы из $\text{Sp}(2n)$

где собственные функции должны быть нормированы по отношению к мере $d\eta d\theta$. Подчеркнем, что операторы $O^{(a)}$ в точности совпадают с операторами, описывающими флуктуации вокруг инстантона в классе А. После решения соответствующей задачи можно получить, что собственные функции операторов выражаются в терминах полиномов Якоби:

$$P_n^{\alpha,\beta}(\eta) = \frac{(-1)^n (1-\eta)^{-\alpha}}{2^n n!} \frac{d^n}{d\eta^n} \frac{(1-\eta)^{n+\alpha}}{(1+\eta)^{-n-\beta}}. \quad (72)$$

как [34]

$$\Phi_{J,M}^{(a)} = C_{J,M}^{(a)} e^{-iM\theta} (1-\eta)^{\frac{a}{2}} (1-\eta^2)^{\frac{M}{2}} P_{J-M-s_a}^{M+a,M}(\eta), \quad (73)$$

где $s_a = 0, 1, 1$ для $a = 0, 1, 2$ соответственно. Собственные состояния нумеруются полным угловым моментом $J = 0, 1, 2, \dots$ для $a = 0$ и $J = 1, 2, 3, \dots$ для $a = 1, 2$. Соответствующие проекции момента импульса удовлетворяют условию $-J - a(a-1)/2 \leq M \leq J - s_a$. Нормализационные константы имеют вид

$$C_{J,M}^{(a)} = \frac{\sqrt{\Gamma(J+M+1+a(a-1)/2) \Gamma(J-M+1-s_a)}}{\sqrt{\pi} 2^{M+1+a(a-1)/2} \Gamma(J)} \times \begin{cases} \frac{\sqrt{2J+1}}{J+1}, & a = 0, \\ 1, & a = 1, \\ \frac{\sqrt{2J+1}}{\sqrt{J(J+1)}}, & a = 2. \end{cases} \quad (74)$$

а собственные энергии задаются как

$$E_J^{(a)} = (J - s_a)(J + 1 - s_a + a). \quad (75)$$

Подчеркнем, что в задаче имеются нулевые значения энергии при наименьшем допустимом угловом моменте $E_{J=s_a}^{(a)} = 0$. Об их аккуратном рассмотрении поговорим в следующем разделе.

3.4 Анализ нулевых мод

Наличие в полном наборе нулевых мод обычно приводит к расходимостям при поиске, например, функциональных детерминантов. Для того, чтобы этих расходимостей избежать, нужно рассматривать нулевые моды вне гауссова приближения. Для того чтобы это было возможно, мы должны научиться находить связь между симметриями инстантонного многообразия и флуктуационными матрицами.

Для начала хочется сказать, что число мод с нулевой энергией для соответствующих кинетических операторов определяет размер нового сигма-модельного многообразия. По Табл. 1 можно вычислить количество нулевых мод: оно равно $n^2 + 3n + 2$.

Отметим также, что собственные функции, соответствующие модам с нулевой собственной энергией, можно переписать через e_0 и e_1 :

$$\begin{aligned} \Phi_{0,0}^{(0)} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, & \Phi_{1,-1}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e_1, & \Phi_{1,0}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e_0, \\ \Phi_{1,-2}^{(2)} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}e_1^2, & \Phi_{1,-1}^{(2)} &= \sqrt{\frac{3}{2\pi}}e_0e_1, & \Phi_{1,0}^{(2)} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}e_0^2. \end{aligned} \quad (76)$$

Теперь покажем явно, что каждая нулевая мода связана с соответствующей инстантонной степенью свободы. Для этого нужно немного деформировать инстантонное многообразие, а именно ввести флуктуации инстантонных параметров $\xi_i = \{\lambda, x_0, y_0\}$ и генераторы t , которые можно определить как разложение матриц глобальных поворотов \mathcal{T}_0 рядом с единичной матрицей (мы считаем, что без флуктуаций мы находимся в точке многообразия, отвечающей инстантонному решению):

$$\mathcal{T}_0 = 1 + it. \quad (77)$$

Производя разложение Q -матрицы в ряд Тейлора по малому отклонению $\delta\xi$ получаем:

$$Q(\xi_i + \delta\xi_i) = \tilde{R}^{-1}(\xi_i) [\Lambda + [\Lambda, B]] \tilde{R}(\xi_i), \quad B = i\tilde{R}(\xi_i)t\tilde{R}^{-1}(\xi_i) - \delta\xi_i\tilde{R}(\xi_i) \left(\partial_{\xi_i}\tilde{R}^{-1}(\xi_i) \right). \quad (78)$$

Сравнивая полученное выше уравнение с выражением (61), получаем связь между флуктуационными полями w и нулевыми модами:

$$w = 2 \left(i\tilde{R}t\tilde{R}^{-1} - \delta\xi_i\tilde{R} \left(\partial_{\xi_i}\tilde{R}^{-1} \right) \right)_{12}. \quad (79)$$

Здесь индекс 12 соответствует индексу в спиновом пространстве в повернутом базисе. В явном виде это выражение приобретает вид:

$$\begin{aligned} w^{11} &= -4e_0e_1^* \left(it_{11}^{11} - \frac{\delta\lambda}{2\lambda} \right) + 2e_0^2 \left(\frac{\delta z^*}{\lambda} - it_{12}^{*11} \right) + 2ie_1^{*2}t_{12}^{11}, & w^{1\alpha} &= w^{\alpha 1} = 2i(e_1^*t_{12}^{1\alpha} - e_0t_{11}^{*1\alpha}), \\ w^{\alpha\beta} &= 2it_{12}^{\alpha\beta}, & \beta &\geq \alpha > 1. \end{aligned} \quad (80)$$

Теперь нам нужно рассмотреть аналогичную задачу для тривиального топологическо-

го сектора ($\mathcal{C}[Q] = 0$), т.е. произвести разложение около простого металлического седла $\underline{\Delta}$. Повторяя аналогичные вычисления, можно получить:

$$w^{\alpha\beta} = 2it_{12}^{\alpha\beta}. \quad (81)$$

число действительных параметров, характеризующих генераторы t для тривиального топологического сектора, равно $\mathcal{N}_0 = n^2 + n$, и, как и должно, равно размерности сигма-модельного многообразия в отсутствие инстантона. Тогда число нулевых мод для инстантонного решения можно классифицировать следующим образом:

$$n^2 + 3n + 2 = \underbrace{n^2 + n}_{\text{trivial}} + \underbrace{2n + 2}_{\text{Instanton}} = \mathcal{N}_0 + \underbrace{2n - 2 + 1}_{\text{instanton rotations}} + \underbrace{3}_{\xi_i}. \quad (82)$$

Инстантонное решение явно нарушает симметрию сигма-модельного многообразия. Схематично такой механизм нарушения симметрии в терминах генераторов t показан на Рис. 3. В частности, инстантон зацепляется за диагональный в спиновом пространстве блок матрицы \mathcal{T}_0 , что увеличивает размер седлового многообразия.

4 Вычисление поправки к свободной энергии

В прошлом разделе была полностью описана структура седлового инстантонного решения и квантовых гауссовых флуктуаций вокруг него, это позволит нам посчитать инстантонную поправку к свободной энергии, которая является основой вычисления поправок ко всем физическим наблюдаемым.

Так как каждый топологический сектор защищен, мы можем записать статистическую сумму в виде ряда по топологическому заряду:

$$\mathcal{Z}_{\text{full}} = \sum_{|W|=0}^{\infty} \mathcal{Z}_W \quad (83)$$

где \mathcal{Z}_W – статистическая сумма конфигураций поля Q в топологическом секторе с зарядом равным $\mathcal{C}[Q] = W$. Как было сказано выше, мы рассматриваем только первый нетривиальный топологический сектор, так как остальные экспоненциально подавлены. Тогда мы можем получить выражение для свободной энергии в данном приближении:

$$\mathcal{F} = \ln \mathcal{Z}_{\text{full}} \approx \ln \mathcal{Z}_0 + \frac{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_{-1}}{\mathcal{Z}_0} \quad (84)$$

хочется отметить, что это определение свободной энергии не содержит температуру, так как система квазичастиц рассматривается невзаимодействующей. Основная цель данного раздела — вычисление второго слагаемого в формуле (84).

На языке функционального интеграла нормализованную статистическую сумму, кото-

рая является целью наших вычислений можно определить как:

$$\frac{\mathcal{Z}_{\text{inst}}}{\mathcal{Z}_0} = \frac{\int \mathcal{D}[w, w^*] \exp(S_{cl} + \delta S_\sigma)}{\int \mathcal{D}[w, w^*] \exp(\delta S_0)}, \quad (85)$$

где S_0 имеет тот же вид, что и δS_σ (66), но все операторы $O^{(a)}$ заменены на $O^{(0)}$. Вычисление данного вклада можно разделить на две части. Первый – это расчет вклада массивных мод в гауссовском приближении, а второй – точное интегрирование по нулевым модам, которое необходимо проводить из-за расходимости соответствующих вкладов в функциональные детерминанты в гауссовском приближении. Поэтому схематически перепишем (85) как:

$$\frac{\mathcal{Z}_{\text{inst}}}{\mathcal{Z}_0} = A_{zm}[\lambda, z_0, g, \theta] e^{(S_{cl} + \mathcal{D})}. \quad (86)$$

Здесь A_{zm} – функционал, связанный с вкладом нулевых мод, который будет определен ниже, а \mathcal{D} – вклад массивных мод.

4.1 Детерминанты для массивных мод

В этом подразделе наша цель – вычисление вклада массивных мод \mathcal{D} в функциональный интеграл поправки к свободной энергии.

Введем функции Грина стандартным образом:

$$\mathcal{G}_a(\eta, \theta; \eta', \theta'; \omega) = \sum_{JM} \frac{|JM\rangle_{(a)(a)} \langle JM|}{E_J^{(a)} + \omega} \quad (87)$$

Тогда мы можем явно вычислить интеграл по полям w , используя разложение по собственным функциям операторов $O^{(a)}$:

$$w^{\alpha\beta}(\eta, \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{g}} \sum_{JM} u_{JM}^{\alpha\beta} \Phi_{JM}^{(a)*}. \quad (88)$$

Так как такая замена переменных представляет из себя линейное преобразование, Якобиан перехода от полей w к комплексным переменным u является просто константой, которая сократится с аналогичным вкладом от нулевого топологического сектора из знаменателя. После выполнения стандартного гауссовского интегрирования по комплексным коэффициентам $u_{JM}^{\alpha\beta}$ мы получаем:

$$\mathcal{D} = (n-1) \left(\text{tr} \ln \frac{1}{2} \mathcal{G}_1(0) - \text{tr} \ln \frac{1}{2} \mathcal{G}_0(0) \right) + \text{tr} \ln \mathcal{G}_2(0) - \text{tr} \ln \mathcal{G}_0(0) = -(n-1)D^{(1)} - D^{(2)}. \quad (89)$$

След функции Грина можно записать в терминах собственных значений:

$$\text{tr} \ln r_a^{-1} \mathcal{G}_a(0) = - \sum_{J=2}^{\infty} (2J+1+a(a-1)/2-s_a) \ln r_a E_J^{(a)}, \quad (90)$$

где $r_a = 1 + a(2 - a)$ для $a = 0, 1, 2$.

Суммы записанные в уравнении (89) имеют расходимости на больших значениях полного момента импульса. Для регуляризации этих расходимостей мы используем регуляризацию Паули-Вилларса. Выбор регуляризации здесь обоснован тем, что все топологические особенности системы (в частности инстантонные решения) станут irrelevantны при $d > 2$, поэтому стандартная $2 + \epsilon$ -регуляризация нам не подойдет. Регуляризация будет определена стандартным для квантовой теории поля образом. Мы используем регуляторные поля Паули-Вилларса с большими массами $\mathcal{M}_f \gg 1$ ($\mathcal{M}_0 = 0$) и другой метрикой e_f ($e_0 = 1$) [34, 54, 56]. А именно, определим следующие соотношения для Паули-Вилларсовских масс и метрик:

$$\sum_{f=0}^K e_f \mathcal{M}_f^k = 0, \quad \sum_{f=1}^K e_f \ln \mathcal{M}_f = -\ln \mathcal{M}, \quad (91)$$

где $0 \leq k < K$ (k необязательно является целым числом). Параметр K должен быть выбран достаточно большим, чтобы исключить все расходимости, кроме логарифмических. Тогда регуляризованная теория определяется как

$$\delta S_\sigma^{(\text{reg})} = \delta S_\sigma^{(0)} + \sum_{f=1}^K e_f \delta S_\sigma^{(f)}. \quad (92)$$

Таким образом, результат интегрирования по массивным модам (см. ур. (89)), может быть переписан как:

$$\text{tr} \ln r_a^{-1} \mathcal{G}_a(0) \rightarrow \text{tr} \ln r_a^{-1} \mathcal{G}_a(0) + \sum_{f=1}^K e_f \text{tr} \ln r_a^{-1} \mathcal{G}_a(\mathcal{M}_f^2). \quad (93)$$

Следовательно, регуляризованные версии функций $D^{(a)}$ приобретают вид:

$$\begin{aligned} D_{\text{reg}}^{(a)} = & \sum_{J=2}^{\infty} (2J + a - 1) \ln r_a E_J^{(a)} - \sum_{J=1}^{\infty} (2J + 1) \ln r_a E_J^{(0)} \\ & + \sum_{f=1}^K e_f \left[\sum_{J=1}^{\infty} (2J + a - 1) \ln r_a \left(E_J^{(a)} + \mathcal{M}_f^2 \right) \right. \\ & \left. - \sum_{J=0}^{\infty} (2J + 1) \ln r_a \left(E_J^{(0)} + \mathcal{M}_f^2 \right) \right]. \quad (94) \end{aligned}$$

Заметим, что из-за наличия конечной массы \mathcal{M}_f^2 операторы $O^{(a)} + \mathcal{M}_f^2$ не имеют нулевых мод. Оказывается, что регуляризованные детерминанты $D_{\text{reg}}^{(a)}$ могут быть выражены через аналогичные детерминанты для соответствующей задачи в классе А. Используя резуль-

таты работы [54], мы получаем

$$\begin{aligned}
 D_{\text{reg}}^{(1)} &= D_{\text{reg}, A}^{(1)} - \ln 2, \\
 D_{\text{reg}, A}^{(1)} &= -\ln \mathcal{M} + \frac{3}{2} - 2 \ln 2, \\
 D_{\text{reg}}^{(2)} &= -2 \ln \mathcal{M} + 4 - \ln 2 - 3 \ln 3.
 \end{aligned} \tag{95}$$

Следовательно, мы получаем окончательный результат для регуляризованного определителя, полученный в результате интегрирования по массивным модам.

$$\mathcal{D} = (n+1) \ln \mathcal{M} e^{\gamma-1/2} - \frac{3(n-1)}{2} + (3n-2) \ln 2 - 4 + 3 \ln 3 - (n+1)(\gamma-1/2). \tag{96}$$

Здесь для целей, которые будут понятны дальше, мы добавили и вычли константу $(n+1)(\gamma-1/2)$, где $\gamma \approx 0,577$ — константа Эйлера. Причина возникновения логарифмической расходимости (наличие в ответе логарифма большой массы $\ln \mathcal{M}$) также станет понятна позже.

