

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»  
Факультет Физики**

Полькин Артём Владиславович

**«Эффект Джозефсона в неравновесных структурах  
сверхпроводник-ферромагнетик-сверхпроводник»**

Выпускная квалификационная работа  
по направлению подготовки 03.03.02 Физика  
образовательная программа «Физика»

**Научный руководитель:**  
*Иоселевич Павел Алексеевич,*  
*канд. физ.-мат. наук*

Москва  
2022

## Аннотация

В экспериментальном исследовании джозефсоновского S(N/F)S - контакта (сверхпроводник - нормальный металл/ферромагнетик - сверхпроводник) в дифференциальном сопротивлении обнаруживается сдвоенная особенность на напряжениях, меньших щели [7]. При увеличении внешнего магнитного поля до значений, соответствующих коэрцитивному полю, две эти особенности сливаются в одну. В данной работе рассмотрено возможное объяснение этого эффекта как следствия андреевских отражений, а также получена вольт-амперная характеристика SNS- и S(N/F)S-контактов с малой прозрачностью границ в предельном случае отсутствия взаимодействия с подложкой и в случае, когда оно играет определяющую роль.

# Содержание

<b>Аннотация</b>	<b>1</b>
<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 SINIS. Случай сильного взаимодействия с подложкой</b>	<b>6</b>
1.1 Постановка задачи . . . . .	6
1.1.1 Опережающая и запаздывающая компоненты . . . . .	7
1.1.2 Келдышевская компонента . . . . .	9
1.2 Первый порядок . . . . .	11
1.2.1 Аномальные функции Грина . . . . .	11
1.3 Второй порядок . . . . .	12
1.3.1 Нормальные функции Грина . . . . .	12
1.3.2 Аномальные функции Грина . . . . .	13
1.3.3 Функции распределения . . . . .	14
1.4 Третий порядок . . . . .	15
1.4.1 Нормальные функции Грина . . . . .	15
1.4.2 Аномальные функции Грина . . . . .	16
1.4.3 Функции распределения . . . . .	16
1.5 Потенциал . . . . .	17
1.6 Вычисление тока . . . . .	17
1.6.1 Первый порядок . . . . .	18
1.6.2 Второй порядок . . . . .	18
1.6.3 Третий порядок . . . . .	19
1.6.4 Четвёртый порядок . . . . .	21
1.7 Обсуждение полученных результатов . . . . .	23
<b>2 SINIS. Случай слабого взаимодействия с подложкой</b>	<b>24</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	24
2.2 Келдышевская компонента вблизи левой границы . . . . .	25
2.3 Решение у правой границы и сшивка . . . . .	27
2.4 Вычисление тока . . . . .	28
2.4.1 Эквивалентные цепи . . . . .	29
2.5 Применение к SINIS-контакту . . . . .	30

2.5.1	Асимптотические выражения для сопротивлений . . . . .	31
2.6	Обсуждение полученных результатов . . . . .	33
2.6.1	Границы применимости теории . . . . .	33
2.6.2	Сравнение методов . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Системы со слабым обменным полем</b>	<b>35</b>
3.1	Сильное взаимодействие с подложкой . . . . .	35
3.1.1	Зависимость тока от напряжения и обменного поля . . . . .	36
3.2	Слабое взаимодействие с подложкой . . . . .	38
3.3	Обсуждение полученных результатов . . . . .	39
3.3.1	Сравнение предельных случаев . . . . .	39
3.3.2	Приложение к эксперименту . . . . .	40
	<b>Заключение</b>	<b>42</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>43</b>
<b>A</b>	<b>Приложение. SINIS. Случай сильного взаимодействия с подложкой</b>	<b>45</b>
A.1	Поправки к функции распределения . . . . .	45
A.2	Нестационарные вклады в ток во втором порядке . . . . .	47
A.3	Все вклады в стационарный ток в третьем порядке . . . . .	48
A.4	Стационарный ток в четвёртом порядке . . . . .	49

## Введение

Исследование слабых сверхпроводящих контактов является важной темой в современной физике. В джозефсоновских контактах наблюдаются эффекты близости. В частности, андреевские отражения – отражение электронов из нормальной области от границы в виде дырок с переносом в сверхпроводник куперовской пары [5, 14]. А также появление минищели в плотности состояний нормального металла, то есть появление у металла слабых сверхпроводящих свойств [8, 5].

Не менее важны структуры, в которых стандартное ток-фазовое соотношение ( $I = I_c \sin \varphi$ ) изменяется. В частности, особенный интерес представляет реализация так называемых  $\pi$ -контактов [4], соотношение Джозефсона изменяет знак. Важнейшее семейство контактов, в котором наблюдается  $0$ - $\pi$ - переход – контакты, в которых в качестве несверхпроводящего элемента используется ферромагнетик. Однако, экспериментальное наблюдение таких систем затруднено достаточно большим значением обменного поля. Для того, чтобы уменьшить это поле, рассматриваются системы, в которых нормальная область представляет из себя бислой нормального металла и ферромагнетика [7, 6].

Такие структуры, как правило, оказываются грязными, то есть из-за сильного беспорядка движение электронов диффузно. Теоретическое описание этих систем осуществляется при помощи уравнения на функции Грина, впервые выведенного Узаделем [18]. При его помощи возможно получить критический ток в S(N/F)S-контакта с прозрачными границами, имеющий вид затухающих осцилляций от длины контакта [10]. Также возможно численно изучить влияние андреевских отражений для SNS-контакта на дифференциальную проводимость в терминах необходимых для учёта неравновесности келдышевских функций Грина. Влияние этого эффекта оказывается ослабевающим при увеличении длины контакта [5]. Если дополнить уравнение Узаделя туннельными граничными условиями в форме Куприянова-Лукичёва [12, 11], то в случае низкой проницаемости границ и отсутствия взаимодействия с подложкой для достаточно длинного контакта возможно разработать подход, позволяющий описывать ток в терминах эквивалентных электрических цепей [3], в таком случае качественно зависимости аналогичны случаю хорошего контакта, однако при менее прозрачных границах эффект андреевских отражений становится более

заметным.

Целью данной работы является изучение вольт-амперной характеристики длинного SINIS- и SI(N/F)IS-контактов в двух противоположных предельных случаях: сильного взаимодействия с подложкой и когда оно пренебрежимо мало. Такое взаимодействие в главном приближении приводит к термализации электронов в нормальной области из-за электрон-фононного взаимодействия. Первая часть представленной работы содержит решение уравнения Узалея для SINIS'а в случае, когда описанная термализация важна, методами теории возмущений. Во второй части рассмотрен противоположный предельный случай, описанный в работе [3]. В третьей части представлено обобщение предыдущих результатов на системы со слабым ферромагнитным обменом в несверхпроводящей области.

# 1 SINIS. Случай сильного взаимодействия с подложкой

В этой части работы описано получение гриновских функций и функций распределения, полагая взаимодействие контакта с резервуаром сильным, при помощи метода, аналогичного описанному в [17]. Затем с их помощью будет получено выражение для тока в интегральной форме, которое будет изучено численно и асимптотически при интересующих значениях напряжения.

## 1.1 Постановка задачи

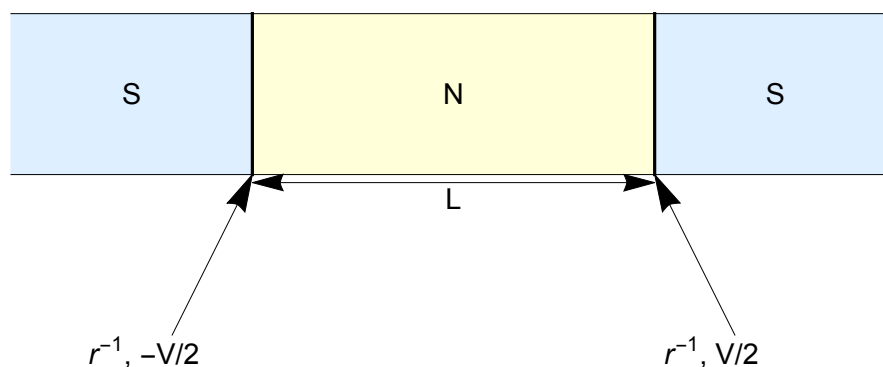


Рис. 1: Схематичное изображение контакта. Длина контакта предполагается достаточно большой  $\varepsilon_{\text{Th}} \equiv D/L^2 \ll \Delta$  ( $D$  – коэффициент диффузии), а поперечные размеры контакта много меньше продольных.

В качестве модели в этой части рассматривается длинный диффузный симметричный SINIS-контакт при низких температурах, к которому приложено постоянное напряжение. Контакт предполагается эффективно одномерным, то есть функции Грина не зависят от поперечных координат, этому соответствует однородность структуры в поперечном направлении, а для однородности взаимодействия с подложкой требуется малая толщина контакта (см. Рис. 1). Температура, в соответствии с экспериментом [7], предполагается много меньшей щели. Также предполагается, что эффектами, возникающими от решения уравнения самосогласования на щель можно пренебречь, а все когерентные эффекты в силу большой длины контакта экспоненциально подавлены, а значит различие сверхпроводящей фазы на левом и правом берегу можно не учитывать.

### 1.1.1 Опережающая и запаздывающая компоненты

Задача решалась при помощи уравнения Узаделя, которое в нормальной области принимает следующий вид, где  $x$  – длина, измеренная в единицах  $L$  (сверхпроводникам соответствуют  $x = \pm 1/2$ ),  $\varepsilon_{\text{Th}} = D/L^2$  – энергия Таулесса ( $D$  – коэффициент диффузии),  $r = R_{SN}/R_N \gg 1$  ( $R_{SN}, R_N$  – сопротивление сверхпроводящей границы и сопротивление нормальной области соответственно):

$$-\varepsilon_{\text{Th}} \partial_x [\check{G} \circ \partial_x \check{G}] - i\varepsilon [\check{\sigma}_3, \check{G}] + \frac{1}{2} \partial_T [\check{\sigma}_3, \check{G}]_+ + i\varphi_- \check{G} = \check{I}^{\text{St}} \quad (1)$$

$$\pm \check{G} \partial_x \check{G} = \frac{1}{2r} [\check{G} \circ, \check{G}_{\text{right, left}}] \quad (2)$$

Где свёртки берутся в вигнеровском представлении ( $t = \frac{t_1+t_2}{2}$ ;  $\tau = t_1 - t_2$ ). По времени  $\tau$  совершается преобразование Фурье к энергии  $\varepsilon$ . Верхний индекс обозначает функцию, на которую действует оператор:

$$A \circ B(\varepsilon, t) = \exp \left[ \frac{i}{2} \{ \partial_t^B \partial_\varepsilon^A - \partial_t^A \partial_\varepsilon^B \} \right] A(\varepsilon, t) B(\varepsilon, t) \quad (3)$$

Электрический потенциал  $\varphi_-(t_1, t_2) = \varphi(t_1) - \varphi(t_2)$  определяется из условий электронейтральности:  $\varphi(t) = \frac{\pi}{4} \text{Tr} [G^K(t, t)]$  [16].

В рамках данной модели функции Грина и функции распределения сверхпроводящих берегов совпадают с таковыми для объёмного сверхпроводника (калибровка предполагается  $\hat{\Delta} = \Delta \hat{\sigma}_1$ ), иными словами даются выражениями:

$$\hat{G}_S^{R(A)} = \begin{pmatrix} g_S^{R(A)}(\varepsilon) & f_S^{R(A)}(\varepsilon) \\ f_S^{R(A)}(\varepsilon) & -g_S^{R(A)}(\varepsilon) \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$g_S^{R(A)}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\Delta} (\pm \eta_S - i\xi_S) \quad (5)$$

$$f_S^{R(A)}(\varepsilon) = \xi_S \pm i\eta_S \quad (6)$$

$$\eta_S = \frac{\Delta \text{sign } \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \theta(|\varepsilon| - \Delta) \quad (7)$$

$$\xi_S = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}} \theta(\Delta - |\varepsilon|) \quad (8)$$

Келдышевская компонента функции Грина  $\hat{G}_S^K$  параметризована в терминах



матричной функции распределения  $\hat{h}_S$ :

$$\hat{G}_S^K = \hat{G}_S^R \circ \hat{h}_S - \hat{h}_S \circ \hat{G}_S^A \quad (9)$$

$$\hat{h}_S = \hat{\sigma}_0 \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_S}\right) \quad (10)$$

К этой постановке необходимо также добавить связь между запаздывающей и опережающей компонентами функции Грина, а также добавить условие нормировки:

$$\hat{G}^A = -\hat{\sigma}_3 \hat{G}^{R\dagger} \hat{\sigma}_3 \quad (11)$$

$$\hat{G}^{R(A)} \circ \hat{G}^{R(A)} = 1 \quad (12)$$

Для того, чтобы перейти к функциям, относящимся к берегам, к которым приложено постоянное напряжение, необходимо совершить калибровочное преобразование

$$\check{G}_{\text{right,left}} = \check{S}_{\pm V/2}^\dagger(t_1) \check{G}_S \check{S}_{\pm V/2}(t_2)$$

$$\check{S}_V(t) = \exp[i\check{\sigma}_3 Vt]$$

Здесь плюс соответствует правому берегу, а минус левому. После калибровочного преобразования (в пространстве Фурье по  $\tau$ ) матрицы переходят в:

$$\hat{M}_{\text{right,left}} = \begin{pmatrix} M_{11}(\varepsilon \pm \frac{V}{2}) & M_{12}(\varepsilon) e^{\pm iVt} \\ M_{21}(\varepsilon) e^{\mp iVt} & M_{22}(\varepsilon \mp \frac{V}{2}) \end{pmatrix} \quad (13)$$

В нормальной же области для построения теории возмущений удобно ввести параметризацию в следующем виде:

$$\hat{G}^{R(A)} = \begin{pmatrix} \pm \left(1 - g_1^{R(A)}\right) & f_1^{R(A)} \\ f_2^{R(A)} & \mp \left(1 - g_2^{R(A)}\right) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Тогда в терминах заданной параметризации связь между аномальными и нормальными функциями Грина получаются из условия нормировки келдышевской функции Грина (12):

$$g_{1,2}^R = \frac{1}{2} (f_{1,2}^R \circ f_{2,1}^R + g_{1,2}^R \circ g_{1,2}^R) \quad (15)$$

В частности отсюда видно, что  $g_{1,2}^R$  старшего порядка по  $r^{-1}$ . Забегая вперёд, можно отметить, что электрический потенциал  $\varphi_-$  также оказывается старшего порядка, более того, он экспоненциально подавлен с длиной контакта (58).

Для интеграла столкновений будет использовано  $\tau$ -приближение с неэластичным временем  $\tau_{in}$ , которое соответствует электрон-фононному взаимодействию с подложкой, на которой находится контакт.

### 1.1.2 Келдышевская компонента

Взаимодействие с подложкой обеспечивает релаксацию частиц в нормальной области. Контакт полагается настолько туннельным, что функция распределения в нормальном металле успеваает термализоваться с некоторой другой эффективной температурой  $T_e$ . Условие термализации в терминах параметров обозначает, что  $\gamma \equiv (\tau_{in}\varepsilon_{Th})^{-1} \gg r^{-2}$ . Физически это свойство системы приводит к тому, что за время нахождения в нормальной области частица может успеть термализоваться, так как выход из нормальной области происходит редко в силу высокой туннельности. Это приводит к тому, что подщелевая структура ВАХ контакта существенно изменяется относительно случая без релаксации, что будет показано в следующей главе, и эффекты Андреевских отражений становятся параметрически малыми.

Чтобы определить значение эффективной температуры, необходимо написать уравнения теплового баланса между электрон-фононным взаимодействием с подложкой и переданной энергией, аналогичное [13, 15]. В таком случае, приходим к уравнению:

$$2P(V) = P_{e-ph} \quad (16)$$

$$P_{e-ph} = \Sigma \mathcal{V} (T_S^5 - T_e^5) \quad (17)$$

Здесь  $\Sigma$  – константа взаимодействия, зависящая от материала, а  $\mathcal{V}$  – объём нормальной области. Учитывая приближения, сделанные в [15], поток тепла

можно записать в следующем виде:

$$P(V) = \frac{\Delta}{2R_N} \left( \Delta \left[ \left\{ K_0 \left( \frac{\Delta}{2 \log 2T_e} \right) + K_2 \left( \frac{\Delta}{2 \log 2T_e} \right) \right\} \cosh \left( \frac{V}{4 \log 2T_e} \right) - K_0 \left( \frac{\Delta}{2 \log 2T_S} \right) - K_2 \left( \frac{\Delta}{2 \log 2T_S} \right) \right] - V \sinh \left( \frac{V}{4 \log 2T_e} \right) K_1 \left( \frac{\Delta}{2 \log 2T_e} \right) \right) \quad (18)$$

Уравнение (16) можно приближенно решить на температурах  $T_S \ll \Delta$ . Полагая, что  $T_e \sim T_S$  получаем следующее выражение:

$$T_e = T_S - \frac{1}{5\Sigma\mathcal{V}T_S^4} \frac{\Delta}{2e^2R} \sqrt{\frac{\pi T_S \log 2}{\Delta}} \left( \Delta - \frac{V}{2} \right) e^{-\frac{\Delta}{2 \log 2T_S}} \quad (19)$$

Таким образом, в нулевом приближении функция распределения представляет из себя диагональную матрицу с компонентами  $\tanh \frac{\varepsilon}{2T_e}$ .

Уравнение же на функцию распределения  $\hat{h}$  получаются из (1) как Келдышевская компонента и, сокращая члены, соответствующие диагональным компонентам (1), представляется в виде:

$$- \varepsilon_{\text{Th}} \left\{ \partial_x^2 \hat{h} - \partial_x \left[ \hat{G}^R \circ \partial_x \hat{h} \circ \hat{G}^A \right] + \left[ \hat{G}^R \circ \partial_x \hat{G}^R \right] \circ \partial_x \hat{h} - \left[ \partial_x \hat{h} \right] \circ \left[ \hat{G}^A \circ \partial_x \hat{G}^A \right] \right\} + \frac{1}{2} \left[ \hat{\sigma}_3, \hat{G}^R \right]_+ \circ \partial_t \hat{h} - \frac{1}{2} \left[ \partial_t \hat{h} \right] \circ \left[ \hat{\sigma}_3, \hat{G}^A \right]_+ + i\varphi_- \circ \hat{G}^K = [I^{\text{St}}]^K \quad (20)$$

Граничные условия на  $\hat{h}$ , получающиеся из (2) после преобразований с помощью условий на запаздывающие и опережающие компоненты, переписываются в форме (здесь индекс  $S, r$  подразумевает правый сверхпроводник):

$$\partial_x \hat{h} - \hat{G}^R \circ \left[ \partial_x \hat{h} \right] \circ \hat{G}^A = \frac{1}{2r} \left( \hat{G}^R \circ \hat{G}_{S,r}^R \circ \widehat{\delta h} - \hat{G}^R \circ \widehat{\delta h} \circ \hat{G}_{S,r}^A + \widehat{\delta h} \circ \hat{G}_{S,r}^A \circ \hat{G}^A - \hat{G}_{S,r}^R \circ \widehat{\delta h} \circ \hat{G}^A \right) \quad (21)$$

$$\hat{h}_{S,r} - \hat{h} = \widehat{\delta h} = \begin{pmatrix} \delta h_1 & 0 \\ 0 & \delta h_2 \end{pmatrix}$$

Выбор матрицы в диагональном виде возможен благодаря линейности уравнения (20). Из граничных условий (21) можно заметить, что минимальная поправка к функции распределения будет второго порядка по  $r^{-1}$ .

В интересующих втором и третьем порядках полезно ввести параметризацию для  $\hat{h} = h_0 \hat{1} + h_3 \hat{\sigma}_3$ . В таком случае, уравнения разделяются путём взятия следа  $\text{Tr}[\cdot]$  и  $\text{Tr}[\hat{\sigma}_3 \cdot]$  от полного матричного уравнения (20), после чего выражения принимают сравнительно простой вид:

$$\varepsilon_{\text{Th}} \partial_x^2 h_0^{(2,3)} - (\partial_T + \tau_{\text{in}}^{-1}) h_0^{(2,3)} = 0 \quad (22)$$

$$\varepsilon_{\text{Th}} \partial_x^2 h_3^{(2,3)} - (\partial_T + \tau_{\text{in}}^{-1}) h_3^{(2,3)} = i\varphi_- h_0^{(0)} \quad (23)$$

Здесь верхний индекс обозначает степень малости  $h_{0,3}$  по параметру  $r^{-1}$ .

Разделение при помощи взятия соответствующих следов от уравнения (21) будет применяться ниже и для поиска граничных условий в интересующих первых двух нетривиальных порядках.

В этих уравнениях в силу оговоренной выше малости по параметру  $\varepsilon_{\text{Th}}/T_e$  в дальнейшем пренебрегается электрическим потенциалом. Таким образом, итоговое приближение имеет следующий вид:  $\Delta \gg T_{S,e} \gg \varepsilon_{\text{Th}}$ .

## 1.2 Первый порядок

### 1.2.1 Аномальные функции Грина

В главном порядке поправки есть лишь к аномальной функции Грина  $f_{1,2}^R$ , поэтому в этом и последующих порядках из матричного уравнения (1) будут браться только оффдиагональные компоненты, дающие искомые поправки. Таким образом, в описанных выше приближениях, уравнения и граничные условия принимают следующий вид:

$$\varepsilon_{\text{Th}} \partial_x^2 f_{1,2}^R + [2i\varepsilon - \tau_{\text{in}}^{-1}] f_{1,2}^R = 0 \quad (24)$$

$$\partial_x f_{1,2}^R \Big|_{x=1/2} = \frac{1}{r} f_S^R e^{\pm iVt} \quad (25)$$

$$\partial_x f_{1,2}^R \Big|_{x=-1/2} = \frac{1}{r} f_S^R e^{\mp iVt}$$

Тогда решения уравнения (24) записывается в следующем виде:

$$f_{1,2}^R(x, \varepsilon, t) = -\frac{f_0^R}{r \varkappa_\varepsilon \sin \varkappa_\varepsilon} \left\{ \cos[\varkappa_\varepsilon(x + 1/2)] e^{\pm iVt} + \cos[\varkappa_\varepsilon(x - 1/2)] e^{\mp iVt} \right\} \quad (26)$$

$$\varkappa_\varepsilon^2 = \frac{2i\varepsilon}{\varepsilon_{\text{Th}}} - \frac{1}{\tau_{\text{in}} \varepsilon_{\text{Th}}} \quad (27)$$

Стоит отметить, что выписанные выше функции не добавляют новых разрезов в комплексную плоскость переменной  $\varepsilon$ , так как все зависимости от  $\varkappa_\varepsilon$  квадратичные.

Выражения для опережающих компонент получаются из общего соотношения нормировки (11), после чего, беря во внимание вид функций Грина, приходим к соотношениям вида:  $f_{1,2}^R(\varepsilon, t) = f_{1,2}^A(-\varepsilon, t)$

Для корректности линеаризации уравнения Узаделя (24) необходима малость аномальной функции Грина в нормальной области по сравнению с функциями сверхпроводника, из чего следует неприменимость такого приближения для некоторых энергий:  $|\Delta - |\varepsilon|| \ll \varepsilon_{\text{Th}}/r^2$

Полезно для дальнейших вычислений выписать значение аномальной функции Грина на правой границе со сверхпроводником:

$$f_{1,2}^R(x = 1/2) = u^R(\varepsilon)e^{\pm iVt} + v^R(\varepsilon)e^{\mp iVt} \quad (28)$$

$$f_{1,2}^A(x = 1/2) = u^A(\varepsilon)e^{\pm iVt} + v^A(\varepsilon)e^{\mp iVt} \quad (29)$$

$$u^{R(A)}(\varepsilon) = -f_S^{R(A)}(\varepsilon)u(\pm\varepsilon) \quad (30)$$

$$v^{R(A)}(\varepsilon) = -f_S^{R(A)}(\varepsilon)v(\pm\varepsilon) \quad (31)$$

$$u(\varepsilon) = \frac{\cos \varkappa_\varepsilon}{r \varkappa_\varepsilon \sin \varkappa_\varepsilon} \quad (32)$$

$$v(\varepsilon) = \frac{1}{r \varkappa_\varepsilon \sin \varkappa_\varepsilon} \quad (33)$$

## 1.3 Второй порядок

### 1.3.1 Нормальные функции Грина

Введём обозначения для сдвигов аргумента энергии на  $V/2$  ( $\Phi$  – произвольная функция):  $\Phi_\pm = \Phi(\varepsilon \pm V/2)$ ;  $\Phi_{\pm\pm} = \Phi(\varepsilon \pm V)$ ;  $\Phi_{\pm\pm\pm} = \Phi(\varepsilon \pm 3V/2)$ .

Тогда благодаря соотношению нормировки (11) возможно найти диагональные компоненты функции Грина:

$$g_1^R(x, \varepsilon) = \frac{1}{2} \left\{ v_-^{R^2} \cos^2 \left[ \varkappa_{\varepsilon-V/2} \left( x - \frac{1}{2} \right) \right] + v_+^{R^2} \cos^2 \left[ \varkappa_{\varepsilon+V/2} \left( x + \frac{1}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. (e^{2itV} + e^{-2itV}) v_+^R v_-^R \cos \left[ \varkappa_{\varepsilon-V/2} \left( x + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[ \varkappa_{\varepsilon+V/2} \left( x - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (34)$$

$$g_2^R(x, \varepsilon) = \frac{1}{2} \left\{ v_+^{R^2} \cos^2 \left[ \varkappa_{\varepsilon+V/2} \left( x - \frac{1}{2} \right) \right] + v_-^{R^2} \cos^2 \left[ \varkappa_{\varepsilon-V/2} \left( x + \frac{1}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. (e^{2itV} + e^{-2itV}) v_-^R v_+^R \cos \left[ \varkappa_{\varepsilon+V/2} \left( x + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[ \varkappa_{\varepsilon-V/2} \left( x - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (35)$$

Вблизи правой границы эти функции можно переписать в следующем виде, где опережающие компоненты вновь найдены из соотношения (11):

$$g_1^{R(A)}(x = 1/2, \varepsilon) = \frac{1}{2} \left\{ u_+^{R(A)^2} + v_-^{R(A)^2} + (e^{2itV} + e^{-2itV}) u_-^R v_+^R \right\} \quad (36)$$

$$g_2^{R(A)}(x = 1/2, \varepsilon) = \frac{1}{2} \left\{ u_-^{R(A)^2} + v_+^{R(A)^2} + (e^{2itV} + e^{-2itV}) u_+^R v_-^R \right\} \quad (37)$$

### 1.3.2 Аномальные функции Грина

В этом порядке линеаризованное уравнение (24) не изменяется, однако граничные условия уточняются. Тогда, обозначая аномальные компоненты во втором порядке как  $\tilde{f}_{1,2}^{R(A)}$ , вблизи правого сверхпроводника из уравнений (2) получаются следующие соотношения:

$$\partial_x \tilde{f}_{1,2}^R \Big|_{x=1/2} = -\frac{1}{2r} [f_{1,2}^R \circ g_{S,\mp} + g_{S,\pm} \circ f_{1,2}^R] \quad (38)$$

Для получения граничных условий на левой границе необходимо произвести замену общего знака перед квадратными скобками и изменить знак напряжения. В таком случае, решения принимают следующий вид:

$$\tilde{f}_{1,2}^R(x) = \frac{e^{\mp itV}}{2r \varkappa_\varepsilon \sin \varkappa_\varepsilon} \left\{ 2u^R(\varepsilon) g_S^R \cos \left( \varkappa_\varepsilon \left( x - \frac{1}{2} \right) \right) + \right. \\ \left. \cos \left( \left( x + \frac{1}{2} \right) \varkappa_\varepsilon \right) v^R(\varepsilon) [g_{S,--}^R + g_{S,++}^R] \right\} + \\ \frac{e^{\pm itV}}{2r \varkappa_\varepsilon \sin \varkappa_\varepsilon} \left\{ 2u^R(\varepsilon) g_S^R \cos \left( \varkappa_\varepsilon \left( x + \frac{1}{2} \right) \right) + \right. \\ \left. \cos \left( \left( x - \frac{1}{2} \right) \varkappa_\varepsilon \right) v^R(\varepsilon) [g_{S,--}^R + g_{S,++}^R] \right\} \quad (39)$$

Вновь выписывая значения у правой границы, получаем при помощи (11):

$$\tilde{f}_{1,(2)}^R \left( x = \frac{1}{2} \right) = \alpha^R e^{(\bar{+})itV} + \beta^R e^{(\pm)itV} \quad (40)$$

$$\tilde{f}_{1,(2)}^A \left( x = \frac{1}{2} \right) = -\alpha^A e^{(\bar{+})itV} - \beta^A e^{(\pm)itV} \quad (41)$$

$$\alpha^{R(A)} = \frac{2u^{R(A)} g_S^{R(A)} v^{R(A)} + u^{R(A)} v^{R(A)} \left[ g_{S,++}^{R(A)} + g_{S,--}^{R(A)} \right]}{2} \quad (42)$$

$$\beta^{R(A)} = \frac{2u^{R(A)} g_S^{R(A)} u^{R(A)} + v^{R(A)} v^{R(A)} \left[ g_{S,++}^{R(A)} + g_{S,--}^{R(A)} \right]}{2}$$

Минус в уравнении (41) возникает из определения диагональных компонент функций Грина, для которых  $(g_S^R)^* = -g_S^A$ .