4.2 Якобиан нулевых мод

Подробный расчет якобиана для коллективных мод разработан в [34], здесь мы представляем только итоговое выражение, с указанием на особенности класса C. Чтобы получить якобиан для нулевых мод, запишем явные выражения для коэффициентов $u_{J,M}^{\alpha\beta}$ через инстантонные степени свободы (80):

$$\begin{aligned}
 u_{1,-1}^{11} &= -\sqrt{\frac{4\pi g}{3}} \left(it_{11}^{11} - \frac{\delta\lambda}{2\lambda} \right), & u_{1,-2}^{11} &= \sqrt{\frac{2\pi g}{3}} it_{12}^{11}, \\
 u_{1,0}^{11} &= \sqrt{\frac{2\pi g}{3}} \left(\frac{\delta z^*}{\lambda} - it_{12}^{*11} \right), & u_{1,-1}^{1\alpha} &= \sqrt{\pi g} it_{12}^{1\alpha}, \\
 u_{1,0}^{1\alpha} &= -\sqrt{\pi g} it_{11}^{*1\alpha}, & u_{0,0}^{\alpha\beta} &= \sqrt{2\pi g} it_{12}^{\alpha\beta}, \quad \beta \geq \alpha > 1.
 \end{aligned} \tag{97}$$

Для вычисления Якобиана оказывается удобным переписать эти выражения в терминах матриц Якоби с блочной структурой в пространстве реплик:

$$(\text{Re } u_{1,-1}^{11}, \text{Im } u_{1,-1}^{11}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi g}{3\lambda^2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{4\pi g}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\lambda \\ t_{11}^{11} \end{pmatrix} \tag{98}$$

$$(\text{Re } u_{1,-2}^{11}, \text{Im } u_{1,-2}^{11}, \text{Re } u_{1,1}^{10}, \text{Im } u_{1,1}^{10}) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{2\pi g}{3}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2\pi g}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2\pi g}{3}} & \sqrt{\frac{2\pi g}{3\lambda^2}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{2\pi g}{3}} & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2\pi g}{3\lambda^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Re } t_{12}^{11} \\ \text{Im } t_{12}^{11} \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{99}$$

$$(\operatorname{Re} u_{1,-1}^{1\alpha}, \operatorname{Im} u_{1,-1}^{1\alpha}, \operatorname{Re} u_{1,0}^{1\alpha}, \operatorname{Im} u_{1,0}^{1\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\pi g} & 0 & 0 \\ \sqrt{\pi g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\pi g} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\pi g} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} t_{12}^{1\alpha} \\ \operatorname{Im} t_{12}^{1\alpha} \\ \operatorname{Re} t_{11}^{1\alpha} \\ \operatorname{Im} t_{11}^{1\alpha} \end{pmatrix} \quad (100)$$

$$(\operatorname{Re} u_{0,0}^{\alpha\beta}, \operatorname{Im} u_{0,0}^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2\pi g} \\ \sqrt{2\pi g} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} t_{12}^{\alpha\beta} \\ \operatorname{Im} t_{12}^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (101)$$

с $\beta \geq \alpha > 1$. Здесь хочется указать на некоторые особенности такой записи. Во-первых, структура генераторов t , целиком определяется условиями БдЖ симметрии, отсюда, например следует, что t_{11}^{11} (верхняя пара индексов – репличная, нижняя – спиновая) является число действительным. Во-вторых, мера интегрирования по t выбрана таким образом, чтобы она давала правильные объемы соответствующих классов смежности и/или групп.

Используя эти выражения, благодаря блочной структуре полной матрицы Якоби, мы можем вывести якобиан для коллективных мод в нетривиальном топологическом секторе:

$$|J_{\text{inst}}| = \frac{2g}{3\lambda} \cdot \frac{4g}{9\lambda^2} \cdot g^{2n-2} \cdot (2g)^{n(n-1)/2} \quad (102)$$

Якобиан для тривиального топологического сектора можно получить аналогичным образом, используя уравнение (81):

$$|J_0| = (2g)^{n(n+1)/2}. \quad (103)$$

Следовательно, результирующий ответ для функционала A_{zm} имеет вид:

$$A_{\text{zm}} = \frac{8g^{n+1}}{27 \cdot 2^n} \int \frac{d^2 \mathbf{r}_0 d\lambda}{\lambda^3} \frac{\int \mathcal{D}[\mathcal{T}] \int \mathcal{D}[\mathcal{T}']}{\int \mathcal{D}[\mathcal{T}]}, \quad (104)$$

где $\mathcal{T} \in \operatorname{Sp}(2n)/\operatorname{U}(n)$ – глобальные матрицы вращения исходного NL σ M-многообразия, а \mathcal{T}' – матрицы вращения, индуцированные наличием инстантона. Последние соответствуют группе $\operatorname{U}(1)$ и классу смежности $\operatorname{U}(n)/[\operatorname{U}(1) \times \operatorname{U}(n-1)]$ (см. Рис. 3).

4.3 Итоговый результат

Используя уравнение (86), мы вычисляем инстантонную поправку к свободной энергии. Поскольку \mathcal{T} и \mathcal{T}' описывают вращательные нулевые моды (притом вклад \mathcal{T} сокращается из-за того, что он есть и в числителе и в знаменателе), интегрирование по ним сводится к объёму соответствующих многообразий. Используя известный результат [57, 58], можно написать, что:

$$\operatorname{vol}(\mathcal{T}') = \int \mathcal{D} \left[\frac{\operatorname{U}(n)}{\operatorname{U}(1) \times \operatorname{U}(n-1)} \right] \int \mathcal{D}[\operatorname{U}(1)] = \frac{2\pi^n}{\Gamma(n)}. \quad (105)$$

После всех подстановок находим одноинстантонный вклад в статистическую сумму

$$\frac{\mathcal{Z}_{\text{inst}}}{\mathcal{Z}_0} = \frac{n(n+1)}{2} G_n \int \frac{d\mathbf{r}_0 d\lambda}{\lambda^3} (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\mathcal{M}) + i\theta}, \quad G_n = \frac{2^{2n+3} e^{-n-(n+1)\gamma}}{\pi e^2 \Gamma(n+2)}. \quad (106)$$

Здесь мы в явном виде выделяем однопетлевую перенормированную в схеме регуляризации Паули-Вилларса спиновую проводимость (см. Приложение А),

$$g(\mathcal{M}) = g - \frac{1+n}{\pi} \ln \mathcal{M} e^{\gamma-1/2}. \quad (107)$$

иными словами, расходимость, полученная нами при вычислении детерминанта массивных мод является не чем иным, как слаболокализационной поправкой к спиновой проводимости квазичастиц [59].

Основной результат данного раздела можно обозначить как получение непертурбативной (экспоненциальной) поправки к свободной энергии. Также хочется отметить, что в репличном пределе $n \rightarrow 0$ поправка $\mathcal{Z}_{\text{inst}}/\mathcal{Z}_0$ пропорциональна n . Это приводит к ненулевой инстантонной поправке к свободной энергии, что в свою очередь может означать возникновение ненулевой поправки к теплоемкости электронной жидкости [56] при учете квазичастичного взаимодействия.

Результат (106) получен в рамках квадратичной теории для флуктуаций около инстантонного решения. Следовательно, g в предэкспоненциальном факторе под знаком интеграла в ур. (106) остается затравочным. Из похожих вычислений для теории Янга-Миллса [60–63], оказывается возможным ожидать, что рассмотрение флуктуаций за пределами гауссового приближения приведет также к замене g на $g(\mathcal{M})$ и в предэкспоненциальном множителе. Однако двухпетлевые вычисления на фоне инстантона сильно выходят за рамки данной работы.

5 Аномальные размерности чисто-скейлинговых операторов

Наша следующая цель состоит в том, чтобы вычислить инстантонные поправки к чисто-скейлинговым операторам, их подробный вывод и описание структуры для класса С подробно описаны в [4, 27], для класса А [64]. В данной работе сфокусируемся лишь на получении инстантонных поправок и их анализе, для этого опишем подробно метод перевала. Произвольный оператор \mathcal{O} , усредненный по NLσМ многообразию, можно записать в виде суммы по топологическим секторам (аналогично тому как это можно сделать для поправки к свободной энергии):

$$\langle \mathcal{O} \rangle \approx \langle \mathcal{O} \rangle_0 \left(1 - \frac{\mathcal{Z}_{\text{inst}} + \mathcal{Z}_{\text{inst}}^*}{\mathcal{Z}_0} \right) + \langle \mathcal{O} \rangle_{+1} + \langle \mathcal{O} \rangle_{-1} + \dots \quad (108)$$

Для вычисления средних в топологически нетривиальных секторах мы используем метод перевала (квазиклассическое приближение) в окрестности инстантонного решения, учитывая только флуктуации действия (для некоторых операторов мы также учтем флуктуации в предэкспоненте). Само седловое приближение можно, используя ур. (106), написать как:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\pm 1} \simeq \frac{n(n+1)}{2} G_n \int \frac{d\mathbf{r}_0 d\lambda}{\lambda^3} \langle \mathcal{O} \rangle_{\mathcal{T}} (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\mathcal{M}) \pm i\theta}, \quad (109)$$

где

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\mathcal{T}_0} = \frac{\int \mathcal{D}[\mathcal{T}_0] \mathcal{O}[\mathcal{Q}_{\text{inst}}]}{\text{vol}(\mathcal{T}_0)}, \quad \mathcal{T}_0 \in \text{U}(n). \quad (110)$$

Здесь мы явно учли, что оператор \mathcal{O} , вычисляемый на инстантонном решении, зависит от унитарных вращений \mathcal{T}_0 (при наличии в действии членов, нарушающих симметрию остаются только оффдиагональные компоненты матрицы вращений). При выполнении данных вычислений оказывается удобным работать с операторами, выраженными через исходные матрицы \mathcal{Q} до поворота матричного базиса.

5.1 Средняя локальная плотность состояний

Рассмотрим сначала оператор с одной \mathcal{Q} -матрицей:

$$\langle \mathcal{K}_1[\mathcal{Q}] \rangle = \frac{1}{4} \langle \text{tr} \mathcal{Q}_{RR}^{\alpha\alpha} - \text{tr} \mathcal{Q}_{AA}^{\alpha\alpha} \rangle \quad (111)$$

где tr — след только по спиновому пространству, а α — фиксированный репличный индекс. Хочется отметить, что среднее значение локальной плотности состояний пропорционально $\langle \mathcal{K}_1[\mathcal{Q}] \rangle$. Удобно использовать параметризацию \mathcal{Q} -матрицы в терминах отклонения от "металлического" седла Λ :

$$\mathcal{Q}_{\text{inst}} = \Lambda + U^{-1} \mathcal{T}^{-1} \rho \mathcal{T} U, \quad \mathcal{T} \in \text{U}(n). \quad (112)$$

здесь, напомним, матрица вращения U определена в уравнении (7). Матрица ρ имеет всего четыре ненулевых матричных элемента:

$$\rho_{00}^{11} = -\rho_{-1-1}^{11} = -2e_0^2, \quad \rho_{0-1}^{11} = (\rho_{-10}^{11})^* = 2e_0 e_1. \quad (113)$$

Запишем разложение для \mathcal{K}_1 :

$$\langle \mathcal{K}_1[\mathcal{Q}_{\text{inst}}] \rangle_{\mathcal{T}} = \frac{1}{4} \text{tr} \left[\Lambda_{RR}^{\alpha\alpha} - \Lambda_{AA}^{\alpha\alpha} \right] + \frac{1}{4} \sum_{p_1=\pm} p_1 \left\langle \text{tr} \left[U^{-1} \mathcal{T}^{-1} \rho \mathcal{T} U \right]_{p_1 p_1}^{\alpha\alpha} \right\rangle_{\mathcal{T}}. \quad (114)$$

Для усреднения этих формул по \mathcal{T} -поворотам мы используем стандартные соотношения из теории случайных матриц (см. [65]):

$$\langle (\mathcal{T}^{-1})_p^{a\alpha} \mathcal{T}_p^{\beta b} \rangle_{\mathcal{T}} = V_1 \delta^{ab} \delta^{\alpha\beta}, \quad \langle (\mathcal{T}^{-1})_p^{a\alpha} \mathcal{T}_p^{\beta b} (\mathcal{T}^{-1})_p^{c\gamma} \mathcal{T}_p^{\mu d} \rangle_{\mathcal{T}} = V_{1,1} [\delta^{ab} \delta^{\alpha\beta} \delta^{cd} \delta^{\gamma\mu} + \quad (115)$$

$$\delta^{ad} \delta^{\alpha\mu} \delta^{bc} \delta^{\beta\gamma}] + V_2 [\delta^{bc} \delta^{\alpha\beta} \delta^{da} \delta^{\gamma\mu} + \delta^{ab} \delta^{\alpha\mu} \delta^{cd} \delta^{\beta\gamma}], \quad (116)$$

где коэффициенты $V_{a,b}$ определяются следующим образом:

$$V_1 = \frac{1}{n}, \quad V_{1,1} = \frac{1}{n^2 - 1}, \quad V_2 = -\frac{1}{n(n^2 - 1)}. \quad (117)$$

После усреднения следует вычесть вклад от тривиального топологического сектора, пропорциональный нормированной поправке к свободной энергии (см. ур. (108)), тогда можно получить:

$$\langle \mathcal{K}_{(1)}[\mathcal{Q}_{\text{inst}}] \rangle_{\mathcal{T}} = -\frac{(n+1)}{2} G_n \int \frac{d\lambda}{\lambda} (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\mathcal{M}) + i\theta} \int d\mathbf{r}_0 \frac{\mu(r_0)}{\lambda}. \quad (118)$$

Член во второй строке уравнения. (118) имеет ультрафиолетовую расходимость. Чтобы устранить эту расходимость, мы используем трюк с методом пространственно-переменной массы [66]. В реальности этот трюк можно описать простыми словами так: логарифмическая расходимость садится на масштаб порядка размера системы, что физически неверно, так как в реальности существует ограничение – локализационная длина, которая экспоненциальна по проводимости (см. однопетлевую поправку (107)). Отсюда мы получим лишнюю степень проводимости в предэкспоненте. Сам же метод нужен для аккуратного вычисления численного коэффициента в предэкспоненте. Запишем инстантонную поправку к локальной плотности состояний (LDoS) (подробнее см. Приложение В):

$$\begin{aligned} \delta\nu = \nu_0 (\langle \mathcal{K}_{(1)}[\mathcal{Q}_{\text{inst}}] \rangle_{\mathcal{T}} + \langle \mathcal{K}_{(1)}[\mathcal{Q}_{\text{inst}}^*] \rangle_{\mathcal{T}}) &\simeq \pi \gamma_{(1)}^{(0)} G_n \int \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &\times (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\mathcal{M})} \cos \theta \int d\mathbf{r}_0 \frac{\mu(r_0)}{\lambda} \nu(\mu(r_0)). \end{aligned} \quad (119)$$

Здесь ν_0 обозначает голое значение LDoS, соответствующее ультрафиолетовому масштабу длины ℓ , $\nu(\mu)$ – это LDoS, вычисленная в однопетлевом приближении с учетом ренорм-группового регулятора (см. Прил. С ур. (175)):

$$\nu(\mu) = \nu_0 \left(1 - \frac{\gamma_{(1)}^{(0)}}{g} \ln \mu \ell \right), \quad \gamma_{(1)}^{(0)} = -\frac{1+n}{\pi}. \quad (120)$$

После использования вышеописанного трюка, интегрирование по \mathbf{r}_0 в ур. (119) (см. ссылку [54] и приложение С), можно провести в ведущем (однопетлевом приближении):

$$\delta\nu(\zeta\lambda') = G_n \int \frac{d\lambda}{\lambda} (\pi g)^{n+1} \nu(\zeta\lambda) \mathcal{H}_{\lambda}(g(\zeta\lambda)) e^{-\pi g(\zeta\lambda)} \cos \theta, \quad (121)$$

где мы записали:

$$\nu(\zeta\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{x} \mu^2(r) \nu(\mu(r)) = \nu_0 \left(1 + \frac{\gamma_{(1)}^{(0)}}{g} \ln(\lambda\zeta/\ell) e^{\gamma-1/2} \right), \quad \zeta = \frac{e}{2}$$

и определили функцию

$$\mathcal{H}_\lambda(g) = \frac{2\pi^2 \gamma_\lambda^{(0)}}{\beta_0 - \gamma_\lambda^{(0)}} g. \quad (122)$$

Здесь $\gamma_\lambda^{(0)}$ обозначает однопетлевую поправку к аномальной размерности чисто-скейлингового оператора, определяемого таблицей Юнга λ [27]. Отметим, что скейлинговые экспоненты x_λ задаются величинами $-\gamma_\lambda$ в критической точке. Следующие β_0 однопетлевая пертурбативная поправка к бета-функции для g (см. ссылку [37]):

$$-\frac{dg}{d \ln \lambda} = \beta_0 + \dots, \quad \beta_0 = \frac{n+1}{\pi}. \quad (123)$$

Отметим, что результат (122) получен в предположении, что $\gamma_\lambda^{(0)} \leq 0$. В общем случае находим способом, аналогичным описанному в [64],

$$\mathcal{H}_\lambda(g) = \frac{2\pi^2 \gamma_\lambda^{(0)}}{\beta_0 + |\gamma_\lambda^{(0)}|} \quad (124)$$

Результирующий логарифмический интеграл по λ в ур. (121) можно интерпретировать как интегрирование соответствующего уравнения ренорм-группы. Хочется отметить, что это уравнение называется подчиненным, так как для его решения необходимо решить уравнения на спиновые проводимости, которые будут определены ниже. В итоге, мы можем написать следующий результат для аномальной размерности усредненной по беспорядку LDoS:

$$\gamma_{(1)}(g, \theta) = \frac{\gamma_{(1)}^{(0)}}{g} + G_n(\pi g)^{n+1} \mathcal{H}_{(1)}(g) e^{-\pi g} \cos \theta. \quad (125)$$

Используя явные выражения для $\gamma_{(1)}^{(0)}$ и β_0 , см. уравнения. (120) и (123), находим в репличном пределе $n \rightarrow 0$,

$$\gamma_{(1)}(g, \theta) = -\frac{1}{\pi g} - \pi G_0(\pi g)^2 e^{-\pi g} \cos \theta. \quad (126)$$

Нетрудно заметить, что такая поправка является непертурбативной по спиновой проводимости g .

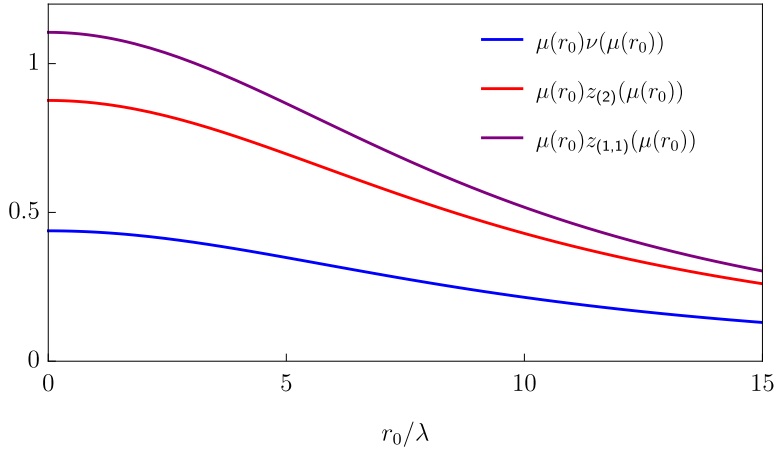


Рис. 4: Схематическое изображение подынтегральных выражений r_0 в уравнении. (118)

5.2 Операторы с двумя \mathcal{Q} -матрицами

Теперь перейдем к инстантонной перенормировке чисто-скейлинговых операторов с двумя \mathcal{Q} -матрицами. Они строятся следующим образом [27]:

$$\mathcal{K}_\lambda[\mathcal{Q}] = \frac{1}{16} \sum_{p_1, p_2 = \pm} p_1 p_2 \mathcal{P}_\lambda^{\alpha_1 \alpha_2; p_1 p_2}, \quad (127)$$

где корреляционная функция $\mathcal{P}_2^{\alpha_1 \alpha_2; p_1 p_2}$ определяется как

$$P_\lambda^{\alpha_1 \alpha_2; p_1 p_2} = \langle \text{tr } \mathcal{Q}_{p_1 p_1}^{\alpha_1 \alpha_1}(\mathbf{x}) \text{tr } \mathcal{Q}_{p_2 p_2}^{\alpha_2 \alpha_2}(\mathbf{x}) \rangle + \mu_\lambda \langle \text{tr } [\mathcal{Q}_{p_1 p_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{x}) \mathcal{Q}_{p_2 p_1}^{\alpha_2 \alpha_1}(\mathbf{x})] \rangle. \quad (128)$$

Существует только два собственных оператора ренорм-группы (то же самое, что чисто-скейлинговые) с $\lambda = (2)$ и $\lambda = (1,1)$. Соответствующие коэффициенты μ_λ имеют вид $\mu_{(2)} = -1$ и $\mu_{(1,1)} = 2$, подробнее см. [27]. После применения параметризации (112) и с помощью ур. (115) получаем (детали в Прил. В)

$$\begin{aligned} \delta z_\lambda = z_\lambda^{(0)} (\langle K_\lambda[\mathcal{Q}_{\text{inst}}] \rangle_{\mathcal{T}} + \langle K_\lambda[\mathcal{Q}_{\text{inst}}^*] \rangle_{\mathcal{T}}) &\simeq \pi \gamma_\lambda^{(0)} G_n \int \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &\times (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\mathcal{M})} \cos \theta \int d\mathbf{r}_0 \frac{\mu(r_0)}{\lambda} z_\lambda(\mu(r_0)). \end{aligned} \quad (129)$$

Подчеркнем, что мы опустили члены, конечные в ультрафиолете. Здесь $z_\lambda(\mu)$ описывает однопетлевую пертурбативную перенормировку соответствующего чисто-скейлингового оператора:

$$z_\lambda(\nu) = z_\lambda^{(0)} \left(1 - \frac{\gamma_\lambda^{(0)}}{g} \ln \mu \ell \right) \quad (130)$$

где однопетлевые коэффициенты задаются как

$$\gamma_{(2)}^{(0)} = -\frac{1+2n}{\pi}, \quad \gamma_{(1,1)}^{(0)} = -\frac{4+2n}{\pi}. \quad (131)$$

Повторяя те же действия, что и в предыдущем разделе для LDoS, находим инстантонную поправку к аномальной размерности операторов K_λ как

$$\gamma_\lambda = \frac{d \ln z_\lambda}{d \ln \lambda} = \frac{\gamma_\lambda^{(0)}}{g} + \frac{2\pi\gamma_\lambda^{(0)}}{\beta_0 + |\gamma_\lambda^{(0)}|} G_n(\pi g)^{n+2} e^{-\pi g} \cos \theta. \quad (132)$$

5.3 Операторы с произвольным числом \mathcal{Q} -матриц

Как можно заметить, ур.(129) не привязано к конкретному виду $\gamma_\lambda^{(0)}$. Поэтому, результат (132) оказывается справедливым для всех чисто-скейлинговых операторов, соответствующих таблице Юнга λ (так как поведение всех однопетлевых поправок в предэкспоненте для них одинаково см. Рис. 4 и Прил. В). В репличном пределе, $n \rightarrow 0$, пертурбативный коэффициент $\gamma_\lambda^{(0)}$ для $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ имеет вид [4]

$$\gamma_\lambda^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^s \lambda_j (\lambda_j + c_j), \quad c_j = 1 - 4j. \quad (133)$$

Тогда мы находим следующий результат для аномальной размерности произвольного чисто-скейлингового оператора без производных в репличном пределе $n \rightarrow 0$:

$$\gamma_\lambda = \frac{\lambda(\lambda + \mathbf{c})}{2\pi g} + \frac{\lambda(\lambda + \mathbf{c})}{2 + |\lambda(\lambda + \mathbf{c})|} \mathcal{C} (\pi g)^2 e^{-\pi g} \cos \theta, \quad (134)$$

где $\mathcal{C} = 16e^{-2-\gamma}$ и введен вектор $\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_s\}$.

Тогда выпишем основные результаты данного раздела:

1. Из того, что инстантонная поправка выражается через квадратичный оператор Казимира $\lambda(\lambda + \mathbf{c})$ аналогично однопетлевой пертурбативной поправке следует, что результат (134) остаётся инвариантным относительно преобразований симметрии, которые являются следствием инвариантности группы Вейля, а именно $\gamma_{(q)} = \gamma_{(3-q)}$ или $\gamma_{(1q)} = \gamma_{(2, 1q-1)}$. Как видно из аномальных размерностей в репличном пределе (см. Прил. В) для вычисленных инстантонных поправок выполняются соотношения $\gamma_{(1)} = \gamma_{(2)}$, $\gamma_{(3)} = \gamma_{(0)} = 0$, $\gamma_{(1,1,1)} = \gamma_{(2,1)}$.
2. Как станет понятно позже, переход между плато в режиме СКЭХ происходит при значении топологического угла $\theta = \pi$. Как видно из (132) инстантонная поправка имеет антилокализационный характер (так как имеет другой знак относительно поправки пертурбативной), как и должно было бы быть, так как сам переход является делокализационным.

6 Инстантонные поправки к спиновым проводимостям

Хоть аномальные размерности и являются основной характеристикой квантовых переходов андерсоновского типа, ключевой частью данной работы является вычисление ин-

стантонных поправок к спиновым проводимостям. Во-первых, пертурбативная поправка к поперечной проводимости g_H или, другими словами, к топологическому θ -углу равна нулю, так как соответствующий вклад в действие можно переписать как интеграл по границе образца и исключить из рассмотрения, поэтому за ее перенормировку ответственен именно вклад инстантонных решений в свободную энергию. Во-вторых, интересно разобратся как выглядит сама фазовая диаграмма для спинового квантового эффекта Холла, понять качественное поведение ренорм-группового потока и как оно связано с реальными свойствами перехода. В-третьих, из-за отсутствия детального микроскопического вывода репличной нелинейной сигма-модели для класса C с топологическим членом вид формул Кубо на сигма-модельном языке в RA-представлении не определен. Их вывод является одной из составных частей данной работы. Однако данный вывод является излишне громоздким для основного текста, однако его можно посмотреть в Приложении E. Итоговый вид формулы Кубо для продольной спиновой проводимости на сигма-модельном языке можно записать следующим образом (см. Приложение D)

$$g' = g + \frac{g}{8n(n+1)} \left\langle \frac{1}{2} \text{Tr}[\Lambda, \mathcal{Q}]^2 + (\text{Tr} \Lambda \mathcal{Q})^2 - (\text{Tr} 1)^2 \right\rangle - \frac{g^2}{64n(n+1)} \int d\mathbf{x}' \langle \text{Tr}[\Lambda, \mathcal{J}(\mathbf{x})][\Lambda, \mathcal{J}(\mathbf{x}')] \rangle. \quad (135)$$

Здесь мы ввели матричный ток $\mathcal{J} = \mathcal{Q} \nabla \mathcal{Q}$. Отметим, что уравнение (135) воспроизводит правильную пертурбативную перенормировку для g .