### 1.3.3 Функции распределения

Во втором порядке по  $r^{-1}$  граничные условия (21) выглядят следующим образом:

$$4\partial_x h_0^{(2)} \Big|_{x=1/2} = \frac{1}{2r} [J_1 - J_2] \quad (43)$$

$$4\partial_x h_3^{(2)} \Big|_{x=1/2} = \frac{1}{2r} [J_1 + J_2] \quad (44)$$

$$J_1 = f_1^R \circ [e^{-iVt} (f_S^R \delta h_{1-} - f_S^A \delta h_{2+})] + [e^{iVt} (f_S^A \delta h_{1-} - f_S^R \delta h_{2+})] \circ f_2^A \quad (45)$$

$$J_2 = f_2^R \circ [e^{iVt} (f_S^A \delta h_{1-} - f_S^R \delta h_{2+})] + [e^{-iVt} (f_S^R \delta h_{1-} - f_S^A \delta h_{2+})] \circ f_1^A$$

Здесь переход к левой границе осуществляется заменой знака напряжения, а также заменой общего знака в (43). Подобная симметрия граничных условий и временная зависимость функций  $h_{0,3}$  в виде  $e^{i2nVt}$  позволяют искать поправки к  $h_0$ ,  $h_3$  в виде ряда Фурье следующего вида:

$$h_0^{(2)} = \sum_n A_n^{(2)}(\varepsilon) \cos(\varkappa_{nV} x) e^{2inVt} \quad (46)$$

$$h_3^{(2)} = \sum_n B_n^{(2)}(\varepsilon) \sin(\varkappa_{nV} x) e^{2inVt} \quad (47)$$

$$\varkappa_{nV}^2 = \frac{2inV}{\varepsilon_{\text{Th}}} - \frac{1}{\tau_{\text{in}} \varepsilon_{\text{Th}}} \quad (48)$$

Подставляя функции распределения в таком виде в граничные условия (43,44) можно получить выражения для коэффициентов (49,50), где  $\Delta(m, k)$  – символ

Кронекера.

$$\begin{aligned}
A_n^{(2)}(\varepsilon) = & -\frac{1}{8\chi_{nV}r \sin[\chi_{nV}/2]} [ \\
& \Delta(n, 1) \{ - [f_{S,+}^A \delta h_1 - f_{S,+}^R \delta h_{2,++}] v_-^R + [f_{S,-}^A \delta h_{1--} - f_{S,-}^R \delta h_2] v_+^A \} + \\
& \Delta(n, -1) \{ - [f_{S,+}^R \delta h_1 - f_{S,+}^A \delta h_{2,++}] v_-^A + [f_{S,-}^R \delta h_{1--} - f_{S,-}^A \delta h_2] v_+^R \} + \\
& \Delta(n, 0) \{ - [f_{S,-}^A \delta h_{1--} - f_{S,-}^R \delta h_2] u_-^R - [f_{S,-}^R \delta h_{1--} - f_{S,-}^A \delta h_2] u_-^A \\
& + [f_{S,+}^R \delta h_1 - f_{S,+}^A \delta h_{2,++}] u_+^R + [f_{S,+}^A \delta h_1 - f_{S,+}^R \delta h_{2,++}] u_+^A \} \quad (49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n^{(2)}(\varepsilon) = & \frac{1}{8\chi_{nV}r \cos[\chi_{nV}/2]} [ \\
& \Delta(n, 1) \{ [f_{S,+}^A \delta h_1 - f_{S,+}^R \delta h_{2,++}] v_-^R + [f_{S,-}^A \delta h_{1--} - f_{S,-}^R \delta h_2] v_+^A \} + \\
& \Delta(n, -1) \{ [f_{S,+}^R \delta h_1 - f_{S,+}^A \delta h_{2,++}] v_-^A + [f_{S,-}^R \delta h_{1--} - f_{S,-}^A \delta h_2] v_+^R \} + \\
& \Delta(n, 0) \{ [f_{S,-}^A \delta h_{1--} - f_{S,-}^R \delta h_2] u_-^R + [f_{S,-}^R \delta h_{1--} - f_{S,-}^A \delta h_2] u_-^A \\
& + [f_{S,+}^R \delta h_1 - f_{S,+}^A \delta h_{2,++}] u_+^R + [f_{S,+}^A \delta h_1 - f_{S,+}^R \delta h_{2,++}] u_+^A \} \quad (50)
\end{aligned}$$

Из вида коэффициентов, можно определить, область малости параметров. Тогда, считая  $u^{R(A)} \sim r^{-1}$ ,  $f^{R(A)} \sim 1$  приходим к требованию, что  $\gamma r^2 \gg 1$ . В случае энергий, близких к  $\Delta \pm V/2$ , где  $f^R \sim r \sqrt{\Delta/\varepsilon_{\text{Th}}}$  приходим к требованию, что  $\gamma \gg \sqrt{\Delta/\varepsilon_{\text{Th}}}$ .

## 1.4 Третий порядок

### 1.4.1 Нормальные функции Грина

В третьем порядке поправка к диагональным компонентам получается аналогично предыдущему порядку, тогда, обозначая поправку к нормальной функции Грина как  $\tilde{g}$  и выписывая все члены искомого порядка из (15) приходим к

$$\tilde{g}_{1,2}^R = \frac{1}{2} \left[ f_{1,2}^R \circ \tilde{f}_{2,1}^R + \tilde{f}_{1,2}^R \circ f_{2,1}^R \right] \quad (51)$$

В дальнейшем при вычислении тока важны будут только значения на границе. Поэтому в окрестности правого сверхпроводника получаем следующие выражения для запаздывающих и опережающих компонент (происхождение ми-



нуса аналогично таковому в  $\tilde{f}^A$ ):

$$\tilde{g}_1^{R(A)} = \pm \frac{1}{2} \left\{ 2 \left( \beta_+^{R(A)} u_+^{R(A)} + \alpha_-^{R(A)} v_-^{R(A)} \right) + \left( e^{2itV} + e^{-2itV} \right) \left[ \alpha_+^{R(A)} u_-^{R(A)} + \beta_-^{R(A)} v_+^{R(A)} \right] \right\} \quad (52)$$

$$\tilde{g}_2^{R(A)} = \pm \frac{1}{2} \left\{ 2 \left( \beta_-^{R(A)} u_-^{R(A)} + \alpha_+^{R(A)} v_+^{R(A)} \right) + \left( e^{2itV} + e^{-2itV} \right) \left[ \alpha_-^{R(A)} u_+^{R(A)} + \beta_+^{R(A)} v_-^{R(A)} \right] \right\} \quad (53)$$

### 1.4.2 Аномальные функции Грина

В этом порядке разложения меняется и уравнение Узаделя. Тогда, обозначая третью поправку как  $\bar{f}_{1,2}^{R(A)}$ , уравнение (1) принимает вид:

$$- \varepsilon_{\text{Th}} \partial_x \left[ \partial_x \bar{f}_{1,2}^R - g_{1,2}^R \circ \partial_x f_{1,2}^R + f_{1,2}^R \circ \partial_x g_{2,1}^R \right] - (2i\varepsilon - \tau_{\text{in}}^{-1}) \bar{f}_{1,2}^R = 0 \quad (54)$$

Граничные условия у правой границы в искомом порядке принимают вид (55). Левая граница вновь отличается лишь заменой знака перед квадратной скобкой и знаком напряжения:

$$\partial_x \bar{f}_{1,2}^R - g_{1,2}^R \circ \partial_x f_{1,2}^R + f_{1,2}^R \circ \partial_x g_{2,1}^R = \frac{1}{2r} \left[ -g_{1,2}^R \circ f_{S1,2}^R - \tilde{f}_{1,2}^R \circ g_{S2,1}^R - f_{S1,2}^R \circ g_{2,1}^R - g_{S1,2}^R \circ \tilde{f}_{1,2}^R \right] \quad (55)$$

Важным в дальнейшем свойством решения этих уравнений является появление гармоник  $e^{\pm 3iVt}$ , что соответствует появлению в электрическом токе в пятом порядке по  $r^{-1}$  гармоник вида  $e^{6iVt}$

### 1.4.3 Функции распределения

В третьем порядке сохраняется симметрия граничных условий, указанная выше. Тогда, вводя обозначения  $g_{S,1(2)}^R = g_{S,(\pm)}^R$ ,  $f_{S,1(2)}^R = f_S^R e^{(\pm)iVt}$ , граничные условия можно записать как (см. Приложение (120,121)). Сами же решения ищутся вновь в виде ряда по гармоникам  $2V$  и записываются в виде:

$$h_0^{(3)} = \sum_{n=-1,0,1} A_n^{(3)}(\varepsilon) \cos(\varkappa_n V x) e^{2inVt} \quad (56)$$

$$h_3^{(3)} = \sum_{n=-1,0,1} B_n^{(3)}(\varepsilon) \sin(\varkappa_n V x) e^{2inVt} \quad (57)$$

Здесь коэффициенты даются выражениями (см. Приложение (122,123)). Стоит отметить, что старших гармоник в этом порядке не возникает.

## 1.5 Потенциал

Для вычисления потенциала во втором порядке необходимо взять след от келдышевской компоненты функции Грина, после чего для перехода к совпадающим моментам времени необходимо взять обратное преобразование Фурье от этого следа. Таким образом, для электрического потенциала в ведущем порядке получается следующее выражение:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \int d\varepsilon \left\{ h_3^{(2)} + \frac{1}{4} (g_2^R - g_1^R) \circ h_0^{(0)} + \frac{1}{4} h_0^{(0)} \circ (g_2^A - g_1^A) \right\} \quad (58)$$

Как и следовало, электрический потенциал оказался второго порядка малости по  $r^{-1}$ . В произвольной точке пространства, как видно из уравнения (58), потенциал мал, так как все аномальные функции Грина в нормальной области малы в меру экспоненциальной малости  $v(\varepsilon)$ . Аналогичные выражения, всегда содержащие в себе  $v(\varepsilon)$ , будут появляться и в более старших порядках. Вклад от  $h_3^{(2)}$ , не содержащий явной экспоненциальной малости, не вносит своего вклада в уравнения, так как не зависит от времени.

## 1.6 Вычисление тока

Ток вычисляется по стандартной для келдышевского формализма формуле  $I(t) = \frac{\pi}{4R_N} \text{Tr} \left[ \hat{\sigma}_3 \hat{j}^K(t, t) \right]$ , где  $\hat{j}^K = (\check{G} \circ \partial_x \check{G})^K$ . Подобное выражение, аналогично вычислению электрического потенциала, приводит к интегралу по всем энергиям.

Граничные условия (2) содержат дополнительную малость по параметру  $r^{-1}$ , поэтому позволяют вычислять ток в  $r^{-(n+1)}$  порядке, где  $n$  – порядок поправок, используемых для вычисления. В свою очередь, уравнение Узаделя (1) сохраняет ток в нормальной области, поэтому вычисления произведены при использовании значений около правого сверхпроводника. Из сказанного выше ясно, что главный порядок пропорционален  $r^{-1}$ .

### 1.6.1 Первый порядок

В главном порядке для тока получается сравнительно простое выражение:

$$I = \frac{1}{8R_N r} \int d\varepsilon \{ \delta h_2 (g_{S,-}^A - g_{S,-}^R) - \delta h_1 (g_{S,+}^A - g_{S,+}^R) \} \quad (59)$$

Здесь не важна энергия Таулесса, поэтому в пределе низких температур  $T_e, T_S \ll \Delta$ , что верно для изначальной постановки задачи этот интеграл можно оценить:

$$I(t) = \frac{1}{2r R_N} \theta(V - 2\Delta) \sqrt{V^2 - (2\Delta)^2} \quad (60)$$

Этот ответ вполне ожидаем, так как из определения  $r$  следует, что знаменатель равен  $2R_{SN}$ , что в главном порядке соответствует полному сопротивлению всего контакта  $R_\Sigma \equiv 2R_{SN} + R_N$ .

### 1.6.2 Второй порядок

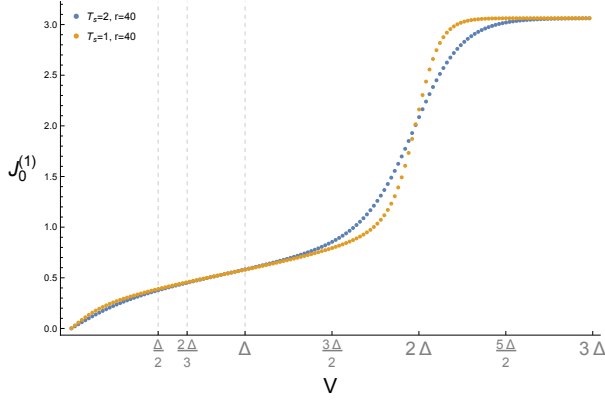
Во втором порядке, производя сдвиги переменной интегрирования, можно получить следующее выражение

$$I^{(2)}(t) = \frac{1}{8R_\Sigma} \left\{ J_{h_s}^{(1)} + \left( J_0^{(1)} + J_+^{(1)} e^{2iVt} + J_-^{(1)} e^{-2iVt} \right) \right\} \quad (61)$$

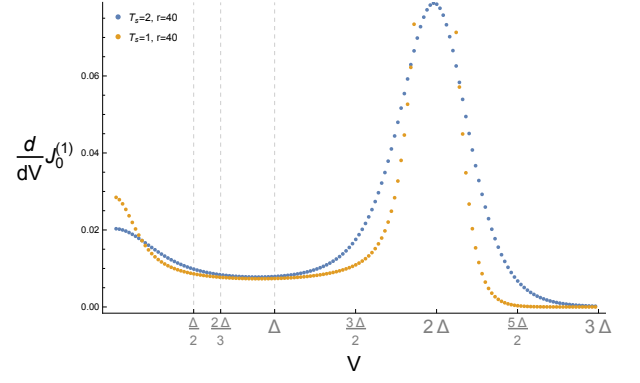
В этом выражении вкладом, не зависящим от времени является только вклад  $J_0^{(1)}$ , даваемый выражением:

$$J_0^{(1)}(\varepsilon) \equiv \int d\varepsilon \tanh \frac{\varepsilon}{2T_e} [(f_{S,-}^A + f_{S,-}^R) (u_-^A + u_-^R) - (f_{S,+}^A + f_{S,+}^R) (u_+^A + u_+^R)] \quad (62)$$

Отметим, что все вклады, зависящие от времени, даваемые выражениями (см. Приложение (125,126,127)), как и следует, в сумме дают вещественный вклад в ток.