Аналогичное выражение можно получить и для поперечной спиновой проводимости (см. Приложение D):

$$g'_H = \frac{g^2}{8n(n+1)} \left\langle \int_{\mathbf{x}'} \varepsilon_{\mu\nu} \text{Tr} [\Lambda_- \mathcal{J}_\mu(\mathbf{x}) \Lambda_+ \mathcal{J}_\nu(\mathbf{x}')] \right\rangle \quad (136)$$

где $\Lambda_\pm = (1 \pm \Lambda)/2$ – проектор на запаздывающий или опережающий блоки.

6.1 Продольная спиновая проводимость

Начнем с подсчета инстантонных поправок к g' . Мы поступим так же, как и в Гл. 5. Поэтому в расчетах будет использовано седловое приближение (108).

Перед вычислением хочется отметить, что обе части продольной спиновой проводимости по отдельности не являются собственными операторами ренормгруппы. Например, диамагнитную часть (не содержащую производные) можно переписать через собственные операторы ренорм-группы (см. Приложение F):

$$\frac{g_{dm}}{g} = \alpha_1 \mathcal{K}_2^{\mu_2=2} + \beta_1 \mathcal{K}_2^{\mu_2=-1} + \mathcal{O}_0(\text{Tr} \hat{1}) \quad (137)$$

где \mathcal{O}_0 – оператор, содержащий только следы единичной матрицы и не дающий инстантонной поправки к продольной проводимости (из-за сокращения с тривиальным топло-

гическим сектором). Аналогичным образом можно записать вторую часть проводимости, ток-токовый коррелятор. Тем не менее, полный оператор спиновой проводимости является собственным оператором ренорм-группы, а поэтому, в формализме фонового поля перенормировку продольной проводимости можно записать как:

$$\delta g [\mathcal{Q}] \rightarrow Z \delta g [\mathcal{Q}_0] = Z (g_{dm} [\mathcal{Q}_0] + g_{j-j} [\mathcal{Q}_0]) \quad (138)$$

где $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{T}^{-1} \Lambda \mathcal{T}$ — «медленное» поле, а Z — перенормировка проводимости. Поэтому в случае продольной проводимости, наша задача упрощается и нам нужно вычислить только один вклад, упомянутый выше. Вычислим инстантонный вклад в токовую часть спиновой проводимости. Тогда нам не нужно будет разбираться с вкладом квантовых флуктуаций в предэкспоненциальный множитель, которые должны устранять инфракрасные расходимости, полученные, например, для средней локальной плотности состояний (см. ур. (118)). После стандартного вычисления, получаем:

$$-\frac{g^2}{64n(n+1)} \int d\mathbf{x}' \langle \text{Tr} [\Lambda, \mathcal{J}(\mathbf{x})] [\Lambda, \mathcal{J}(\mathbf{x}')] \rangle \rightarrow -G_n \int \frac{d\lambda}{\lambda} (\pi g)^{n+3} e^{-\pi g(\mathcal{M})} \cos \theta. \quad (139)$$

Тогда можно записать окончательное выражение для одноинстантонной поправки к диссипативной спиновой проводимости:

$$g'(\zeta \lambda') = g(\zeta \lambda') - G_n \int \frac{d[\zeta \lambda]}{\zeta \lambda} (\pi g)^{n+3} e^{-\pi g(\zeta \lambda)} \cos \theta \quad (140)$$

где λ' — текущий масштаб, на котором мы считаем проводимость, а $g(\zeta \lambda')$ — спиновая проводимость, с учетом пертурбативных поправок. Логарифмический интеграл (140) можно переписать в терминах ренорм-групповой бета-функции:

$$\beta_g(g, \theta) = -\frac{dg}{d \ln \lambda} = \frac{1+n}{\pi} + G_n (\pi g)^{n+3} e^{-\pi g} \cos \theta \quad (141)$$

6.2 Поперечная спиновая проводимость

Наш следующий шаг — вычислить перенормировку поперечной спиновой проводимости. Прежде всего следует заметить, что к g_H нет пертурбативных поправок (причина описана выше). Используя (136) и аппроксимацию (108), мы можем получить:

$$\frac{g^2}{8n(n+1)} \left\langle \int_{\mathbf{x}'} \varepsilon_{\mu\nu} \text{Tr} [\Lambda_- \mathcal{J}_\mu(\mathbf{x}) \Lambda_+ \mathcal{J}_\nu(\mathbf{x}')] \right\rangle \rightarrow -G_n \int \frac{d\lambda}{\lambda} (\pi g)^{n+3} e^{-\pi g(\mathcal{M})} \sin \theta \quad (142)$$

Используя (56), мы можем записать перенормировку топологического θ -угла:

$$\frac{\theta'(\zeta \lambda')}{\pi} = \frac{\theta(\zeta \lambda')}{\pi} - G_n \int \frac{d[\zeta \lambda]}{\zeta \lambda} (\pi g)^{n+3} e^{-\pi g(\zeta \lambda)} \sin \theta \quad (143)$$

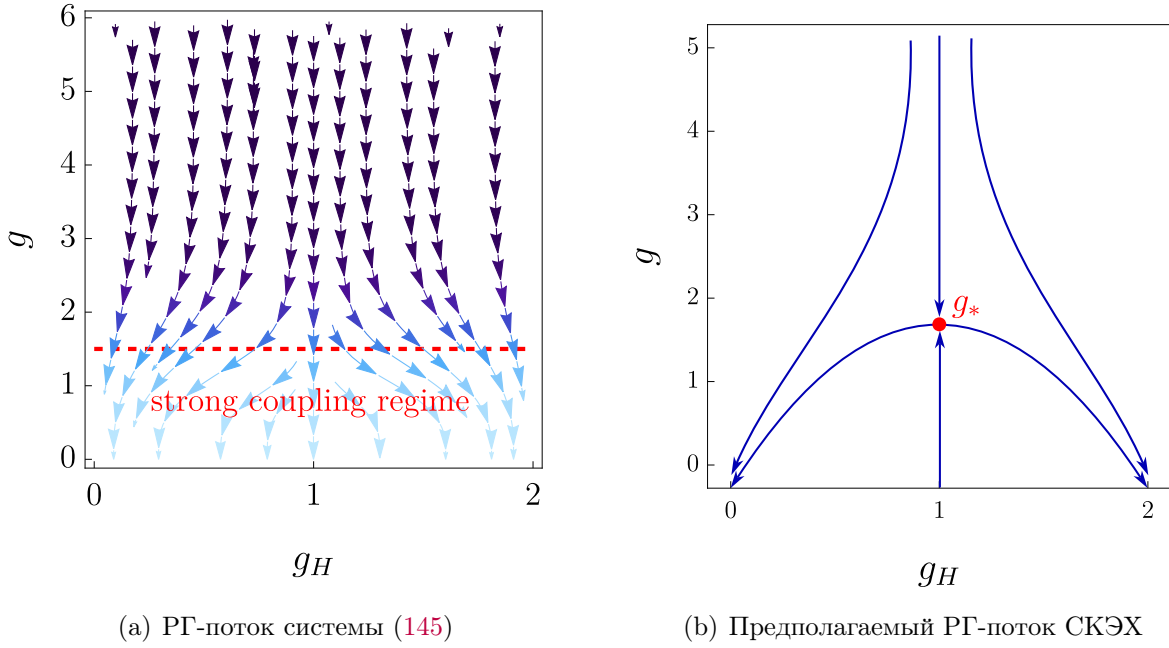


Рис. 5: Поведение ренорм-группового потока системы

где $\theta(\zeta\lambda)$ – затравочный тета-угол. Соответствующая бета-функция принимает вид:

$$\beta_\theta(g, \theta) = -\frac{d(\theta/2\pi)}{d \log \lambda} = \frac{G_n}{2} (\pi g)^{n+3} e^{-\pi g} \sin \theta \quad (144)$$

6.3 РГ-уравнения

Используя полученные выражения для β -функций с учетом инстантонных поправок, мы можем записать уравнение ренорм-группы для спиновых проводимостей:

$$\frac{dg}{d \ln \lambda} = -\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2 g} - \mathcal{D}_C (\pi g)^3 e^{-\pi g} \cos \theta, \quad \frac{d\theta}{d \ln \lambda} = -\pi \mathcal{D}_C (\pi g)^3 e^{-\pi g} \sin \theta \quad (145)$$

где $\mathcal{D}_C = 8e^{-2-\gamma}/\pi$ и мы учли двухпетлевую поправку к продольной спиновой проводимости. Данные уравнения имеют вид, похожий на тот, который получил Пруискен для случая ЦКЭХ [34]. Диаграмма ренорм-группового потока изображена на Рис. 5(a). Как видно из уравнения на топологический угол θ (что тоже самое, что и уравнение на поперечную проводимость g_H) имеется три фиксированные точки $0, \theta, \pi$. Из изгиба фазового потока можно предположить, что при $\theta = \pi$ может иметься фиксированная точка, соответствующая ненулевому значению продольной спиновой проводимости $g = g_*$ в критической точке, пример на Рис. 5(b). То есть, делокализационный переход возможен при переходе между плато $g_H = 0$ и $g_H = 2$, то есть при $g_H = 1$. Этот результат по 2π -периодичности угла θ может быть продолжен, а именно точка перехода при $g_H = 2k - 1$, а сами плато $g_H = 2k - 2$ и $g_H = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Такой результат и ожидается из квазиклассических соображений.

Также хочется отметить некоторые отличия данной системы РГ уравнений от аналога из класса А. Во-первых, коэффициент перед \mathcal{D}_C отличается в два раза для уравнения на

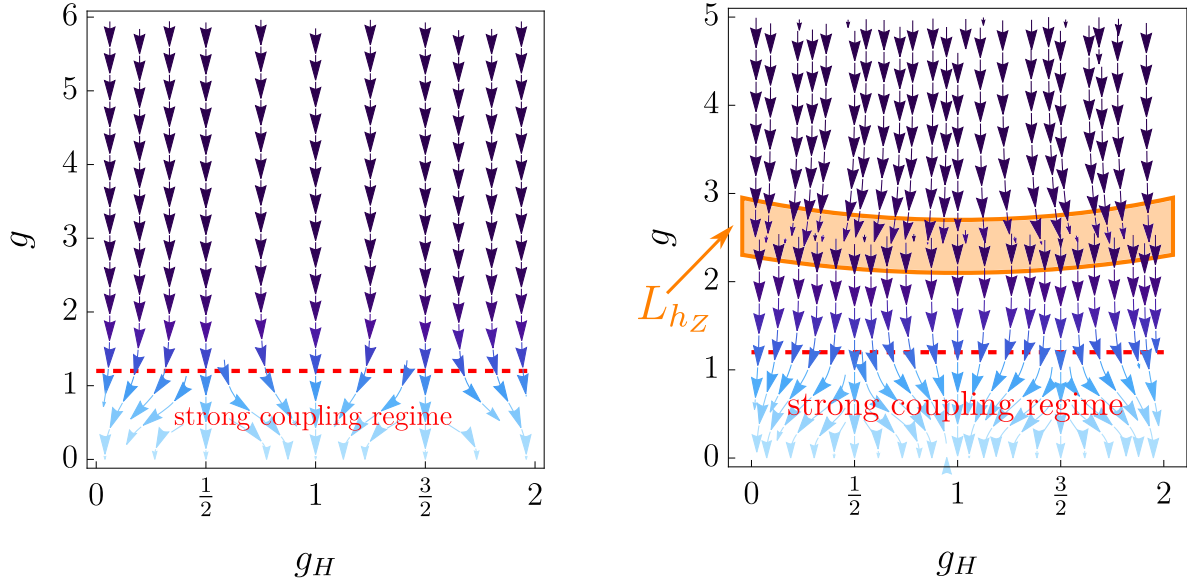
(a) РГ-поток системы (146) ($h_Z = \infty$)(b) Качественный РГ-поток кроссовера класс $C \rightarrow$ класс А ($h_Z \neq 0$)

Рис. 6: Поведение ренорм-группового потока системы с учетом Зеемановского расщепления

g и θ , в отличие от класса А, где эти коэффициенты одинаковы, физически это связано с тем, что поперечная проводимость квантуется двойками, а не единицами. Во-вторых, степень g в предэкспоненциальном множителе также отличается, что приводит к более резкому поведению ренорм-группового потока в металлической области (более сильная антилокализация за счет инстантонных вкладов), однако отношение степени в ведущем пертурбативном вкладе к степени в инстантонном вкладе совпадает для классов А и С.

К сожалению, получение значения g_* в рамках наших приближений (так же как и в классе А, см. Рис. 6(a)), не представляется возможным. Во-первых, в одноинстантонном приближении пертурбативная часть β -функции всегда оказывается больше, чем пертурбативная, что приводит к полной локализации при любых θ . Во-вторых, ожидается, что значение продольной проводимости в критической точке $g_* \sim 1$, то есть соответствует режиму сильной связи, а используемая нами теория возмущений в окрестности инстантона применима в области $g \gg 1$, то есть в пределе слабой связи. Однако, аналогично тому как это было в ситуации целочисленного эффекта Холла, мы предполагаем, что данный результат верно описывает качественное поведение системы в режиме спинового квантового эффекта Холла, а именно присутствие антилокализационных пертурбативных поправок на промежуточном между двумя плато значении поперечной спиновой проводимости.