(a)  $J_0^{(1)}$  по формуле (62)



(b)  $\frac{d}{dV} J_0^{(1)}$  по формуле (62)

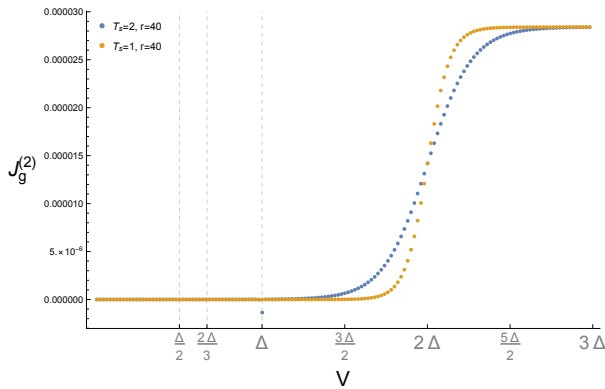
Рис. 2: Ток в первом порядке по  $r^{-1}$  при  $\Delta = 30$ ,  $\varepsilon_{\text{Th}} = 1/8$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $r = 40$

### 1.6.3 Третий порядок

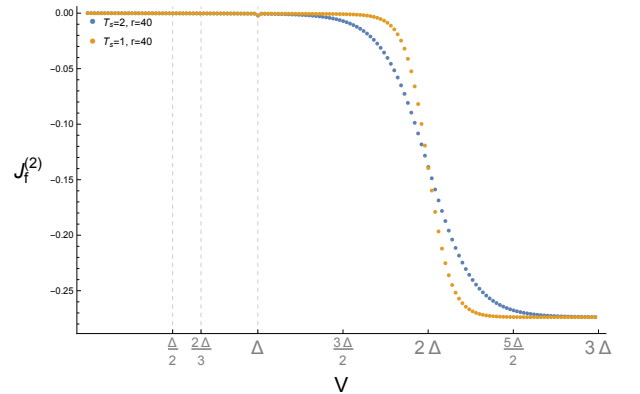
В третьем порядке интеграл для тока содержит в себе члены, происхождение которых различно, поэтому, разделяя ток на вклады от поправок к функциям Грина и функций распределения и оставляя только нулевую гармонику, получим:

$$I^{(3)} = \frac{1}{8R_{\Sigma}} \left[ \frac{1}{4\kappa_0 r} \left( \cot \frac{\kappa_0}{2} + \tan \frac{\kappa_0}{2} \right) J_+^{(2)} + J_f^{(2)} + J_g^{(2)} \right] \quad (63)$$

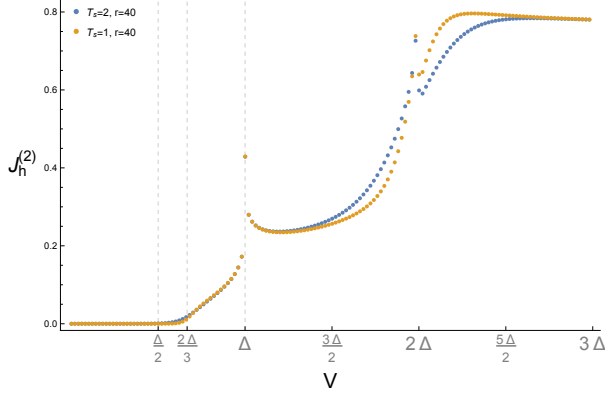
$$J_+^{(2)} = \int d\varepsilon (g_{S,+}^R - g_{S,+}^A) (u_-^A (\delta h_2 f_{S,-}^A - \delta h_{1,-} f_{S,-}^R) + u_-^R (\delta h_2 f_{S,-}^R - \delta h_{1,-} f_{S,-}^A)) + (g_{S,-}^A - g_{S,-}^R) (u_+^A (\delta h_1 f_{S,+}^A - \delta h_{2,+} f_{S,+}^R) + u_+^R (\delta h_1 f_{S,+}^R - \delta h_{2,+} f_{S,+}^A)) \quad (64)$$



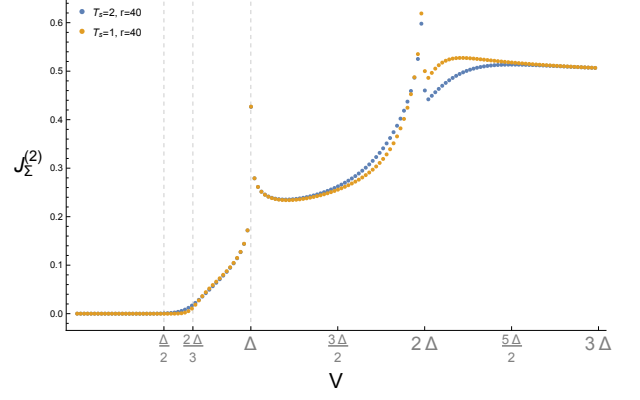
(a)  $J_g^{(2)}$  по формуле (133)



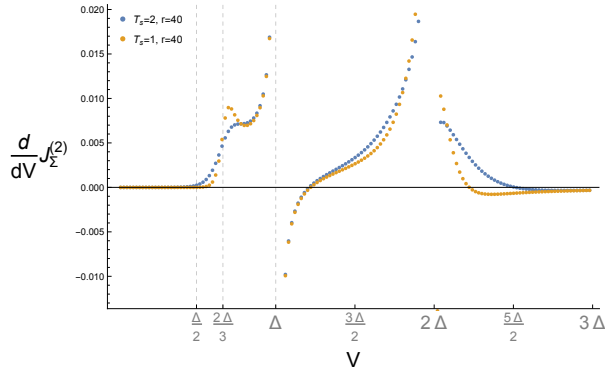
(b)  $J_f^{(2)}$  по формуле (134)



(c)  $J_+^{(2)}$  по формуле (64)



(d)  $J_Σ^{(2)} = 8R_Σ I^{(3)}$  по формуле (63)



(e)  $\frac{d}{dV} J_Σ^{(2)}$  по формуле (63)

Рис. 3: Различные вклады в ток во втором порядке по  $r^{-1}$  при  $\Delta = 30$ ,  $\varepsilon_{\text{Th}} = 1/8$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $r = 40$

Дальнейший численный анализ показывает, что искомые нетривиальные эффекты соответствуют поправкам, даваемым изменением функции распределения (см. 3(c)). Оказывается, что пороговая особенность на  $V \sim 2\Delta/3$  в пределе низких температур  $\varepsilon_{\text{Th}} \ll T_{e,S} \ll \Delta$  имеет корневой вид:

$$J_+^{(2)} \left( V \sim \frac{2\Delta}{3} \right) = 9\sqrt{3\Delta} \sqrt{V - \frac{2}{3}\Delta} \left[ u \left( \frac{\Delta}{3} \right) + u \left( -\frac{\Delta}{3} \right) \right] \theta \left( V - \frac{2}{3}\Delta \right) \quad (65)$$

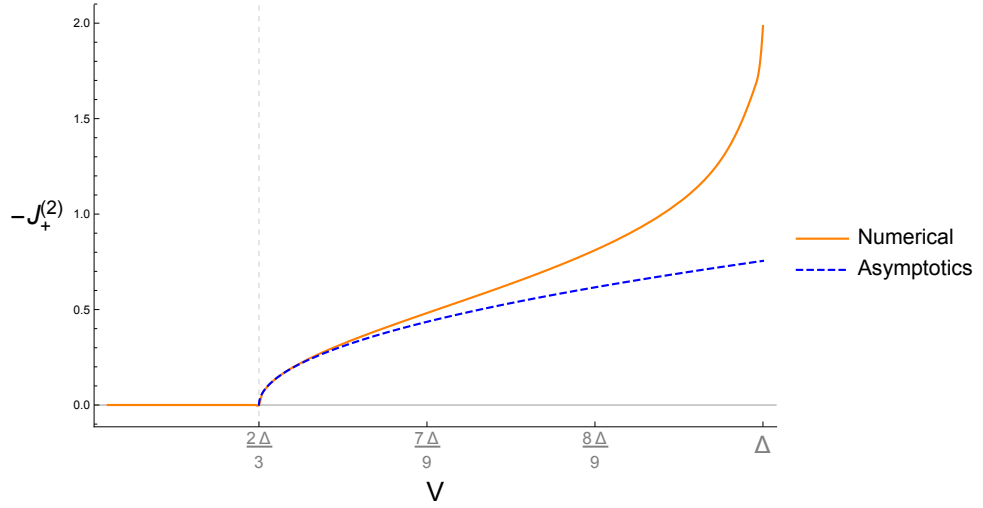


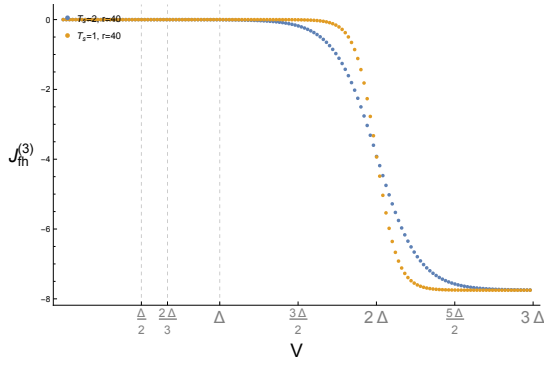
Рис. 4: Сравнение численного счёта для  $J_+^{(2)}$  в пределе нулевых температур и корневой асимптотики (65)

Стоит отметить, что префактор, с которым  $J_+^{(2)}$  входит в ток, обеспечивает экспоненциальную малость по параметру  $\gamma^{1/2} = (\tau_{\text{in}}\varepsilon_{\text{Th}})^{-1/2}$ . Вклад же с разностью тригонометрических функций, как и ожидалось, равен нулю.

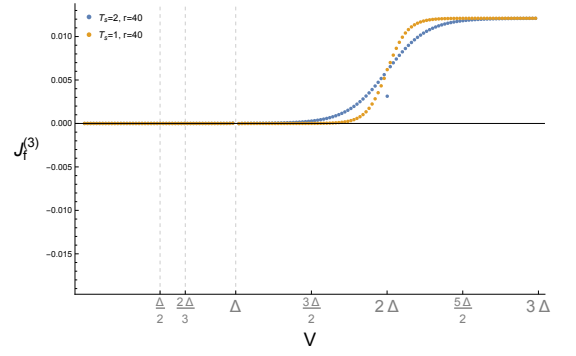
#### 1.6.4 Четвёртый порядок

В третьем порядке выражение для тока (см. Приложение (135)) содержит члены различного происхождения: поправки третьего порядка к функции распределения (Рис. 5(c)), поправки третьего порядка к нормальным функциям Грина (Рис. 5(d)), поправки третьего порядка к оффдиагональным компонентам (Рис. 5(b)), произведения поправок первого порядка к оффдиагональным компонентам и поправок второго порядка к функциям распределения (Рис. 5(a)).

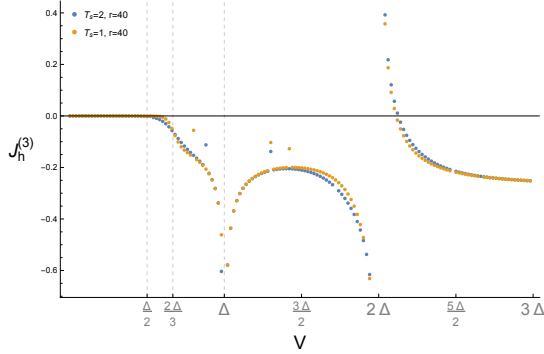
Численный анализ вновь показывает, что все искомые эффекты, соответствующие андреевским отражениям приходят из старших поправок к функциям распределения (Рис. 5(c)), что и следовало ожидать, опираясь на выражения для коэффициентов  $A^{(3)}$ ,  $B^{(3)}$  (122, 123). Из этого можно сделать вывод, что андреевские отражения соответствуют изменениям функции распределения, как в случае, когда  $\tau_{\text{in}}$  существенно, так и в противоположном случае, что видно из дальнейшего текста.



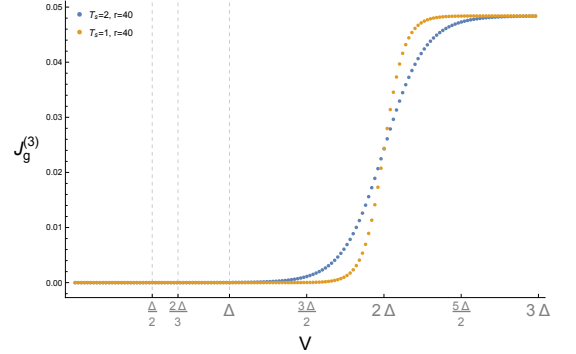
(a) Вклад  $J_{fh}^{(3)}$  в полный ток, возникающий из-за поправок вида  $f_{1,2}^{R(A)} h_{1,2}^{(2)}$



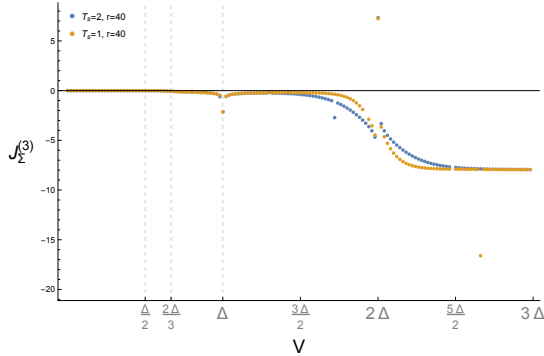
(b) Вклад  $J_f^{(3)}$  в полный ток, возникающий из-за поправок  $\bar{f}_{1,2}^{R(A)}$



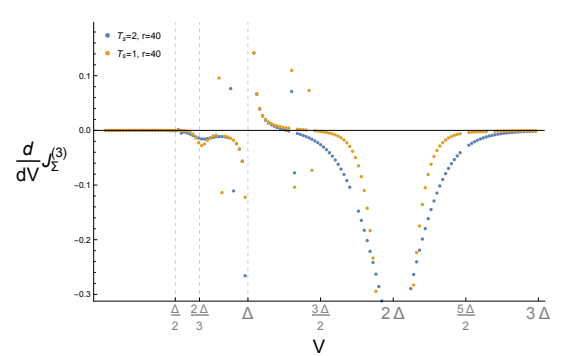
(c) Вклад  $J_h^{(3)}$  в полный ток, возникающий из-за поправок  $h_{1,2}^{(3)}$



(d) Вклад  $J_g^{(3)}$  в полный ток, возникающий из-за поправок  $\tilde{g}_{1,2}^{R(A)}$



(e)  $J_{\Sigma}^{(3)} = 8R_{\Sigma}I^{(4)}$  по формуле (135)



(f)  $\frac{d}{dV} J_{\Sigma}^{(3)}$  по формуле (135)

Рис. 5: Различные вклады в ток в третьем порядке по  $r^{-1}$  при  $\Delta = 30$ ,  $\varepsilon_{Th} = 1/8$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $T_e = T_s$ ,  $r = 40$

Отметим, что в пределе малых напряжений, когда  $f_S^{R(A)} \rightarrow 1$ ,  $g_S^{R(A)} \rightarrow 0$  нестационарный вклад в ток третьего порядка по  $r^{-1}$  (135), и первого порядка (127,125) в точности повторяют один из результатов работы [17].

## 1.7 Обсуждение полученных результатов

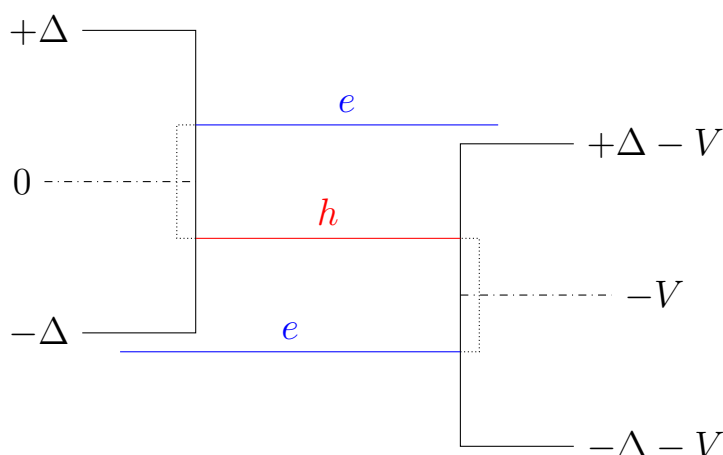


Рис. 6: 2 андреевских отражения в полупроводниковом подходе

Как видно из полупроводниковой интерпретации Джозефсоновского контакта (Рис. 6), искомые андреевские отражения это пороговый эффект и число возможных отражений изменяется на единицу, при переходе напряжения через критические значения  $2\Delta/n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$

Подобные эффекты, становящиеся более существенными при уменьшении температуры, либо при увеличении граничного сопротивления, наблюдаются во вкладах в ток во втором и третьем порядках (Рис. 3(с) и рис. 5(с)).

Появление эффекта во втором относительном порядке, вообще говоря, не случайно, так как в случае со значительным  $\tau_{in}$  основной вклад в этот эффект дают частицы, которые успевают отразиться строго 2 раза, так как большее число обыкновенных отражений увеличивают время нахождения в нормальной области, а значит и вероятность термализации, что, как видно из префактора перед  $J_+^{(2)}$  приводит к сильному подавлению эффекта.

Стоит также отметить, что данный метод уже в третьем порядке становится некорректным для вычисления поправок к проводимости, вызванных неравновесностью, так как при достаточно больших напряжениях в (см. Приложение 135) основной вклад приходит от особенностей на  $\pm\Delta$  в сверхпроводящих функциях Грина, которые обрезаются на  $\varepsilon_{Th}/r^2$ , притом расходимости, начиная с третьего порядка, становятся степенными, а не логарифмическими. Такой вид расходимостей свидетельствует о том, что константа будет вычислена заведомо неправильно.



## 2 SINIS. Случай слабого взаимодействия с подложкой

В этом разделе будет повторен способ учёта влияния андреевских отражений на ток, описанный в [3, 2], а также описаны ключевые различия между этим способом и способом, описанным в предыдущем разделе.

### 2.1 Постановка задачи

Задача вновь полагается одномерной (см. Рис. 1), однако электрон-фононное взаимодействие полагается незначительным, то есть распределение в нормальной области не полагается термализованным. Контакт вновь считается длинным, притом длинным настолько, что вблизи правой границы наличие левой границы не важно. Когерентные эффекты вновь несущественны. Предположение о настолько большой длине позволяет решать стационарную задачу у левой границы и у правой границы по отдельности (после калибровочного преобразования вида (13)), после чего сшивать их вдалеке от сверхпроводников.

В этом подходе для щели удобнее параметризация в виде  $\hat{\Delta} = i\hat{\sigma}_2 \Delta$ . Смысл такой параметризации в том, что аномальная функция Грина вещественная при тех же значениях энергии, что и нормальная функции Грина, и обе они чисто мнимы при других. В дальнейшем это позволяет более интуитивный учёт андреевских отражений.

Для решения задачи вновь нужна параметризация для опережающих и запаздывающих функций Грина, здесь воспользуемся параметризацией через спектральный угол  $\theta$ :

$$\hat{G}^R = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ -\sinh \theta & -\cosh \theta \end{pmatrix}$$

Для нахождения опережающей компоненты достаточно воспользоваться уравнением (11). Оффдиагональная компонента уравнения Узаделя (1) в такой параметризации принимает следующий вид:

$$\varepsilon_{\text{Th}} \partial_x^2 \theta + 2i\varepsilon \sinh \theta = 0 \quad (66)$$

Решение этого уравнение около одной из границ (здесь – для левой границы, находящейся в  $x = 0$ ) имеет инстантонный вид, то есть полагается, что

сверхпроводящие корреляции далеко от границы не важны. У этого решения есть один свободный параметр  $\theta_0$ , который определяется граничными условиями Куприянова-Лукичёва (2), которые в заданной параметризации принимают вид (68):

$$\tanh \frac{\theta(x)}{4} = \exp \left[ -x \sqrt{\frac{-2i\varepsilon}{\varepsilon_{\text{Th}}}} \right] \tanh \frac{\theta_0}{4} \quad (67)$$

$$\frac{1}{r} \sinh(\theta_0 - \theta_S) + 2\sqrt{-i}\xi_\varepsilon^{-1} \sinh \frac{\theta_0}{2} = 0 \quad (68)$$

Здесь  $\xi_\varepsilon = \sqrt{2\varepsilon/\varepsilon_{\text{Th}}}$  имеет смысл обезразмеренной длины корреляции, а  $\theta_S$  – спектральный угол, отвечающий объёмному сверхпроводнику, который определяется следующим равенством:

$$\theta_S = \left\{ -i\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{\Delta + |\varepsilon|}{\Delta - |\varepsilon|} \right\} \Theta(\Delta - |\varepsilon|) + \frac{1}{2} \log \left[ \frac{\Delta + |\varepsilon|}{|\varepsilon| - \Delta} \right] \Theta(|\varepsilon| - \Delta)$$

## 2.2 Келдышевская компонента вблизи левой границы

Уравнения на функцию распределения вновь получаются из матричного уравнения Узаделя. В отсутствие сверхтока и сверхпроводникового параметра порядка эти уравнения принимают следующий вид (подробный вывод см. [1]):

$$\partial_x (\mathcal{D}_{0,3} \partial_x h_{0,3}) = 0 \quad (69)$$

Где  $\mathcal{D}_{0,3}$  – перенормировка коэффициента диффузии, стремящаяся к единице вдалеке от любой из границ:

$$\mathcal{D}_{0,3} = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[ 1 - \hat{G}^R \hat{\sigma}_{0,3} \hat{G}^R \hat{\sigma}_{0,3} \right] \quad (70)$$

Туннельные граничные условия (21) вблизи левого (правого) сверхпроводника принимают следующий вид:

$${}_{(+)}\mathcal{D}_{0,3} \partial_x h_{0,3} = r^{-1} (h_{0,3} - h_{0,3}^{(S)}) [N(\theta_0)N(\theta_S) \mp M_{0,3}(\theta_0)M_{0,3}(\theta_S)] \quad (71)$$

$$N(\theta) = \text{Re} [\cosh \theta]$$

$$M_0(\theta) = \text{Re} [\sinh \theta] \quad (72)$$

$$M_3(\theta) = \text{Im} [\sinh \theta]$$

Для более явной интерпретации результатов удобно перейти к явным функциям распределения, которые определяются по аналогии с равновесным случаем:

$$\hat{h} = \hat{1} - 2 \begin{pmatrix} f_e & 0 \\ 0 & f_h \end{pmatrix}$$

Отметим, что для сверхпроводника  $f_e, f_h$  – фермиевские функции распределения  $f_F$ .

Уравнения (70) вдали от границы, где  $\mathcal{D}_{0,3}$  мало отличаются от единицы, интегрируемы явно. Тогда пользуясь электронно-дырочной интерпретацией, можно восстановить константу, заметив, что производная функции распределения пропорциональна току вероятности с константой, которая определяется из взаимосвязи между вероятностным и электрическим токами и равна сопротивлению нормальной области  $R_N$ . В результате уравнения (70) после однократного интегрирования принимают следующий вид:

$$\mathcal{D}_{0,3} \partial_x (f_e \pm f_h) = -I_{0,3} R_N \quad (73)$$

Токи  $I_0, I_3$  возможно разделить на дырочный и электронный по аналогии с функциями распределения  $f_0, f_3$ :  $I_{0,3} = I_e \pm I_h$ . Тогда, выражая электронный и дырочный токи из (73) приходим к следующему для них выражению:

$$R_N I_{e,h} = -\frac{1}{2} [(\mathcal{D}_0 \pm \mathcal{D}_3) \partial_x f_e + (\mathcal{D}_0 - \mathcal{D}_3) \partial_x f_h] \quad (74)$$

Выражая производные, имеющиеся в выражении (74), при помощи граничных условий (71) и учитывая функцию распределения в сверхпроводнике, приходим к выражению (75,76)

$$I_e = G_0(f_F - f_e) - \frac{G_3 - G_0}{2}(f_e - f_h) = G_T(f_F - f_e) - G_A(f_e - f_h) \quad (75)$$

$$I_h = G_0(f_F - f_h) + \frac{G_3 - G_0}{2}(f_e - f_h) = G_T(f_F - f_h) + G_A(f_e - f_h) \quad (76)$$

Здесь введены следующие обозначения, имеющие смысл проводимости:

$$R_{SN} G_0 = N(\theta_N) N(\theta_S) - M_0(\theta_N) M_0(\theta_S) \quad (77)$$

$$R_{SN} G_3 = N(\theta_N) N(\theta_S) + M_3(\theta_N) M_3(\theta_S) \quad (78)$$

$$G_T = G_0 \quad (79)$$

$$G_A = \frac{G_3 - G_0}{2} \quad (80)$$

Решения выше не учитывают эффекты, связанные с поправками к функциям распределения, вызванные наличием эффектов близости. Для их учёта достаточно ввести переопределение значения функции распределения на границе. Так, после второго интегрирования уравнения (73) решения можно получить в виде интеграла:

$$f_{0,3}(x) = f_{0,3}(0) - I_{0,3}R_N \int_0^x dx [\mathcal{D}_{0,3}^{-1} - 1] - I_{0,3}R_N x \quad (81)$$

Так как интересующие значения  $x$  достаточно велики по сравнению с  $\xi_\varepsilon$ , то пределы интегрирования можно распространить до бесконечности, так как перенормировка коэффициента диффузии экспоненциально быстро выходит на единицу. Таким образом, эти поправки перенормируют значения функций распределения в нуле  $\bar{f}_{0,3}(0, \varepsilon) = f_{0,3}(0, \varepsilon) - m_{0,3}$ . В таком случае, чтобы выражения (75,76) оставались верны в том же виде, то необходимо аналогично перенормировать и «сопротивления»:

$$\bar{R}_{0,3} = G_{0,3}^{-1} + m_{0,3} \quad (82)$$

$$m_{0,3} = R_N \int_0^\infty dx [\mathcal{D}_{0,3}^{-1} - 1] \quad (83)$$

Такие перенормировки изменяют и  $R_{A,T} = G_{A,T}^{-1}$  соответственно:

$$\bar{R}_A = 2 \left[ \frac{1}{G_3^{-1} + m_3} - \frac{1}{G_0^{-1} + m_0} \right]^{-1} \quad (84)$$

$$\bar{R}_T = G_0^{-1} + m_0 \quad (85)$$

Здесь стоит отметить, что в силу выбора параметризации сверхпроводящей щели, проводимость  $G_T$ , определяемая уравнением (79) равна нулю при  $|\varepsilon| < \Delta$

### 2.3 Решение у правой границы и сшивка

Для решения стационарной задачи у другой границы, как уже описывалось выше, необходимо совершить калибровочное преобразование, аналогичное (13), чтобы вся зависимость от напряжения перешла на противоположную сторону. При таком преобразовании «электронная» и «дырочная» строки

у матричной функции распределения преобразуются по-разному (см. 13). Обозначая функции после калибровочного преобразования тильдой, получим, что  $f_{e,h}(\varepsilon) = \tilde{f}_{e,h}(\varepsilon \pm V)$ .

Все дальнейшие вычисления после калибровочного преобразования аналогичны с точностью до замены  $x \rightarrow 1 - x$  и знака перед током в уравнениях (73), что отвечает сохранению его направления. В таком случае, функции распределения имеют следующий вид:

$$\tilde{f}_e(\varepsilon) = \tilde{f}_e(\varepsilon) - R_N \tilde{I}_{e,h}(\varepsilon) (x - 1) \quad (86)$$

Далее решения необходимо сшить в глубине нормальной области ( $x = 1/2$ ). Так как уравнение Узаделя сохраняет ток, а физические наблюдаемые не изменяются при калибровочных преобразованиях, тогда  $I_{e,h}(\varepsilon) = \tilde{I}_{e,h}(\varepsilon \pm V)$ . С учётом вышесказанного, уравнение шивки имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{e,h}(-1/2, \varepsilon) &= \tilde{f}_{e,h}(1/2, \varepsilon \pm V) - R_N \tilde{I}_{e,h}(\varepsilon \pm V) \\ I_{e,h}(\varepsilon) &= \tilde{I}_{e,h}(\varepsilon \pm V) \end{aligned} \quad (87)$$

Разрешая это условие, приходим к следующей связи между перенормированными граничными значениями функций распределения:

$$\bar{f}_{e,h}(1/2, \varepsilon) - \bar{f}_{e,h}(1/2, \varepsilon \pm V) = R_N I_{e,h}(\varepsilon) \quad (88)$$

## 2.4 Вычисление тока

Для вычисления тока вновь используется стандартная формула:

$$I(t) = \frac{\pi}{4R_N} \text{Tr} \left[ \hat{\sigma}_3 \hat{j}^K(t, t) \right]$$

В пренебрежении членами, которые соответствуют наличию сверхтока и когерентных эффектов, интеграл для тока принимает следующий вид:

$$I_\Sigma = \frac{1}{2eR_N} \int d\varepsilon \mathcal{D}_3 \partial_x f_3$$

Или, выражая всё в терминах электронного и дырочного токов при помощи (74), приходим к ожидаемому выражению:

$$I_\Sigma = \frac{1}{2} \int d\varepsilon [I_e - I_h] \quad (89)$$

Это выражение можно несколько упростить, записав его в терминах спектральной функции тока  $J(\varepsilon)$ , определяемой как:

$$I_n(\varepsilon) = \Delta(n, 2k + 1)I_e(\varepsilon + (n - 1)V) - \Delta(n, 2k)I_h(\varepsilon + nV) \quad (90)$$

$$J(\varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\varepsilon) \quad (91)$$

В таком случае, полный ток  $I_\Sigma$  принимает следующий вид:

$$I_\Sigma = \frac{1}{2} \int_0^V d\varepsilon J(\varepsilon) \quad (92)$$

Чтобы вычислять значения  $I_n(\varepsilon)$  удобно ввести интерпретацию с помощью электрических цепей.