6.4 Кроссовер между СКЭХ и ЦКЭХ

Как было указано выше, добавление Зеемановского расщепления в рассмотрение приводит к кроссоверу между классами симметрии А и С. Опишем качественные свойства такого кроссовера. Для начала рассмотрим случай $h_Z = \infty$, отвечающий классу А. Для

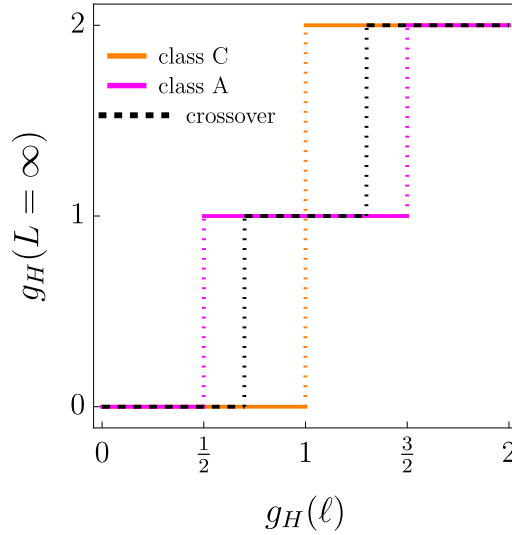


Рис. 7: Плато поперечной спиновой проводимости

этого запишем уравнения ренорм-группы на проводимости для класса А [34]:

$$\frac{dg}{d \ln \lambda} = -\frac{1}{2\pi^2 g} - \mathcal{D}_A(\pi g)^2 e^{-2\pi g} \cos 2\theta, \quad \frac{d\theta}{d \ln \lambda} = -2\pi \mathcal{D}_A(\pi g)^2 e^{-2\pi g} \sin 2\theta \quad (146)$$

где $\mathcal{D}_A = 4e^{-1}/\pi$, хочется отметить, что в работах [54, 56] коэффициент ошибочно получен в четыре раза большим. Эти уравнения получаются при инстантонном анализе действия (11). Возникшее отличие в два раза в аргументах тригонометрических функций получается из того, что топологический заряд инстантона для класса А при вышеуказанном определении θ -угла и спиновой проводимости (56) равен двойке (подробнее см. последний абзац в 3.1). Это в свою очередь приводит к тому, что квантовый переход при $g_H = 1$ расщепляется на два перехода при $g_h = 1/2, 3/2$ (см. Рис. 6(a)), что означает возникновение плато поперечной спиновой проводимости при $g_H = 1$, как это и должно происходить в режиме ЦКЭХ. Теперь качественно обсудим случай конечного h_Z . Учет Зеемановского расщепления приводит к возникновению в сигма-модельном действии членов, нарушающих симметрию $\text{Sp}(2N)/\text{U}(N)$ многообразия [67, 68], однако пока h_Z мало, их вклад оказывается иррелевантным на небольших (по отношению к инфракрасному) масштабах, и такие члены оказываются возможным не учитывать при подсчете инстантонных поправок. Однако, при увеличении масштабов системы, с неизбежностью, возникает конечный масштаб L_{h_Z} , на котором члены, нарушающие симметрию становятся релевантными. Его можно оценить из скейлинговых соображений, а именно сравнить вклад кинетического члена и члена нарушающего симметрию:

$$h_Z L^{-\gamma_{\chi'}} \sim \frac{D_0}{L^2} \quad \Rightarrow \quad L_{h_Z} \sim h_Z^{-1/(2+\gamma_{\chi'})} = h_Z^{-\nu_h} \quad (147)$$

где $\gamma_{\chi'}$ – аномальная размерность члена, нарушающего симметрию, а также здесь не учитывается перенормировка g , так в классе А она двухпетлевая. Пользуясь результатами [18, 68] и полученным нами видом нарушающего симметрию слагаемого для краевой

теории (47), можно предположить, что $\gamma_{\mathcal{L}} = -1/4$, то есть оператор, нарушающий симметрию имеет вид, аналогичный \mathcal{K}_1 [24], откуда получаем скейлинговую экспоненту для L_{hz} : $\nu_h = 4/7$. Хочется отметить, что на масштабе L_{hz} происходит резкий переход от фазового портрета класса С к фазовому портрету класса А, что схематично представлено на Рис. 6(b). Основное следствие такого резкого перехода – сужение ширины нечётных плато поперечной спиновой проводимости на инфракрасном масштабе как функции поперечной спиновой проводимости на ультрафиолетовом (начальном) масштабе, что изображено на Рис. 7. Объяснить такой эффект можно следующим рассуждением. В классе А, если бы ренорм-групповая процедура стартовала в металлической области $g(\ell) \gg 1$ с $g_H(\ell) > 1/2$ (Рис. 6(a)) система с неизбежностью попадала бы в фазу с $g_H = 1$. В классе С при таких же начальных условиях система попадает в фазу с $g_H = 0$ (Рис. 5(b)). Однако, в режиме кроссовера, на малых масштабах фазовый портрет следует портрету класса С, то есть фазовый поток смещается в область нулевого плато поперечной проводимости, что при некоторых малых отклонениях начального условия от $g_H(\ell) = 1/2$ может привести поперечную проводимость в область $g_H < 1/2$ на момент попадания в область фазового портрета класса А ($\lambda = L_{hz}$). Это, аналогично случаю класса С, приведет систему в фазу с $g_H = 0$, хотя наивно можно было бы предположить, что в инфракрасной области поведение системы должно быть аналогично поведению для класса А. Такое сужение плато возможно заметить только при учете инстантонных поправок к ренорм-групповым β -функциям, так как именно они ответственны за перенормировку g_H . Более количественный анализ данного кроссовера является целью дальнейших исследований.

7 Заключение

В заключение, просуммируем все результаты, полученные выше. В данной работе было развито теоретико-полевое рассмотрение теории спиново-квантового Холловского перехода для грязной, невзаимодействующей системы. Для начала, с помощью краевой теории дираковских фермионов, было микроскопически показано, что наличие в системе краевой моды приводит к появлению в сигма-модельном действии топологического слагаемого, связанного с квантованием спиновой проводимости. Далее, в формализме пруйскеновской $NL\sigma M$ было найдено инстантонное седловое решение с нетривиальным топологическим зарядом, равным ± 1 (51). Было показано, что такое решение разрушается при редукции в класс А, что с физической точки зрения означает невозможность скачка через плато с нечетными значениями поперечной спиновой проводимости в режиме обыкновенного целочисленного эффекта Холла. Далее были рассмотрены квантовые флуктуации вокруг инстантона, а именно получено квадратичное действие в терминах флуктуационных матриц W , а также операторов $O^{(a)}$ (66). Найдена их полная система собственных функций и собственных значений (73). Все нулевые моды флуктуационных операторов $O^{(a)}$ мы представили как малые деформации инстантонного многообразия: изменение масштаба инстантона λ и центра инстантона z_0 , а также генераторы глобальных вращений сигма-

модельного многообразия \hat{t} (80). Также мы явно показали механизм нарушения симметрии при наличии инстантонного решения. В одноинстантонном приближении с использованием регуляризации Паули-Вилларса мы нашли непертурбативную поправку к свободной энергии системы (106). Используя метод перевала в окрестности инстантонного решения, мы получили непертурбативную поправку к аномальной размерности для произвольного чисто-скейлингового оператора без производных (132). Оказалось, данная поправка удовлетворяет симметричным соотношениям группы Вейля, иными словами наличие инстантона (в отличие например от взаимодействия) сохраняет вышеуказанную симметрию. В критической точке данные поправки имеют антилокализационный характер. Далее были получены формулы Кубо для спиновых проводимостей (продольной и поперечной) в RA представлении. С их помощью были найдены непертурбативные перенормировки, которые из-за своего логарифмического поведения оказывается удобным написать в терминах уравнений ренормализационной группы (145). Была построена диаграмма ренорм-группового потока для СКЭХ, в которой заметны признаки наличия делокализационного перехода при значении топологического угла $\theta = \pi$. Однако, само значение диссипативной спиновой проводимости в точке перехода g_* или критические индексы найти в наших приближениях ($g \gg 1$, $|\mathcal{C}| = 1$) оказывается невозможным. Также в терминах ренорм-группового потока качественно был описан кроссовер между классом С (СКЭХ) и классом А (ЦКЭХ), показано как происходит переход между квантованием поперечной спиновой проводимости двойками и единицами. Показано сужение ширины плато с нечетными значениями спиновой проводимости при включении Зеемановского поля.

Результаты данного магистерского диплома будут в ближайшее время опубликованы. Работа выполнена на кафедре теоретической физики при институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау в рамках научного проекта РНФ № 22-42-04416 «Мультифрактальность и взаимодействие на локализационных переходах между топологическими фазами в сверхпроводящих системах».

Автор выражает благодарность П.М. Островскому за полезные обсуждения на тему неунитарного матричного поворота и алгебраической структуры сигма-модельного многообразия, которые позволили окончательно разобраться со структурой инстантонного решения и сильно упростить решение задачи.

А Однопетлевая поправка к LDoS и к спиновой проводимости в П-В регуляризации

В данном разделе мы продемонстрируем расчет LDoS в тривиальном топологическом секторе в регуляризации Паули-Вилларса для класса С, основанный на аналогичном расчете для класса А [54, 56]:

$$\begin{aligned} \nu'(\mathcal{M}) &= \frac{\nu}{\mathcal{K}_1(\Lambda)} \int \mathcal{D}Q \operatorname{Tr} \underline{\Lambda} Q e^{-S[Q]} = \frac{\nu}{2n} \int \mathcal{D}Q \left(\operatorname{Tr} \hat{1} + \operatorname{Tr} \underline{\Lambda} \underline{\Lambda} W + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \underline{\Lambda} \underline{\Lambda} W^2 \right) e^{-S_0[W]} = \nu - \\ &\quad \frac{\nu}{4n} \int \mathcal{D}W \operatorname{Tr} W^2 e^{-S_0[W]} = \nu - \frac{\nu}{2n} \langle w^{\alpha\beta} w^{*\alpha\beta} \rangle_0 = \\ \nu - \frac{4\nu}{ng} \left((n-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{2}{2}(n-1) + 1 \right) \mathcal{G}_0(\eta\theta; \eta\theta) &= \nu \left(1 - \frac{2(1+n)}{g} \mathcal{G}_0(\eta\theta; \eta\theta) \right) \end{aligned} \quad (148)$$

Мы можем переписать функцию Грина в совпадающих точках, введя новую функцию:

$$\mathcal{G}_0(\eta\theta; \eta\theta) = \frac{1}{4\pi} Y^{(0)}, \quad Y^{(s)} = \sum_{J=2-(s-2)(s-1)/2}^{\infty} \frac{2J + (1-s)^2}{E_J^{(s)}} \quad (149)$$

Для проведения вычислений введем еще одну функцию

$$Y^{(\Lambda)}(p) = \sum_{J=p}^{\Lambda} \frac{2J}{J^2 - p^2}, \quad (150)$$

Согласно (91), регуляризованная функция $Y_{\text{reg}}^{(\Lambda)}(p)$ имеет вид

$$Y_{\text{reg}}^{(\Lambda)}(p) = \sum_{f=1}^K e_f \sum_{J=p}^{\Lambda} \frac{2J}{J^2 - p^2 + \mathcal{M}_f^2} + \sum_{J=p+1}^{\Lambda} \frac{2J}{J^2 - p^2}, \quad (151)$$

как и раньше, мы предполагаем, что обрезка определяет самый большой масштаб $\Lambda \gg \mathcal{M}_f$. После этого следует произвести такое же вычисление, что и для детерминанта массивных мод, то есть для члена, в котором есть большая масса \mathcal{M}_f применима формула Эйлера-Маклорена:

$$\sum_{J=p+1}^{\Lambda} g(J) = \int_{p+1}^{\Lambda} g(x) dx + \frac{g(\Lambda) + g(p+1)}{2} + \frac{1}{12} g'(x) \Big|_{p+1}^{\Lambda}, \quad (152)$$

После некоторых вычислений можно получить ($\Lambda \rightarrow \infty$):

$$Y_{\text{reg}}^{(\Lambda)}(p) = 2 \ln \mathcal{M} + \gamma - \psi(1 + 2p). \quad (153)$$

где $\psi(z)$ — Дигамма-функция. Следовательно, регуляризованные выражения для $Y^{(s)}$

можно переписать в виде:

$$Y_{\text{reg}}^{(s)} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Y_{\text{reg}}^{(\Lambda)} \left(\frac{1+s}{2} \right) \quad (154)$$

так что для регуляризованных функций для разных операторов $O^{(a)}$ в конечном итоге получаем:

$$Y_{\text{reg}}^{(0)} = 2 \ln \mathcal{M} + 2\gamma - 1, \quad Y_{\text{reg}}^{(1)} = 2 \ln \mathcal{M} + 2\gamma - \frac{3}{2}. \quad (155)$$

после этого выводим поправку к LDoS:

$$\nu'(\mathcal{M}) = \nu \left(1 - \frac{(1+n)}{2\pi g} Y_{\text{reg}}^{(0)} \right) \approx \nu \left(1 - \frac{(1+n)}{\pi g} \ln \mathcal{M} e^{\gamma-1/2} \right) = \nu \left(1 + \frac{\gamma_1^{(0)}}{g} \ln \mathcal{M} e^{\gamma-1/2} \right) \quad (156)$$

Далее мы вычислим однопетлевую поправку к спиновой проводимости в регуляризации Паули-Вилларса. Сначала мы рассмотрим диамагнитную часть (135), используя экспоненциальную параметризацию флуктуаций (61), мы можем написать:

$$\delta g_{dm} = \frac{g}{8} (V_{1,1} + V_2) \langle \text{Tr} W^2 (2 + \text{Tr} 1) \rangle_{S_0} \quad (157)$$

как мы видим, это выражение аналогично тому, которое получается для LDoS (156), поэтому мы можем написать:

$$\delta g_{dm} = -\frac{(1+n)}{\pi} \ln \mathcal{M} e^{\gamma-1/2} \quad (158)$$

Следующий шаг — рассмотрим вклад, отвечающий коррелятору $j-j$. Ненулевых вкладов всего три, их можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\nabla_\mu W(\mathbf{x}) \nabla_{\mu'} W(\mathbf{x}')), \quad -2 \langle \text{Tr} (\nabla_\mu W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}') [\nabla_{\mu'} W(\mathbf{x}')] W(\mathbf{x}')) \rangle, \\ \frac{2}{3} \langle \text{Tr} (\nabla_\mu W(\mathbf{x}) \nabla_{\mu'} W^3(\mathbf{x}')) \rangle \end{aligned} \quad (159)$$

Все эти выражения, используя теорему Остроградского-Гаусса, можно переписать так:

$$\int d\mathbf{x} \text{Tr} (\mathbf{E} \nabla Q(\mathbf{x})) = \int_{\partial\Omega} ds \mathbf{n} \text{div} \text{Tr} (\mathbf{E} Q(\mathbf{x})), \quad \mathbf{E} = \int d\mathbf{x}_1 Q(\mathbf{x}_1) \nabla_1 Q(\mathbf{x}_1) \Lambda \quad (160)$$

После этого мы используем, что $Q(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = Q_b = \text{const}$ и получаем:

$$\int_{\partial\Omega} ds \mathbf{n} \text{div} \text{Tr} (\mathbf{E} Q_b) = 0, \quad \text{div} \text{Tr} (\mathbf{E} Q_b) = 0 \quad (161)$$

Следовательно, в регуляризации Паули-Виллара нет вклада полных производных в продольную спиновую проводимость.

В итоге мы получаем, что единственная релевантная однопетлевая поправка к продольной спиновой проводимости g приходит от диамагнитного вклада и равна (158).

В Детали вычисления перенормировки чисто-скейлинговых операторов

В данном разделе мы рассмотрим получение инстантонных поправок к чисто-скейлинговым операторам с двумя и тремя Q -матрицами. Также здесь мы получим, что поправки имеют похожий по типу вид, что позволяет обобщить результат на случай произвольного чисто-скейлингового оператора.

В.1 Операторы с двумя Q -матрицами

В седловом приближении запишем выражение для усредненного оператора \mathcal{K}_2 :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}_2 \rangle_{\pm 1} = & -(n+1)G_n \int \frac{d\lambda}{\lambda} (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\mathcal{M}) \pm i\theta} \int d\mathbf{r} \frac{\mu(r)}{\lambda} + \\ & \frac{G_n}{4} \int \frac{d\lambda}{\lambda} (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\mathcal{M}) \pm i\theta} \int d\mathbf{x} \frac{(2 + \mu_2)\rho_{11}^2 - \mu_2|\rho_{12}|^2}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (162)$$

Для конкретных значений μ_2 (определяются так, чтобы оператор был собственным оператором ренорм-группы) данное выражение приобретает вид:

$$\langle \mathcal{K}_2^{\mu_2=-1} \rangle_{\pm 1} = -\frac{(1+2n)}{2} G_n \int \frac{d\lambda}{\lambda} (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\mathcal{M}) \pm i\theta} \int d\mathbf{x} \frac{\mu(r)}{\lambda} \quad (163)$$

$$\langle \mathcal{K}_2^{\mu_2=2} \rangle_{\pm 1} = -\frac{1}{2} G_n \int \frac{d\lambda}{\lambda} (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\mathcal{M}) \pm i\theta} \int d\mathbf{x} \left(\frac{2(n+2)\mu(r)}{\lambda} - 3\mu^2(r) \right) \quad (164)$$

Во втором выражении вторым слагаемым следует пренебречь из-за отсутствия ультрафиолетовой расходимости. После этого мы должны учесть квантовые поправки в предэкспоненциальном множителе, также как и делали это для LDoS. После некоторых вычислений мы получаем (129).

В.2 Операторы с тремя Q -матрицами

В этом разделе мы явно продемонстрируем выполнение соотношений симметрии Вейля при наличии инстантонных поправок к аномальным размерностям с помощью перенормировки собственных операторов ренорм-группы с тремя Q -матрицами. Следуя [27], мы определяем эти операторы как:

$$\mathcal{K}_3[\mathcal{Q}] = \frac{1}{64} \sum_{p_1, p_2, p_3 = \pm} p_1 p_2 p_3 \mathcal{P}_3^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3; p_1 p_2 p_3} \quad (165)$$

где корреляционную функцию $\mathcal{P}_3^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3; p_1 p_2 p_3}$ можно записать в виде:

$$\mathcal{P}_3^{\alpha\beta\mu; p_1 p_2 p_3} = \text{tr} \mathcal{Q}_{p_1 p_1}^{\alpha\alpha} \text{tr} \mathcal{Q}_{p_2 p_2}^{\beta\beta} \text{tr} \mathcal{Q}_{p_3 p_3}^{\mu\mu} + \mu_{2,1} \text{tr} \mathcal{Q}_{p_1 p_1}^{\alpha\alpha} \text{tr} \mathcal{Q}_{p_2 p_3}^{\beta\mu} \mathcal{Q}_{p_3 p_2}^{\mu\beta} + \mu_3 \text{tr} \mathcal{Q}_{p_1 p_2}^{\alpha\beta} \mathcal{Q}_{p_2 p_3}^{\beta\mu} \mathcal{Q}_{p_3 p_1}^{\mu\alpha} \quad (166)$$

где α, β, μ - фиксированные репличные индексы, а также как и в случае одной и двух Q -матриц константы $\mu_{2,1}$ и μ_3 должны быть выбраны так, чтобы операторы стали собственными операторами РГ. Возникает три возможных выбора.

$$\begin{aligned}\mu_{2,1} &= -3, 1, 6, \\ \mu_3 &= 2, -2, 8,\end{aligned}\tag{167}$$

Как и в двух предыдущих случаях, мы можем написать выражение для усредненного оператора \mathcal{K}_3 :

$$\langle \mathcal{K}_3 \rangle_{\pm 1} = \left\langle -\frac{\mu_{2,1} |\rho_{12}|^2}{2n(n+1)} + \frac{3\rho_{11}}{n} + \frac{\rho_{11}^2 (\mu_{2,1} + 6)}{2n(n+1)} - \frac{2\mu_{2,1} + 3\mu_3 |\rho_{12}|^2 \rho_{11}}{8(n+2)} + \frac{\rho_{11}^3 (2\mu_{2,1} + \mu_3 + 4)}{4n(n+1)(n+2)} \right\rangle_{\pm 1}\tag{168}$$

Его можно получить с помощью соотношения для усреднения шести унитарных матриц из [65] (это вычисление является прямолинейным, однако крайне громоздким, поэтому не представлено здесь). В последнем выражении мы используем специальные обозначения для усреднения функции по инстантонному многообразию:

$$\langle f \rangle_{\pm 1} = L^2 G_n \int \frac{d\lambda}{\lambda^3} (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\mathcal{M}) + i\theta} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x})\tag{169}$$

Пренебрегая членами, не содержащими расходимостей, для конкретных значений $\mu_{2,1}$ получаем выражения μ_3 , имеющие ту же форму, что и (129) и (132). В репличном пределе это выражение принимает вид:

$$\gamma_3(g, \theta) = 0, \quad \mu_{2,1} = -3, \quad \mu_3 = 2, \quad q = 3\tag{170}$$

этот результат является следствием симметрии Вейля: $\gamma_3 = \gamma_0 = 0$.

$$\gamma_{2,1}(g, \theta) = -\frac{4}{\pi g} - \frac{64}{5e^{2+\gamma}} (\pi g)^2 e^{-\pi g} \cos \theta\tag{171}$$

$$\gamma_{1,1,1}(g, \theta) = -\frac{9}{\pi g} - \frac{72}{5e^{2+\gamma}} (\pi g)^2 e^{-\pi g} \cos \theta\tag{172}$$

и пертурбативные аномальные размерности на конечном числе реплик:

$$\gamma_3(g) = -\frac{3n}{\pi g}, \quad \gamma_{2,1}(g) = -\frac{4 + 3n}{\pi g},\tag{173}$$

$$\gamma_{1,1,1}(g) = -\frac{9 + 3n}{\pi g}\tag{174}$$

Мы видим, что все аномальные размерности собственных операторов с тремя Q -матрицами отрицательны.

С Исключение ультрафиолетовых расходимостей с помощью метода пространственно переменной массы

Для исключения ультрафиолетовых расходимостей следует воспользоваться схемой, принятой в [64]. Сначала мы введем регуляторы РГ для квантовых наблюдаемых:

$$\nu(\mathcal{M}) \rightarrow \nu(\mathcal{M}) \left(1 - \frac{\gamma_{(1)}^{(0)}}{g} \ln[\mu(r)\ell\mathcal{M}] \right) = \nu \left(1 + \frac{\gamma_{(1)}^{(0)}}{g} \ln \frac{1}{\mu(r)\ell} e^{\gamma-1/2} \right) \equiv \nu(\mu(r)). \quad (175)$$

Это выражение мы преобразуем в интеграл по нулевой моде r_0 в уравнении (119). Далее мы конвертируем пертурбативную поправку с пространственно-зависимой массой в пертурбативную поправку на масштабе $\zeta\lambda$, где $\zeta = e/2$,

$$\nu(\zeta\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{x}_0 \mu^2(r_0) \nu(\mu(r_0)) = \nu_0 \left(1 + \frac{\gamma_{(1)}^{(0)}}{g} \ln \lambda \mu_0 \zeta e^{\gamma-1/2} \right), \quad \zeta = \frac{e}{2}. \quad (176)$$

здесь мы можем найти соответствие между массой Паули-Виллара и полученным выражением:

$$\mathcal{M} \rightarrow \zeta\lambda\mu_0 \quad (177)$$

После этого мы можем переписать уравнение (119) в более понятном виде:

$$\delta\nu = G_n \int^{\lambda'} \frac{d\lambda}{\lambda} (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\zeta\lambda)} \mathcal{A}_{(1)} \cos \theta \quad (178)$$

здесь мы вводим квантовую амплитуду \mathcal{A}_λ :

$$\mathcal{A}_\lambda = \pi \gamma_\lambda^{(0)} \int' d\mathbf{x}_0 \frac{\mu(r_0)}{\lambda} z_\lambda(\mu(r_0)) = -2\pi^2 \gamma_\lambda^{(0)} z_\lambda(\mu(0)) \int_{\mu(0)}^{\mu(L')} d[\ln \mu(r_0)] \frac{z_\lambda(\mu(r_0))}{z_\lambda(\mu(0))} \quad (179)$$

отметим, что эти амплитуды расходятся на классическом уровне, поэтому нам следует рассмотреть квантовые поправки к соответствующим чисто-скейлинговым операторам. Без ограничения общности, мы можем вычислить \mathcal{A}_λ для каждого оператора с отрицательной аномальной размерностью (обобщение на положительную аномальную размерность производится тривиально). Используя РГ-уравнения (без инстантонных поправок), мы можем переписать подынтегральное выражение следующим образом:

$$\frac{z_\lambda(\mu(r_0))}{z_\lambda(\mu(0))} = \exp \left(- \int_{\ln \mu(0)}^{\ln \mu(r_0)} d[\ln \mu] \gamma_\lambda \right) \quad (180)$$

после этого с помощью уравнения РГ на g сделаем замену переменной с $\ln \mu$ на g :

$$\mathcal{A}_\lambda = z(\mu(0)) \mathcal{H}_\lambda(g(\mu(0))) \quad (181)$$

где мы определили функцию:

$$\mathcal{H}_\lambda = -2\pi^2 \gamma_\lambda^{(0)} \int_{g(\mu(0))}^{g(\mu(L'))} \frac{dg}{\beta_g(g)} \exp \left(- \int_{g(\mu(0))}^{g(\mu(r_0))} \frac{dg'}{\beta_g(g')} \gamma_\lambda(g') \right) \quad (182)$$

для нашего рассмотрения мы будем учитывать только ведущие вклады в γ и β функции:

$$\gamma_\lambda \approx \frac{\gamma_\lambda^{(0)}}{g} + \dots, \quad \beta_g \approx \beta_0 + \dots, \quad \beta_0 = \frac{n+1}{\pi}. \quad (183)$$

после этого интегрирование в (182) может быть произведено явно и приводит к выражению из основного текста (122). Хотелось отметить, что есть и другой способ взятия этого интеграла — переписать (182) в терминах неоднородного дифференциального уравнения, которое оказывается возможным решить точно, как это было сделано в [64].

D Учет флуктуаций в предэкспоненте для LDoS

Для устранения ультрафиолетовых расходимостей нужно учесть квантовые флуктуации в окрестности инстантонного седла в предэкспоненциальном множителе. Используя (108), мы можем написать для перенормированной LDoS:

$$\nu'(\mathcal{M}) = \frac{\nu}{2n} \langle \text{Tr} \Lambda \mathcal{Q} \rangle_0 \left(1 - \frac{\mathcal{Z}_{\text{inst}} + \mathcal{Z}_{\text{inst}}^*}{\mathcal{Z}_0} \right) + \frac{\nu}{2n} \langle \text{Tr} \Lambda \mathcal{Q} \rangle_{+1} + \frac{\nu}{2n} \langle \text{Tr} \Lambda \mathcal{Q} \rangle_{-1} \quad (184)$$

первый член в правой части был рассчитан ранее в Приложении B, здесь мы сосредоточимся на вычислении последних двух членов. Используя экспоненциальную параметризацию для флуктуаций, можно записать:

$$\langle \text{Tr} \Lambda \mathcal{Q} \rangle_{+1} = \langle \text{Tr} \underline{\Lambda} \mathcal{Q} \rangle_{+1} \approx \left\langle \text{Tr} \tilde{R} \underline{\Lambda} \tilde{R}^{-1} \underline{\Lambda} \right\rangle_{+1} + \frac{1}{2} \left\langle \text{Tr} \tilde{R} \underline{\Lambda} \tilde{R}^{-1} \underline{\Lambda} W^2 \right\rangle_{+1} \quad (185)$$

начнем с члена без флуктуационного матричного поля W :

$$\left\langle \text{Tr} \tilde{R} \underline{\Lambda} \tilde{R}^{-1} \underline{\Lambda} \right\rangle_{+1} = 2n \frac{\mathcal{Z}_{\text{inst}}}{\mathcal{Z}_0} - n(n+1) G_n \int \frac{d\lambda}{\lambda} (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\mathcal{M}) + i\theta} \int d\mathbf{x} \frac{\mu(r)}{\lambda} \quad (186)$$

первое слагаемое сокращается с вкладом, приходящим из тривиального топологического сектора. Второй вклад, зависящий от квантовых флуктуаций, можно вычислить следующим образом:

$$\frac{1}{2} \left\langle \text{Tr } \tilde{R} \underline{\Lambda} \tilde{R}^{-1} \underline{\Lambda} W^2 \right\rangle_{+1} = - \left(\left\langle (|e_1|^2 - e_0^2) w^{11} w^{*11} \right\rangle_{+1} + \sum_{\alpha=2}^n \left\langle (|e_1|^2 - e_0^2 + 1) w^{1\alpha} w^{*1\alpha} \right\rangle_{+1} + \sum_{\alpha=2}^n \left\langle w^{\alpha\alpha} w^{*\alpha\alpha} \right\rangle_{+1} + 2 \sum_{1 < \alpha < \beta \leq n} \left\langle w^{\alpha\beta} w^{*\alpha\beta} \right\rangle_{+1} \right) \quad (187)$$