### 2.4.1 Эквивалентные цепи

Можно заметить, что уравнения (75, 76, 88) представляют собой аналог правил Кирхгофа, где в качестве сопротивлений выступают  $R_T, R_A, R_N$ , в качестве «потенциалов» выступают  $f_e, f_h$ , в качестве внешних потенциалов выступают  $f_F$ , а по самой цепи на каждом участке, соответствующем энергии  $\varepsilon + nV$  течёт ток  $I_n$ .

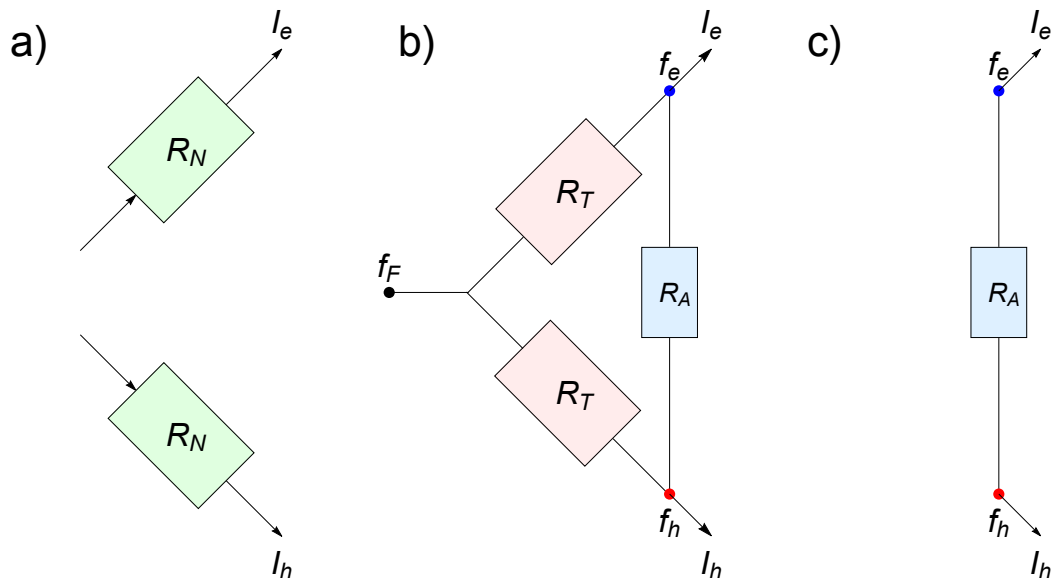


Рис. 7: Элементы эквивалентных соединений, соответствующих а) уравнениям сшивки (88); граничным условиям при (75,76) при б)  $|\varepsilon| > \Delta$ , в)  $|\varepsilon| < \Delta$

В описанном формализме становится понятным, как возможно определять функции распределения на подщелевых энергиях, так как при  $R_T = 0$  соединение является последовательным, а значит ток сохраняется от последнего узла ниже щели вплоть до первого над щелью. Тогда определяя  $M = -\lceil \frac{\varepsilon + \Delta}{V} \rceil$ ,  $N = \lceil \frac{\Delta - \varepsilon}{V} \rceil$  ( $\lceil \cdot \rceil / (\lfloor \cdot \rfloor)$  – округление вниз/(вверх)), что имеет смысл номера  $R_T$  с самой высокой отрицательной энергией с самой низкой положительной энергией соответственно. Тогда получаем для функций распределения (напряжений) под щелью:

$$\bar{f}_e(\varepsilon) = f^d(\varepsilon + NV) + I_0 \left( NR_N + \sum_{n=1}^{N-1} \bar{R}_A(\varepsilon + nV) \right) \quad (93)$$

$$\bar{f}_h(\varepsilon) = f^u(\varepsilon + MV) - I_0 \left( |M|R_N + \sum_{n=M+1}^{-1} \bar{R}_A(\varepsilon + nV) \right) \quad (94)$$

Где введены следующие обозначения, соответствующие точке, от которой начинается подсчёт «потенциалов»:

$$f^{d(u)}(\varepsilon + NV) = \begin{cases} \bar{f}_{h,(e)}(\varepsilon + NV, -1/2) & |N| = 2k \\ \bar{f}_{e,(h)}(\varepsilon + NV, 1/2) & |N| = 2k + 1 \end{cases}$$

С развитым формализмом становится возможно перейти непосредственно к анализу SINIS-контакта.

## 2.5 Применение к SINIS-контакту

В пределе сильно непрозрачных границ андреевскими отражениями, которым соответствует  $\bar{G}_A \neq 0$  становится возможно пренебречь на тех энергиях, когда они являются не единственным способом передачи тока. Таким образом, на энергиях  $|\varepsilon| > \Delta$  можно считать, что в эквивалентных цепях отсутствуют резисторы  $\bar{R}_A$  и цепь можно представить в несвязанном виде, представленном на Рис. 9.

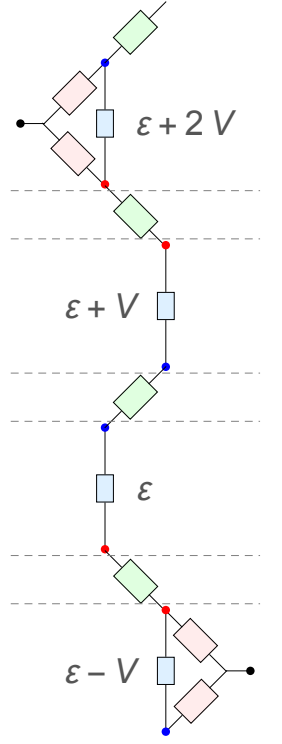


Рис. 8: Бесконечная «лестница», получающаяся из совмещения уравнений (75, 76, 88)

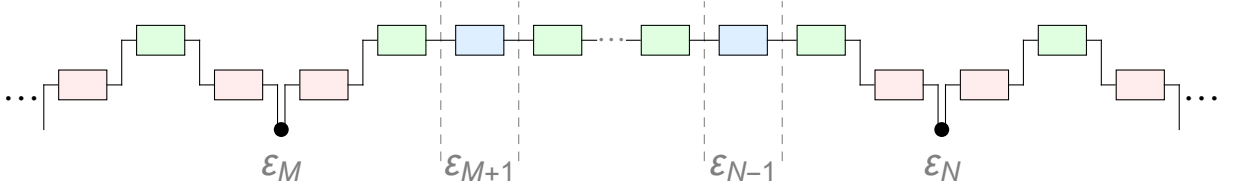


Рис. 9: Эффективная цепь для SINIS-контакта, цвета аналогичны таковым на Рис. 7. Цепь бесконечна в обе стороны. Здесь и далее  $\varepsilon_n = \varepsilon + nV$

Пусть ток текущий на подщелевых энергиях  $I_0$ , тогда его можно найти как ток при последовательном подключении резисторов:

$$I_0 = \frac{f_F(\varepsilon_M) - f_F(\varepsilon_N)}{\bar{R}_T(\varepsilon_M) + \bar{R}_T(\varepsilon_N) + (N + |M|)R_N + \sum_{n=M+1}^{N-1} \bar{R}_A(\varepsilon_n)} \quad (95)$$

Такой же ток, соответственно, будет для всех  $n$ , таких что  $M < n < N$ . Для остальных же ток даётся следующим выражением:

$$I_n = (f_F(\varepsilon_{n-1}) - f_F(\varepsilon_n)) \{R_T(\varepsilon_{n+1}) + R_T(\varepsilon_n) + R_N\}^{-1} \quad (96)$$

Ток, даваемый равенством (96) является по сути своей тепловыми возбуждениями, так как при переходе к нулевой температуре  $f_F(\varepsilon) \rightarrow \theta(-\varepsilon)$ , то интегранд на промежутке интегрирования равен нулю.

Тогда при температурах много меньших сверхпроводящей щели ток принимает следующий вид:

$$I_\Sigma = \int_0^V d\varepsilon \frac{|M| + N}{\bar{R}_T(\varepsilon_M) + \bar{R}_T(\varepsilon_N) + (N + |M|)R_N + \sum_{n=M+1}^{N-1} \bar{R}_A(\varepsilon_n)} \quad (97)$$

### 2.5.1 Асимптотические выражения для сопротивлений

Вводя новый параметр  $\alpha = q_\Delta^{-1}/(2r)$ , где  $q_\varepsilon = \sqrt{2\varepsilon/\varepsilon_{Th}}$ , методом простой итерации можно из уравнения (68) получить следующее асимптотическое выражение для  $\theta_0$

$$\theta_0 = \alpha \sqrt{\frac{i\Delta}{\varepsilon}} \sinh \theta_S - \alpha^2 \frac{i\Delta}{\varepsilon} \sinh \theta_S \cosh \theta_S \quad (98)$$

Вычисляя с помощью этого выражения (98) проводимости и поправки к сопротивлению получаем следующие асимптотики:

$$R_{SN}G_0 = \left[ \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} - \alpha \frac{\Delta^2}{\varepsilon^2 - \Delta^2} \sqrt{\frac{\Delta}{2|\varepsilon|}} \right] \Theta(|\varepsilon| - \Delta) \quad (99)$$



$$R_{SN}G_3 = \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \Theta(|\varepsilon| - \Delta) + \alpha \frac{\Delta^2}{\Delta^2 - \varepsilon^2} \left[ \sqrt{\frac{\Delta}{2|\varepsilon|}} - \alpha \frac{\Delta \text{sign}(\varepsilon)}{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}} \right] \Theta(\Delta - |\varepsilon|) \quad (100)$$

$$m_0 = \frac{\alpha^2 \Delta^2 q_\Delta^{-1}}{2 |\Delta^2 - \varepsilon^2|} \left( \frac{\Delta}{2|\varepsilon|} \right)^{\frac{3}{2}} [2 + \Theta(|\varepsilon| - \Delta) - \Theta(\Delta - |\varepsilon|)] R_N \quad (101)$$

$$m_3 = \frac{\alpha^2 \Delta^2 q_\Delta^{-1}}{2 |\Delta^2 - \varepsilon^2|} \left( \frac{\Delta}{2|\varepsilon|} \right)^{\frac{3}{2}} [-2\text{sign}(\varepsilon) - \Theta(\Delta - |\varepsilon|) + \Theta(|\varepsilon| - \Delta)] R_N \quad (102)$$

Однако выражение (98) получено в предположении малости  $\theta_0$ , что верно не при всех значениях энергий. Отдельно стоит рассмотреть случаи малой энергии и энергий, близких к  $\Delta$ .

На энергиях  $\varepsilon$  таких, что  $1 \gg \alpha^2 \gg |\varepsilon|/\Delta$  правая часть становится большой, тогда в качестве разложения  $\theta_S$  достаточно ограничиться первым членом. В этом случае приходим к квадратному уравнению, корень которого выбирается из соображений сшивки асимптотик при энергиях  $|\varepsilon| \sim \alpha^2 \Delta$ . Тогда итоговое выражение принимает вид:

$$\sinh \frac{\theta_0}{2} = \frac{i \left( \sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon + 2i\alpha^2 \Delta} \right)}{2\alpha\sqrt{i\Delta}} \quad (103)$$

$G_0$  в силу мнимости функций Грина сверхпроводника обнуляется автоматически, а для проводимости  $G_3$  и поправки  $m_3$  в ведущем порядке по малым энергиям:

$$R_{SN}G_3 = 1 \quad (104)$$

$$m_3 = R_N q_{|\varepsilon|}^{-1} \left( 1 - \sqrt{2} \right)$$

На энергиях таких, что  $|\Delta - |\varepsilon|| \ll \alpha^2 \Delta \ll \Delta$  оставляя лишь большие экспоненты приходим к кубическому уравнению вида:

$$e^{3\theta_0/2} - e^{\theta_0/2} = \sqrt{\frac{\delta i}{\gamma}} \quad (105)$$

$$\gamma = \frac{2|\Delta - |\varepsilon||}{\alpha^2 \Delta} \ll 1 \quad (106)$$

$$\delta = \text{sgn}(|\varepsilon| - \Delta) \quad (107)$$

Корень этого уравнения необходимо выбирать из соображений положительности проводимости и конечности поправки к сопротивлению  $m_0$ . Тогда соответствующая асимптотика:

$$e^{\theta_0/2} = \gamma^{-1/6} e^{\pi i/12} \Theta(|\varepsilon| - \Delta) + \gamma^{-1/6} e^{-\pi i/12} \Theta(\Delta - |\varepsilon|)$$

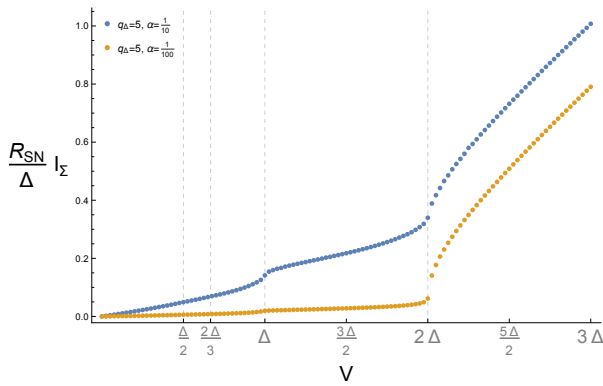
$$R_{SN} G_0 = \frac{\sqrt{3}}{2\alpha\gamma^{1/6}} \Theta(|\varepsilon| - \Delta) \quad (108)$$

$$R_{SN} G_3 = \frac{1}{4\alpha\gamma^{5/6}} \left( \sqrt{3} \Theta(|\varepsilon| - \Delta) + \Theta(\Delta - |\varepsilon|) \right)$$

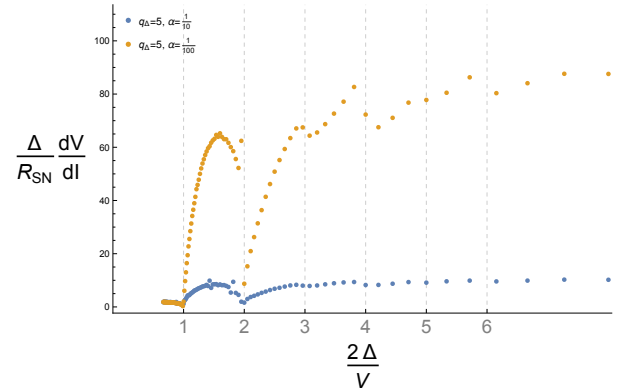
$$m_3 = -\sqrt{2} R_N q_{|\varepsilon|}^{-1} \quad (109)$$

$$m_0 = q_{|\varepsilon|}^{-1} R_N \gamma^{-1/6} \quad (110)$$

Вычисленных выше асимптотик хватает для того, чтобы численно оценить интеграл (97), что приводит к следующим зависимостям тока (Рис. 10(a)) и дифференциального сопротивления (Рис. 10(b)).