эти средние значения можно переписать через функции Грина в совпадающих точках:

$$- \left(\left\langle (|e_1|^2 - e_0^2) \mathcal{G}_2 \right\rangle_{+1} + \frac{n-1}{2} \left\langle (|e_1|^2 - e_0^2 + 1) \mathcal{G}_1 \right\rangle_{+1} + (n-1) \left\langle \mathcal{G}_0 \right\rangle_{+1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \left\langle \mathcal{G}_0 \right\rangle_{+1} \right) \quad (188)$$

последние два члена сокращаются за счет вклада тривиального топологического сектора (см. Приложение В). Таким образом, окончательное выражение принимает вид:

$$\frac{1}{2} \left\langle \text{Tr } \tilde{R} \underline{\Lambda} \tilde{R}^{-1} \underline{\Lambda} W^2 \right\rangle_{+1} = - \left(\left\langle (|e_1|^2 - e_0^2) \mathcal{G}_2 \right\rangle_{+1} - \frac{\mathcal{Z}_{\text{inst}}}{\mathcal{Z}_0} \mathcal{G}_0 + \frac{n-1}{2} \left\langle (|e_1|^2 - e_0^2 + 1) \mathcal{G}_1 \right\rangle_{+1} - (n-1) \frac{\mathcal{Z}_{\text{inst}}}{\mathcal{Z}_0} \mathcal{G}_0 \right) \quad (189)$$

Используя регуляризацию Паули-Вилларса и представление регуляризованных функций Грина через Y -функцию (154), мы можем получить с логарифмической точностью, пренебрегая всеми членами не содержащими массу \mathcal{M} :

$$\frac{1}{2} \left\langle \text{Tr } \tilde{R} \underline{\Lambda} \tilde{R}^{-1} \underline{\Lambda} W^2 \right\rangle_{+1} = \frac{-(1+n)(-(1+n)) \ln \mathcal{M}}{2\pi g} G_n \int \frac{d\lambda}{\lambda} (\pi g)^{n+1} e^{-\pi g(\mathcal{M}) + i\theta} \int d\mathbf{x} \frac{\mu(r)}{\lambda} \quad (190)$$

Если учесть вклад с отрицательным топологическим зарядом, то получим выражение для перенормированного LDoS (119).

Е Усреднение мацубаровских формул для проводимостей

Цель данного раздела — вывести формулу Кубо для продольной спиновой проводимости в представлении RA . Это можно сделать после усреднения формулы Кубо в мацубаровском формализме, эта формула была представлена в [27]. Усреднение будет проводиться по унитарным вращениям $\mathcal{Q} \rightarrow U^{-1} \mathcal{Q} U$, которые коммутируют с Λ , $[U, \Lambda] = 0$. Запишем формулу Кубо для проводимости в мацубаровском представлении:

$$\sigma_s(i\omega_k) = -\frac{g}{8kL^2} \int_{\mathbf{x}} \left\langle \text{Tr} [I_k^\alpha \mathbf{s}_3, \mathcal{Q}] [I_{-k}^\alpha \mathbf{s}_3, \mathcal{Q}] \right\rangle + \frac{g^2}{32kL^2} \int_{\mathbf{x}'} \int_{\mathbf{x}} \left\langle \left\langle \text{Tr} I_k^\alpha \mathbf{s}_3 \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \text{Tr} I_{-k}^\alpha \mathbf{s}_3 \mathcal{Q}(\mathbf{x}') \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}') \right\rangle \right\rangle \quad (191)$$

здесь $(I_k^\gamma)_{nm}^{\alpha\beta} = \delta_{nmk} \delta^{\alpha\beta} \delta^{\alpha\gamma} \mathbf{s}_0$, α – фиксированный репличный индекс, k – фиксированная Мацубаровская частота, которая подразумевается малой (но ненулевой). Усреднение можно выполнить, используя следующие результаты:

$$\langle \text{Tr } I_k^\alpha \mathbf{s}_3 U^{-1} A U \rangle_U = 0 \quad (192)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr } I_k^\alpha \mathbf{s}_3 U^{-1} A U I_{-k}^\alpha \mathbf{s}_3 U^{-1} B U \rangle_U = & V_{1,1} [(N_m - k) (\text{Tr } A \text{Tr } B + \text{Tr } \Lambda A \text{Tr } \Lambda B + \text{Tr } [A \bar{B} - \Lambda A \Lambda \bar{B}]) + \\ & 2k (\text{Tr } \Lambda_- A \text{Tr } \Lambda_+ B + \text{Tr } \Lambda_- A \Lambda_- \bar{B})] + V_2 [2(N_m - k) \text{Tr } \Lambda A \Lambda B + \\ & 2k (\text{Tr } \Lambda_- A \text{Tr } \Lambda_+ B + \text{Tr } \Lambda_- A \Lambda_- \bar{B})] \quad (193) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr } I_k^\alpha \mathbf{s}_3 U^{-1} A U \text{Tr } I_{-k}^\alpha \mathbf{s}_3 U^{-1} B U \rangle_U = & V_{1,1} [(N_m - k) \text{Tr } [A (B - \bar{B}) + \Lambda A \Lambda (B - \bar{B})] + \\ & 2k \text{Tr } \Lambda_- A \Lambda_+ (B - \bar{B})] + V_2 [2(N_m - k) \text{Tr } \Lambda A \text{Tr } \Lambda B + 2k \text{Tr } \Lambda_- A \Lambda_+ (B - \bar{B})] \quad (194) \end{aligned}$$

где $\Lambda_\pm = (1 \pm \Lambda)/2$ – проектор на положительные/отрицательные Мацубаровские частоты. Эти выражения можно получить с помощью формул, аналогичных (115), с той лишь разницей, что их нужно расширить с учетом спинового пространства. После этого можно записать полное выражение для спиновой проводимости, разделив ее на две части — диамагнитную (без производных) и ток-токовую корреляционную функцию (с производными):

$$\begin{aligned} g_{dm}(i\omega_k) = & -\frac{g}{4k} \left\langle V_{1,1} \left[(N_m - k) (\text{Tr } (\Lambda \mathcal{Q})^2 - \text{Tr } 1 + (\text{Tr } \Lambda \mathcal{Q})^2) - \frac{k}{2} (\text{Tr } 1 + \text{Tr } (\Lambda \mathcal{Q})^2 + (\text{Tr } \Lambda \mathcal{Q})^2) \right] + \right. \\ & \left. V_2 \left[2(N_m - k) \text{Tr } (\Lambda \mathcal{Q})^2 - \frac{k}{2} (\text{Tr } 1 + \text{Tr } (\Lambda \mathcal{Q})^2 + (\text{Tr } \Lambda \mathcal{Q})^2) \right] - 4(2N_m - k) \right\rangle \quad (195) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{j-j}(i\omega_k) = & \frac{g^2}{32k} \int_{\mathbf{x}'} \langle V_{1,1} [2(N_m - k) (\text{Tr } \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{Q}(\mathbf{x}') \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}') + \\ & \text{Tr } \Lambda \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \cdot \Lambda \mathcal{Q}(\mathbf{x}') \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}')) + k (\text{Tr } \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{Q}(\mathbf{x}') \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}') - \\ & \text{Tr } \Lambda \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \cdot \Lambda \mathcal{Q}(\mathbf{x}') \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}'))] + V_2 [2(N_m - k) (\text{Tr } \Lambda \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \cdot \text{Tr } \Lambda \mathcal{Q}(\mathbf{x}') \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}') + \\ & k (\text{Tr } \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{Q}(\mathbf{x}') \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}') - \text{Tr } \Lambda \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \cdot \Lambda \mathcal{Q}(\mathbf{x}') \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}'))] \rangle \quad (196) \end{aligned}$$

Для проверки полученных формул, мы рассчитаем однопетлевую поправку к спиновой проводимости. Для учета флуктуаций в Мацубаровском представлении, а также без учета инстантона, то есть при $\tilde{R} = 1$, удобно использовать корневую параметризацию флуктуаций (аналогично тому как это сделано в [27]):

$$\mathcal{Q} = W + \Lambda \sqrt{1 - W^2}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & w \\ w^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (197)$$

где мы используем следующие обозначения: $W_{n_1 n_2} = w_{n_1 n_2}$ и $W_{n_2 n_1} = w_{n_2 n_1}^\dagger$ с $\varepsilon_{n_1} > 0$ и $\varepsilon_{n_2} < 0$. Разложив флуктуационную матрицу по базису в спиновом пространстве $w = \sum_{j=0}^3 w_j \mathbf{s}_j$, мы находим, что элементы w_j удовлетворяют соотношениям симметрии (следуют из БДЖ симметрии) (см. уравнение (2))

$$(w_j)_{n_1 n_2}^{\alpha\beta} = v_j (w_j)_{-n_2, -n_1}^{\beta\alpha}. \quad (198)$$

где $v_j = -\text{tr}(\mathbf{s}_j \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_j^\top \mathbf{s}_2) / 2 = \{-1, 1, 1, 1\}$.

Из квадратичного разложения действия (1) по флуктуациям W находим пропагаторы Гауссовой теории:

$$\left\langle (w_j)_{n_1 n_2}^{\alpha\beta}(\mathbf{q})(w_j^\dagger)_{n_4 n_3}^{\mu\nu}(-\mathbf{q}) \right\rangle = \frac{2}{g} \left(\delta^{\alpha\nu} \delta^{\beta\mu} \delta_{n_1 n_3} \delta_{n_2 n_4} + v_j \delta^{\alpha\mu} \delta^{\beta\nu} \delta_{n_1, -n_4} \delta_{n_2, -n_3} \right) \mathcal{D}_q(i\omega_{n_{12}}), \quad (199)$$

где мы ввели бозонные частоты $\omega_{n_{12}} = \varepsilon_{n_1} - \varepsilon_{n_2}$ и $n_{12} = n_1 - n_2$. Диффузионный пропагатор в импульсном пространстве имеет вид:

$$\mathcal{D}_q(i\omega_n) = \left[q^2 + h^2 + \omega_n / D \right]^{-1}. \quad (200)$$

Наш следующий шаг — разложить (195) до квадратичного порядка по W и (196) до четвертого порядка по W , чтобы получить соответствующую однопетлевую поправку к продольной спиновой проводимости g . После некоторых вычислений (где мы используем регуляризацию $2 + \epsilon$ для вычисления интегралов) получаем:

$$g_{dm}(i\omega_k) \approx g + \frac{g}{k} (k(5 + 6N_m N_r) - 4N_m(1 + N_m N_r)) \frac{h^\epsilon t}{\epsilon} \quad (201)$$

$$g_{j-j}(i\omega_k) = -\frac{g}{k} (N_m - k) (1 + N_m N_r) \frac{h^\epsilon t}{\epsilon} \quad (202)$$

Следовательно, мы можем написать:

$$\delta g = (1 + n) \frac{h^\epsilon t}{\epsilon} g \quad (203)$$

Этот ответ имеет точно такой же вид, как и полученный в [27]. Из этого результата есть нетривиальное следствие одно следствие — процедура РГ в однопетлевом приближении обнуляет оператор, являющийся частью спиновой проводимости, пропорциональной $N_m - k$. Поэтому мы можем положить $N_m = k$ и получить представление формул Кубо для спиновой проводимости в РА-представлении.

Ф Инвариантная форма чисто-скейлинговых операторов с двумя Q -матрицами

Используя уравнения (127) и (128), мы можем записать обе части \mathcal{K}_2 :

$$16\mathcal{K}_2^{[1]} = \text{tr } \mathcal{Q}_{++}^{\alpha_1\alpha_1}(\mathbf{x})\mathcal{Q}_{++}^{\alpha_2\alpha_2}(\mathbf{x}) + \text{tr } \mathcal{Q}_{--}^{\alpha_1\alpha_1}(\mathbf{x})\mathcal{Q}_{--}^{\alpha_2\alpha_2}(\mathbf{x}) - \text{tr } \mathcal{Q}_{++}^{\alpha_1\alpha_1}(\mathbf{x})\mathcal{Q}_{--}^{\alpha_2\alpha_2}(\mathbf{x}) - \text{tr } \mathcal{Q}_{--}^{\alpha_1\alpha_1}(\mathbf{x})\mathcal{Q}_{++}^{\alpha_2\alpha_2}(\mathbf{x}) \quad (204)$$

$$16\mathcal{K}_2^{[2]} = \text{tr } \mathcal{Q}_{++}^{\alpha_1\alpha_2} \text{tr } \mathcal{Q}_{++}^{\alpha_2\alpha_1} + \text{tr } \mathcal{Q}_{--}^{\alpha_1\alpha_2} \text{tr } \mathcal{Q}_{--}^{\alpha_2\alpha_1} - \text{tr } \mathcal{Q}_{+-}^{\alpha_1\alpha_2} \text{tr } \mathcal{Q}_{-+}^{\alpha_2\alpha_1} - \text{tr } \mathcal{Q}_{-+}^{\alpha_1\alpha_2} \text{tr } \mathcal{Q}_{+-}^{\alpha_2\alpha_1} \quad (205)$$

Следующим шагом является введение унитарного глобального поворота, осуществляемого матрицами ${}^{ij}\mathcal{T}_{pp'}^{\alpha\alpha_1} = {}^{ij}\mathcal{T}_p^{\alpha\alpha_1}\delta_{pp'}$, которые коммутируют с Λ , как это было сделано ранее для спиновой проводимости. Используя формулы (115) можно получить:

$$4\mathcal{K}_2^{[1]} = V_{1,1} (\text{Tr } \Lambda \mathcal{Q})^2 + V_2 (\text{Tr } \hat{1} + \text{Tr } (\Lambda \mathcal{Q}))^2, \quad (206)$$

$$4\mathcal{K}_2^{[2]} = V_{1,1} \text{Tr } (\Lambda \mathcal{Q})^2 + \frac{V_2}{2} ((\text{Tr } \Lambda \mathcal{Q})^2 - \text{Tr } \hat{1} + \text{Tr } (\Lambda \mathcal{Q}))^2 \quad (207)$$

После подстановки конкретных значений μ_2 , получаем результирующие выражения для инвариантной относительно вращений формы операторов \mathcal{K}_2 :

$$\mathcal{K}_2^{\mu_2=-1} = \frac{3 \text{Tr } \hat{1} - (2n+1)(\text{Tr } \Lambda \mathcal{Q} \text{Tr } \Lambda \mathcal{Q} - \text{Tr } \Lambda \mathcal{Q} \Lambda \mathcal{Q})}{8n - 8n^3}, \quad (208)$$

$$\mathcal{K}_2^{\mu_2=2} = \frac{2 \text{Tr } \Lambda \mathcal{Q} \Lambda \mathcal{Q} + \text{Tr } \Lambda \mathcal{Q} \text{Tr } \Lambda \mathcal{Q}}{4n^2 + 4n} \quad (209)$$

перенормировки данных выражений в одной и двух петлях согласуются с (162) и [27].