(a) Ток, посчитанный при помощи асимптотик из этого раздела



(b) Дифференциальное сопротивление, посчитанное при помощи асимптотик из этого раздела

Рис. 10: Результаты численного интегрирования при помощи вычисленных асимптотик

## 2.6 Обсуждение полученных результатов

### 2.6.1 Границы применимости теории

Вышеописанная теория существенно полагается на отсутствие неэластичных процессов в нормальной области, так как при сильно непрозрачных границах частица находится в ней достаточно долго, что увеличивает вероятность

термализации, а значит и изменения тока. Для того, чтобы оценить влияния этих процессов необходимо сравнивать неэластичное время и время, которое частица находится в нормальной области. Для описания этого времени необходимо определить эффективное минимальное расстояние, которое проходит частица. До того, как выйти из нормальной области при напряжениях, меньших  $2\Delta$  частица совершает  $\lfloor 2\Delta/V - 1 \rfloor$  андреевских отражений, из-за чего с необходимостью проходит расстояние  $(2\Delta/V)L$ . Таким образом, эффективное время, которое частица проводит там сводится к перенормированному диффузионному времени  $\tau_{\text{dif}} = (2\Delta/V)^2/\varepsilon_{\text{Th}}$ . Это время необходимо сравнивать с неэластичным  $\tau_{\text{in}}$ . Таким образом, эта теория применима при  $\tau_{\text{dif}} \ll \tau_{\text{in}}$ .

### 2.6.2 Сравнение методов

Как видно из Рис. 10(a) и 3(c), в обоих рассмотренных случаях ток имеет ступенчатую структуру. Сама структура, однако, отличается наличием изменения производной тока на напряжениях, немного меньших критических  $V \sim \frac{2\Delta}{n}$  в случае с отсутствием неэластичных процессов. Такое различие вызвано тем, что подобный рост для случая с наличием термализации проявляется лишь в старших порядках по  $r^{-1}$ , что видно, например, на Рис. 11(d) для особенности на  $V \sim \Delta$ . Это поведение связано с тем, что ток под критическими напряжениями возникает из поправок к функциям распределения, которые для более низких напряжений появляются в следующих порядках по  $r^{-1}$ , что соответствует отсутствию возможности покинуть нормальную область при более низких напряжениях, не отразившись андреевски ещё один раз, что в свою очередь увеличивает вероятность термализации. В случае же с  $\tau_{\text{in}}^{-1} = 0$  частица может находиться в нормальной области достаточно длительное время, после чего всё равно отразится андреевски, из-за чего не возникает алгебраической малости эффекта.

### 3 Системы со слабым обменным полем

В этой части будут рассмотрены системы с наличием слабого обменного поля при помощи методов, развитых в предыдущих разделах данной работы.

В качестве таких систем вместо несверхпроводящего звена может быть использован сильно разбавленный ферромагнетик или же N/F бислоем с малой толщиной ферромагнитного слоя, необходимой для пренебрежения распаривающим членом, описанном в [9]. Обменное поле  $\mathbf{h}_{\text{ex}}$  полагается постоянным, то есть ферромагнитная область полагается однодоменной, что обеспечивает сохранение проекции спина на направление поля  $\mathbf{h}_{\text{ex}}$ . Задача будет решаться для  $\mathfrak{h} = h_{\text{ex}}\sigma$  (здесь  $\sigma = \pm 1$  отвечает различным значениям спина) произвольного знака, что соответствует зеемановскому вкладу в энергии для обоих сортов частиц.

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m} - \mu + \mathfrak{h} & \Delta \\ \Delta^* & -\frac{p^2}{2m} + \mu + \mathfrak{h} \end{pmatrix} \quad (111)$$

Так как изначальный гамильтониан задачи имеет вид (111), то можно заметить, что добавление слабого обменного поля не изменяет структуры уравнений, а лишь изменяет значение энергии  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + \mathfrak{h}$ . Аналогичное преобразование происходит и в уравнении Узаделя (1), приводя его к следующему виду (112):

$$-\varepsilon_{\text{Th}} \partial_x [\check{G} \circ \partial_x \check{G}] - i(\varepsilon + \mathfrak{h}) [\check{\sigma}_3, \check{G}] + \frac{1}{2} \partial_T [\check{\sigma}_3, \check{G}]_+ + i\varphi_- \check{G} = \check{I}^{\text{St}} \quad (112)$$

#### 3.1 Сильное взаимодействие с подложкой

Наличие слабого обменного поля модифицирует уравнение Узаделя (1), но подобная замена не касается граничных условий, так как проникновение обменного поля в сверхпроводник это эффект старшего порядка. Таким образом, единственное отличие между системами с и без обменного поля в данном подходе соответствует замене  $\varkappa_\varepsilon \rightarrow \varkappa_{\varepsilon+\mathfrak{h}}$  во всех выражениях для аномальных и обыкновенных функций Грина.

Уравнение на матричную функцию распределения (20) не содержит в себе явной зависимости от  $\varepsilon$ , а значит оно не будет содержать и явной зависимости от  $\mathfrak{h}$ . Однако, в силу того, что магнитное поле разделяет частицы по энергии, то

начальное приближение для функции распределения теперь будет содержать в себе  $\mathfrak{h}$  и будет иметь вид:

$$\hat{h}^{(0)} = \hat{1} \cdot \tanh\left(\frac{\varepsilon + \mathfrak{h}}{2T_e}\right)$$

Такое изменение соответствует наличию эффективного потенциала в несверхпроводящей области.

### 3.1.1 Зависимость тока от напряжения и обменного поля

Производя все вышеуказанные замены становится возможным вычислить вклады в ток при помощи выражений (60,62,134,133,64,135).

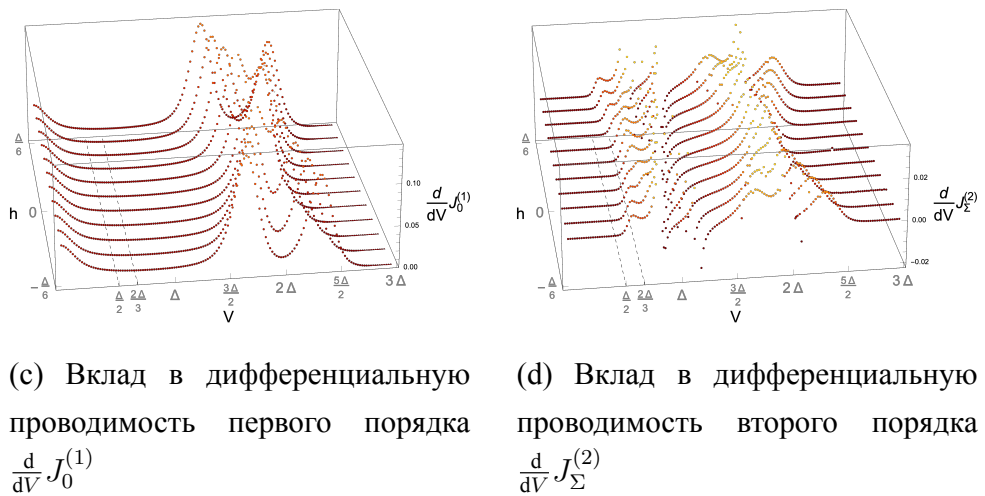
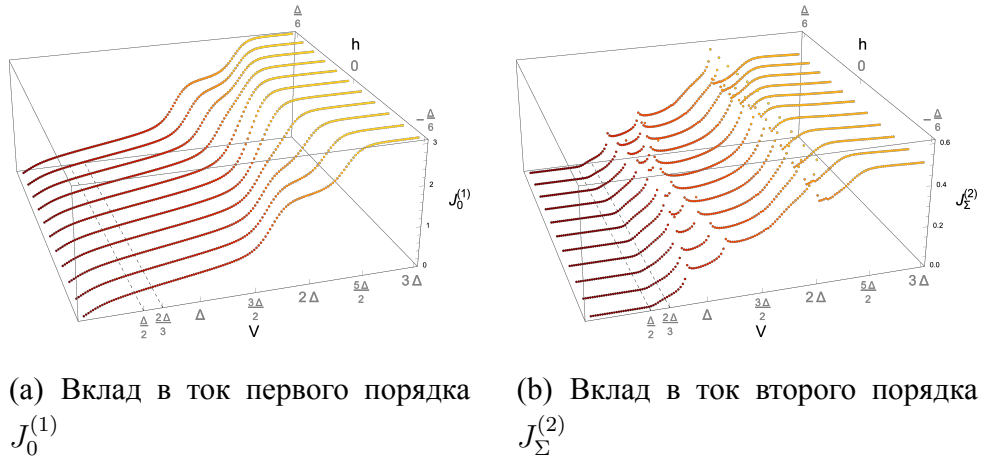


Рис. 11: Результаты численного интегрирования при значении параметров  $\Delta = 30$ ,  $\varepsilon_{Th} = 1/8$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $T_e = T_s = 1$ ,  $r = 40$

Как можно заметить из численного анализа (Рис. 11(с),11(д)). Получающиеся результаты симметричны относительно изменения знака у  $\mathfrak{h}$ . Эффекты от поля приводят к тому, что пороговые значения напряжения ( $V \sim 2\Delta/n$ ) расщепляются на величины  $\delta \sim \mathfrak{h}$ .

В частности, асимптотическое выражение при низких температурах для  $J_+^{(2)}$  в присутствии поля модифицируется следующим образом:

$$J_+^{(2)} \left( \sim \frac{2}{3}\Delta \right) = \frac{9\sqrt{3}\Delta}{2} \left[ \sqrt{V - \frac{2}{3}(\Delta + \mathfrak{h})} \{u(\Delta/3 + \mathfrak{h}) + u(-\Delta/3 - \mathfrak{h})\} + \sqrt{V - \frac{2}{3}(\Delta - \mathfrak{h})} \{u(\Delta/3 - \mathfrak{h}) + u(-\Delta/3 + \mathfrak{h})\} \right] \quad (113)$$

Из уравнения (113) видно, что при дифференцировании по напряжению расходимость в дифференциальной проводимости уменьшается расщепляется. Сам вид тока изображён на Рис. 12(а). Подобное разделение особенности на две соответствует тому, что в пространстве Намбу в качестве базиса используются частицы и дырки с противоположным спином, на которые магнитное поле действует по-разному.

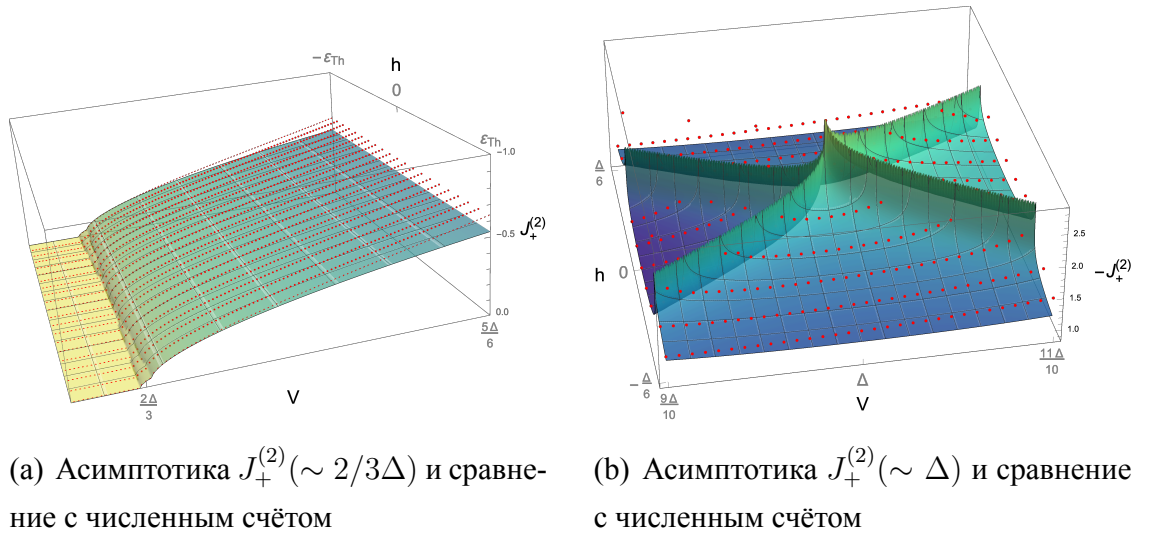


Рис. 12: Низкотемпературные асимптотики (сплошной цвет) и численный счёт (красный пунктир) для  $J_+^{(2)}$  при значении параметров  $\Delta = 30$ ,  $\varepsilon_{Th} = 1/8$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $r = 40$

Однако, особенность на напряжении  $V \sim \Delta$  имеет иной (см. Рис. 12), логарифмический вид, а именно:

$$J_+^{(2)}(\sim \Delta) = \frac{4\Delta}{r} \left( \operatorname{Re} \left[ \sqrt{\frac{i\varepsilon_{\text{Th}}}{\Delta}} \log \left( \frac{\varepsilon_{\text{Th}} \mathcal{K}_{\Delta+\mathfrak{h}-V}^2}{4i\Delta} \right) \right] + \operatorname{Re} \left[ \sqrt{\frac{i\varepsilon_{\text{Th}}}{\Delta}} \log \left( \frac{\varepsilon_{\text{Th}} \mathcal{K}_{\Delta-\mathfrak{h}-V}^2}{4i\Delta} \right) \right] \right) \quad (114)$$

Как видно из выражения (114), здесь особенность вновь расщепляется на две линейно, однако с отличающимся от особенности на напряжении  $V \sim \frac{2}{3}\Delta$  коэффициентом, хотя симметрия относительно замены знака  $\mathfrak{h}$  не изменяется.