Перепишем выражение для диамагнитного вклада продольной спиновой проводимости (второе слагаемое в (135)) через собственные операторы ренорм-группы, полученные выше:

$$\frac{\delta g_{dm}}{g} = \alpha_1 \mathcal{K}_2^{\mu_2=2} + \beta_1 \mathcal{K}_2^{\mu_2=-1} + \gamma_1 \text{Tr } \hat{1} + \delta_1 (\text{Tr } \hat{1})^2 \quad (210)$$

На коэффициенты возникает система алгебраических уравнений. Ее решение имеет вид:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = -\frac{1-n}{3(2n+1)}, \quad \gamma_1 = -\frac{1}{4(n+1)(2n+1)}, \quad \delta_1 = -\frac{1}{8n(n+1)} \quad (211)$$

Данными соотношениями определяется разложение оператора спиновой проводимости по собственным операторам РГ.

Поэтому перенормировка диамагнитной части спиновой проводимости имеет вид:

$$\alpha_1 \left(1 + \frac{\gamma_{(1,1)}^{(0)}}{g} \ln \mathcal{M} e^{\gamma-1/2} \right) + \beta_1 \left(1 + \frac{\gamma_{(2)}^{(0)}}{g} \ln \mathcal{M} e^{\gamma-1/2} \right) \approx -\frac{1+n}{\pi g} \ln \mathcal{M} e^{\gamma-1/2} \quad (212)$$

которая полностью соответствует (158), а также воспроизводит правильную однопетельную перенормировку $g(\mathcal{M})$.

Список литературы

- [1] Elihu Abrahams. *50 years of Anderson Localization*, volume 24. world scientific, 2010.
- [2] Philip W Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review*, 109(5):1492, 1958.
- [3] F. Evers, A. Mildenberger, and A. D. Mirlin. Multifractality at the quantum Hall transition: Beyond the parabolic paradigm. *Phys. Rev. Lett.*, 101:116803, 2008.
- [4] Jonas F. Karcher, Noah Charles, Ilya A. Gruzberg, and Alexander D. Mirlin. Generalized multifractality at spin quantum Hall transition. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 435:168584, 2021. Special issue on Philip W. Anderson.
- [5] F. Wegner. Inverse participation ratio in $2 + \epsilon$ dimensions. *Z. Phys.B*, 36:209, 1980.
- [6] D. Höf and F. Wegner. Calculation of anomalous dimensions for the nonlinear sigma model. *Nucl. Phys. B*, 275:561, 1986.
- [7] I. A. Gruzberg, A. D. Mirlin, and M. R. Zirnbauer. Classification and symmetry properties of scaling dimensions at Anderson transitions. *Phys. Rev. B*, 87:125144, 2013.
- [8] A. D. Mirlin, Y. V. Fyodorov, A. Mildenberger, and F. Evers. Exact relations between multifractal exponents at the Anderson transition. *Phys. Rev. Lett.*, 97:046803, 2006.
- [9] I. A. Gruzberg, A. W. W. Ludwig, A. D. Mirlin, and M. R. Zirnbauer. Symmetries of multifractal spectra and field theories of Anderson localization. *Phys. Rev. Lett.*, 107:086403, 2011.
- [10] Jonas F. Karcher, Ilya A. Gruzberg, and Alexander D. Mirlin. Generalized multifractality in two-dimensional disordered systems of chiral symmetry classes. *Physical Review B*, 107(10):104202, 2023.
- [11] M. V. Feigel'man, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. A. Yuzbashyan. Eigenfunction fractality and pseudogap state near the superconductor-insulator transition. *Phys. Rev. Lett.*, 98:027001, 2007.
- [12] M. V. Feigel'man and V. E. Kravtsov. Electron-phonon cooling power in Anderson insulators. *Phys. Rev. B*, 99:125415, 2019.
- [13] I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin. Enhancement of the critical temperature of superconductors by Anderson localization. *Physical Review Letters*, 108:017002, 2012.
- [14] I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin. Superconductor-insulator transitions: phase diagram and magnetoresistance. *Phys. Rev. B*, 92:014506, 2015.
- [15] Alexander Altland and Martin R Zirnbauer. Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures. *Physical Review B*, 55(2):1142, 1997.
- [16] Martin R Zirnbauer. Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory. *Journal of Mathematical Physics*, 37(10):4986–5018, 1996.

- [17] Peter Heinzner, A Huckleberry, and Martin R Zirnbauer. Symmetry classes of disordered fermions. *Communications in mathematical physics*, 257:725–771, 2005.
- [18] Victor Kagalovsky and D Nemirowsky. Phase diagram of the spin quantum hall transition. *Low Temperature Physics*, 44(11):1219–1220, 2018.
- [19] S. S. Babkin, J. F. Karcher, I. S. Burmistrov, and A. D. Mirlin. Generalized surface multifractality in two-dimensional disordered systems. *Phys. Rev. B*, 108:104205, 2023.
- [20] Igor V Lerner. Nonlinear sigma model for disordered media: Replica trick for non-perturbative results and interactions. *Strongly Correlated Fermions and Bosons in Low-Dimensional Disordered Systems*, pages 341–373, 2002.
- [21] L. Dell’Anna. Enhancement of critical temperatures in disordered bipartite lattices. *Phys. Rev. B*, 88:195139, 2013.
- [22] Luca Dell’Anna. Disordered d-wave superconductors with interactions. *Nucl. Phys. B*, 758:255, 2006.
- [23] T Senthil, Matthew PA Fisher, Leon Balents, and Chetan Nayak. Quasiparticle transport and localization in high- T_c superconductors. *Physical review letters*, 81(21):4704, 1998.
- [24] Ilya A. Gruzberg, Andreas W. W. Ludwig, and N. Read. Exact exponents for the spin quantum Hall transition. *Phys. Rev. Lett.*, 82:4524, 1999.
- [25] E. J. Beamd, John Cardy, and J. T. Chalker. Quantum and classical localization, the spin quantum Hall effect, and generalizations. *Phys. Rev. B*, 65:214301, 2002.
- [26] Jonas F. Karcher, Ilya A. Gruzberg, and Alexander D. Mirlin. Generalized multifractality at the spin quantum Hall transition: Percolation mapping and pure-scaling observables. *Phys. Rev. B*, 105:184205, 2022.
- [27] S. S. Babkin and I. S. Burmistrov. Generalized multifractality in the spin quantum hall symmetry class with interaction. *Phys. Rev. B*, 106:125424, 2022.
- [28] Д. Е. Хмельницкий. О квантовании холловской проводимости. *Письма в ЖЭТФ*, 38:454, 1983.
- [29] Jean Zinn-Justin. Generalized non-linear σ -models with gauge invariance. In *Recent Developments in Gauge Theories*, pages 421–436. Springer, 1980.
- [30] K v Klitzing, Gerhard Dorda, and Michael Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Physical review letters*, 45(6):494, 1980.
- [31] D Co Tsui and AC Gossard. Resistance standard using quantization of the hall resistance of gaas-alxgal- xas heterostructures. *Applied Physics Letters*, 38(7):550–552, 1981.
- [32] Daniel C Tsui, Horst L Stormer, and Arthur C Gossard. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Physical Review Letters*, 48(22):1559, 1982.

- [33] Adrianus MM Pruisken. On localization in the theory of the quantized hall effect: A two-dimensional realization of the θ -vacuum. *Nuclear Physics B*, 235(2):277–298, 1984.
- [34] Adrianus MM Pruisken. Quasiparticles in the theory of the integral quantum hall effect (i). *Nuclear Physics B*, 285:719–759, 1987.
- [35] Adrianus MM Pruisken. Quasi particles in the theory of the integral quantum hall effect:(ii). renormalization of the hall conductance or instanton angle theta. *Nuclear Physics B*, 290:61–86, 1987.
- [36] АА Белавин and АМ Поляков. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика. *Письма в ЖЭТФ*, 22(10):503–506, 1975.
- [37] F. Evers and A. D. Mirlin. Anderson transitions. *Rev. Mod. Phys.*, 80:1355, 2008.
- [38] T. Senthil, J. B. Marston, and Matthew P. A. Fisher. Spin quantum Hall effect in unconventional superconductors. *Phys. Rev. B*, 60:4245, 1999.
- [39] V Kagalovsky, B Horovitz, Y Avishai, and JT Chalker. Quantum hall plateau transitions in disordered superconductors. *Physical review letters*, 82(17):3516, 1999.
- [40] Nicholas Read and Dmitry Green. Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum hall effect. *Physical Review B*, 61(15):10267, 2000.
- [41] R Bundschuh, C Cassanello, D Serban, and MR Zirnbauer. Localization of quasiparticles in a disordered vortex. *Nuclear Physics B*, 532(3):689–732, 1998.
- [42] JT Chalker, M Ortuno, and AM Somoza. Spin quantum hall effect and plateau transitions in multilayer network models. *Physical Review B*, 83(11):115317, 2011.
- [43] MHS Amin, AN Omelyanchouk, and AM Zagoskin. Mechanisms of spontaneous current generation in an inhomogeneous d-wave superconductor. *Physical Review B*, 63(21):212502, 2001.
- [44] MHS Amin, SN Rashkeev, M Coury, AN Omelyanchouk, and AM Zagoskin. $d + i s$ versus $d + i d'$ time reversal symmetry breaking states in finite size systems. *Physical Review B*, 66(17):174515, 2002.
- [45] MHS Amin, M Coury, AM Zagoskin, SN Rashkeev, and AN Omelyanchouk. Quasiclassical calculation of spontaneous current in restricted geometries. In *Toward The Controllable Quantum States: Mesoscopic Superconductivity and Spintronics*, pages 179–184. World Scientific, 2003.
- [46] MHS Amin, AN Omelyanchouk, SN Rashkeev, M Coury, and AM Zagoskin. Quasiclassical theory of spontaneous currents at surfaces and interfaces of d-wave superconductors. *Physica B: Condensed Matter*, 318(2-3):162–179, 2002.
- [47] G.E. Volovik. On edge states in superconductors with time inversion symmetry breaking. *JETP Lett.*, 66:522, 1997.
- [48] Alexander Altland, BD Simons, and MR Zirnbauer. Theories of low-energy quasi-particle states in disordered d-wave superconductors. *Physics Reports*, 359(4):283–354, 2002.

- [49] M. Jeng, A. W. W. Ludwig, T. Senthil, and C. Chamon. Interaction effects on quasiparticle localization in dirty superconductors. *Bull. Am. Phys. Soc.*, 46:231, 2001.
- [50] M. Jeng, A. W. W. Ludwig, T. Senthil, and C. Chamon. Interaction effects on quasiparticle localization in dirty superconductors. arXiv:cond-mat/0112044, 2001.
- [51] Yunxiang Liao, Alex Levchenko, and Matthew S. Foster. Response theory of the ergodic many-body delocalized phase: Keldysh Finkel'stein sigma models and the 10-fold way. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 386:97, 2017.
- [52] P Goddard and David I Olive. Magnetic monopoles in gauge field theories. *Reports on Progress in Physics*, 41(9):1357, 1978.
- [53] Parfenov M.V. and Burmistrov I.S. Will be published soon. 2024.
- [54] AMM Pruisken and IS Burmistrov. The instanton vacuum of generalized cpn- 1 models. *Annals of Physics*, 316(2):285–356, 2005.
- [55] VA Fateev, IV Frolov, and AS Schwarz. Quantum fluctuations of instantons in the nonlinear σ model. *Nuclear Physics B*, 154(1):1–20, 1979.
- [56] AMM Pruisken and IS Burmistrov. θ renormalization, electron–electron interactions and super universality in the quantum hall regime. *Annals of physics*, 322(6):1265–1334, 2007.
- [57] MS Marinov. Invariant volumes of compact groups. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 13(11):3357, 1980.
- [58] Luis J Boya, ECG Sudarshan, and Todd Tilma. Volumes of compact manifolds. *Reports on Mathematical Physics*, 52(3):401–422, 2003.
- [59] T Senthil and Matthew PA Fisher. Quasiparticle density of states in dirty high-t c superconductors. *Physical Review B*, 60(9):6893, 1999.
- [60] TR Morris, DA Ross, and Christopher T Sachrajda. Higher-order quantum corrections in the presence of an instanton background field. *Nuclear Physics B*, 255:115–148, 1985.
- [61] TR Morris, DA Ross, and Christopher T Sachrajda. Instanton calculus and the β function in supersymmetric yang-mills theories. *Physics Letters B*, 158(3):223–226, 1985.
- [62] TR Morris, DA Ross, and Christopher T Sachrajda. Instantons and the renormalisation group in supersymmetric yang-mills theories. *Nuclear Physics B*, 264:111–153, 1986.
- [63] TR Morris, DA Ross, and Christopher T Sachrajda. Instantons, the β -function and renormalisation scheme dependence. *Physics Letters B*, 172(1):40–45, 1986.
- [64] A.M.M. Pruisken and I.S. Burmistrov. The instanton vacuum of generalized CP^{N-1} models. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 316:285, 2005.
- [65] PA Mello. Averages on the unitary group and applications to the problem of disordered conductors. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23(18):4061, 1990.

- [66] АММ Pruisken and МА Baranov. Cracking coulomb interactions in the quantum hall regime. *Europhysics letters*, 31(9):543, 1995.
- [67] VA Koziy and Mikhail Andreevich Skvortsov. Crossovers between superconducting symmetry classes. *JETP letters*, 94:222–227, 2011.
- [68] Shanthanu Bhardwaj, Ilya A Gruzberg, and Victor Kagalovsky. Relevant perturbations at the spin quantum hall transition. *Physical Review B*, 91(3):035435, 2015.