### 3.2 Слабое взаимодействие с подложкой

В данном предельном случае изменение уравнения Узаделя касается только замены  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + \mathfrak{h}$  в длине когерентности  $\xi_\varepsilon$ . Сама же логика решения остаётся неизменной, так как основывается на виде функций Грина сверхпроводящих берегов, где нет обменного поля. То есть, изменения касаются лишь непосредственных выражений для  $\bar{R}_A, \bar{R}_T$ . Поле здесь полагается достаточно малым, так что  $\mathfrak{h} \ll \Delta$ .

Граничные условия с наличием слабого обменного поля принимает следующий вид:

$$2 \sinh \frac{\theta_0}{2} = \alpha \sqrt{\frac{i\Delta}{\varepsilon + \mathfrak{h}}} \sinh(\theta_S - \theta_0) \quad (115)$$

При помощи уравнения (115) можно получить следующие асимптотики для  $G_{0,3}$  и  $m_{0,3}$ :

$$R_{SN}G_0 = \left( \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} - \alpha \frac{\Delta^2}{\varepsilon^2 - \Delta^2} \sqrt{\frac{\Delta}{2|\varepsilon + \mathfrak{h}|}} \right) \Theta(|\varepsilon| - \Delta) \quad (116)$$

$$R_{SN}G_3 = \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \Theta(|\varepsilon| - \Delta) + \alpha \frac{\Delta^2}{\Delta^2 - \varepsilon^2} \left( \sqrt{\frac{\Delta}{2|\varepsilon + \mathfrak{h}|}} - \alpha \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon + \mathfrak{h}} \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}} \right) \Theta(\Delta - |\varepsilon|) \quad (117)$$

$$m_0 = \frac{\alpha^2 \Delta^2 q_\Delta^{-1}}{2 |\Delta^2 - \varepsilon^2|} \left( \frac{\Delta}{2|\varepsilon + \hbar|} \right)^{\frac{3}{2}} [2 + \Theta(|\varepsilon| - \Delta) - \Theta(\Delta - |\varepsilon|)] R_N \quad (118)$$

$$m_3 = -\frac{\alpha^2 \Delta^2 q_\Delta^{-1}}{2 |\Delta^2 - \varepsilon^2|} \left( \frac{\Delta}{2|\varepsilon + \hbar|} \right)^{\frac{3}{2}} [2 \text{sign}(\varepsilon + \hbar) + \Theta(\Delta - |\varepsilon|) - \Theta(|\varepsilon| - \Delta)] R_N \quad (119)$$

Асимптотики для малых энергий в предположении малых полей получают-ся из (104) путём замены  $q_{|\varepsilon|} \rightarrow q_{|\varepsilon+\hbar|}$ . При энергиях, близких к щели, мож-но пользоваться выражениями (108,109,110), производя аналогичную замену  $q_{|\varepsilon|} \rightarrow q_{|\varepsilon+\hbar|}$  с изменённым выражением для  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{2 |\Delta - |\varepsilon||}{\alpha^2 \Delta} \left( 1 + \frac{\hbar}{\Delta} \right)$$

Эти асимптотики приводят к зависимости тока от обменного поля, изобра-женной на Рис. 13:

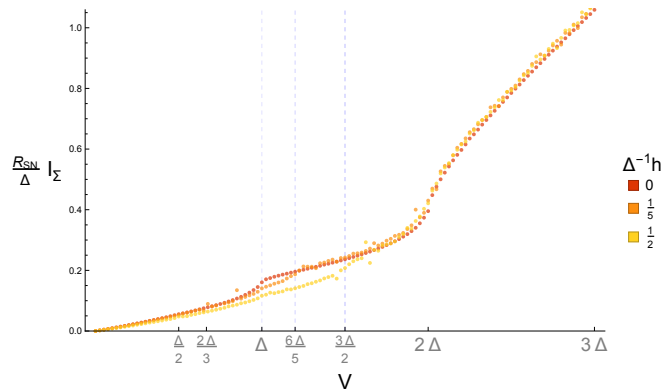


Рис. 13: Результаты численного интегрирования для контакта со слабым обмен-ным полем при  $\alpha = 0.1$ ,  $q_\Delta = 5$ .

Результаты вновь симметричны относительно знака поля, так как электроны и дырки учитываются одновременно, а единственное отличие, появляющееся из-за наличия обмена – подавление тока после андреевского отражения вплоть до значений напряжения  $V \sim 2\Delta/n + \hbar$ .

### 3.3 Обсуждение полученных результатов

#### 3.3.1 Сравнение предельных случаев

В двух рассмотренных предельных случаях при наличии поля токи ведут себя по-разному, то есть в случае сильной термализации (см. Рис. 11, 12) од-



на особенность расщепляется на две, а в случае с отсутствием термализации пики остаются на месте, хоть и подавляются. Такое различие объясняется общим видом функции распределения электронов в несверхпроводящей области. В первом случае добавление слабого поля изменяет нулевое приближение, что приводит к тому, что уже разделённые частицы по спину частицы испытывают андреевские отражения, из-за чего влияние обменного поля является более важным эффектом. Во втором случае функция распределения частиц определяется преимущественно андреевскими отражениями, из-за чего влияние поля оказывает лишь подавляющий эффект, объясняющийся эффективным уменьшением длины когерентности в области с наличием слабого обмена.

### 3.3.2 Приложение к эксперименту

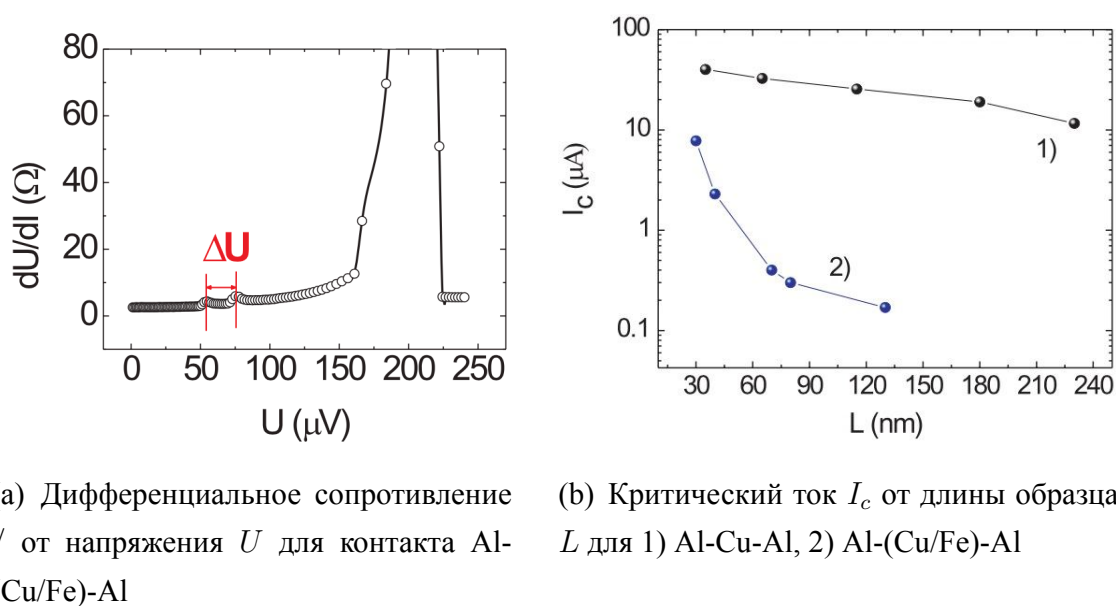


Рис. 14: Некоторые результаты экспериментального исследования S(N/F)S-контакта. Изображения взяты из [7]

Наблюдаемое на Рис. 14(a) расщепление особенностей может говорить о том, что реализуется скорее случай с термализацией. Однако, сами результаты свидетельствуют о том, что особенности, наблюдаемые в дифференциальном сопротивлении в работе [7] не могут объясняться андреевскими отражениями в силу того, что наблюдаемые на эксперименте особенности соответствуют напряжениям  $V \sim 60 \mu\text{V}$ , что для алюминия ( $\Delta \sim 180 \mu\text{eV}$ ) соответствует 6 андреевским отражениям. Но, как видно из полученных результатов, в обоих

рассмотренных предельных случаях более существенными оказываются особенности, отвечающие меньшему числу андреевских отражений, которых в экспериментальной зависимости не наблюдается.

Однако, критический ток в  $S(N/F)S$ -контакте подавлен по сравнению с  $SNS$ -структурой аналогичной геометрии (см Рис. 14(b)), что свидетельствует о том, что минищель также подавлена. Таким образом, однозначного объяснения расщепления особенности в дифференциальном сопротивлении всё ещё нет.

## Заключение

В работе исследовано влияние андреевских отражений на зависимость тока от напряжения в длинных SINIS- и SI(N/F)IS-контактах при постоянном напряжении в случаях сильной термализации и когда термализации нет.

Для случая сильного взаимодействия с подложкой методами теории возмущений по малому параметру обезразмеренной проводимости границ со сверхпроводником  $r^{-1}$  вплоть до третьего порядка получены функции Грина и функции распределения, вплоть до четвёртого порядка получены выражения для тока. Для напряжений, отвечающих первым двум андреевским отражениям получены низкотемпературные асимптотики ВАХ: логарифмическая ( $V \sim \Delta$ ) и корневая на  $V \sim \frac{2}{3}\Delta$ . Также исследованы результаты численного моделирования вольт-амперной характеристики для ненулевых температур, в них в частности наблюдается уширение указанных особенностей. При учёте обменного поля  $\hbar$  эти особенности расщепляются на расстояния  $\delta \sim 2\hbar$ ,  $\frac{4}{3}\hbar$  для напряжений, отвечающих одному и двум отражениям соответственно.

В случае слабого взаимодействия, методами эффективных цепей [3] получена ВАХ контакта с обменным полем. В этом пределе особенности, отвечающие андреевским отражениям видны при тех же значениях напряжения, хоть подавлены. Так  $n + 1$ -ое андреевское отражение подавлено, пока напряжения не станут больше  $V \gtrsim \frac{2}{n}\Delta + \hbar$ .

В контексте эксперимента [7], можно сделать вывод, что скорее всего реализуется случай с термализацией. Однако полученные результаты не позволяют окончательно выяснить причину возникновения особенности в дифференциальном сопротивлении, так как пики соответствуют  $b$  андреевским отражениям, а особенностей, отвечающих меньшему числу отражений, в экспериментальной зависимости не наблюдается.

## Список литературы

- [1] Wolfgang Belzig, Frank K Wilhelm, Christoph Bruder, Gerd Schön, and Andrei D Zaikin. Quasiclassical Green's function approach to mesoscopic superconductivity. *Superlattices and Microstructures*, 25(5-6):1251–1288, may 1999.
- [2] E. V. Bezuglyi, E. N. Bratus', V. S. Shumeiko, and G. Wendin. Current noise in diffusive SNS junctions in the incoherent MAR regime (a review). 2014.
- [3] E. V. Bezuglyi, E. N. Bratus', V. S. Shumeiko, G. Wendin, and H. Takayanagi. Circuit theory of multiple Andreev reflections in diffusive SNS junctions: The incoherent case. *Physical Review B*, 62(21), 2000.
- [4] A. I. Buzdin. Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures. *Rev. Mod. Phys.*, 77:935–976, Sep 2005.
- [5] J. C. Cuevas, J. Hammer, J. Kopu, J. K. Viljas, and M. Eschrig. Proximity effect and multiple Andreev reflections in diffusive Superconductor–Normal-metal–Superconductor junctions. *Phys. Rev. B*, 73:184505, May 2006.
- [6] T E Golikova, M J Wolf, D Beckmann, G A Penzyakov, I E Batov, I V Bobkova, A M Bobkov, and V V Ryazanov. Controllable supercurrent in mesoscopic superconductor-normal metal-ferromagnet crosslike Josephson structures. *Superconductor Science and Technology*, 34(9):095001, jul 2021.
- [7] Tatiana Golikova, Florian Huebler, Detlef Beckmann, Igor Batov, T. Karminskaya, M. Kupriyanov, Alexander Golubov, and Valeriy Ryazanov. 2012.
- [8] A. K. Gupta, L. Crépinon, N. Moussy, B. Pannetier, and H. Courtois. Anomalous density of states in a metallic film in proximity with a superconductor. *Phys. Rev. B*, 69:104514, 2004.
- [9] P. A. Ioselevich and D. A. Chuklanov. Minigap suppression in S(N/F)S junctions. *JETP Letters*, 113(10):631–637, 2021.

- [10] T. Karminskaya and M. Kupriyanov. Effective decrease in the exchange energy in S-(FN)-S Josephson structures. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters (JETP Letters)*, 85:286–291, May 2007.
- [11] Mikhail Yu. Kupriyanov, Konstantin K. Likharev, and Vladimir F. Lukichev. Influence of effective electron interaction on the critical current of Josephson weak links. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1981.
- [12] M. Yu. Kurpianov and V. F. Lukichev. Influence of boundary transparency on the critical current of dirty SS'S structures. 67(6):1163–1168, 1988.
- [13] Heinz-Olaf Müller and K. A. Chao. Electron refrigeration in the tunneling approach. *Journal of Applied Physics*, 82(1):453–456, 1997.
- [14] M. Octavio, M. Tinkham, G. E. Blonder, and T. M. Klapwijk. Subharmonic energy-gap structure in superconducting constrictions. *Phys. Rev. B*, 27:6739–6746, Jun 1983.
- [15] Sukumar Rajauria, P. S. Luo, T. Fournier, F. W. J. Hekking, H. Courtois, and B. Pannetier. Electron and Phonon Cooling in a Superconductor–Normal-Metal–Superconductor Tunnel Junction. *Physical Review Letters*, 99(4), Jul 2007.
- [16] J. Rammer and H. Smith. Quantum field-theoretical methods in transport theory of metals. *Rev. Mod. Phys.*, 58:323–359, Apr 1986.
- [17] K. S. Tikhonov and M. V. Feigel'man. AC Josephson effect in the long voltage-biased SINIS junction. *JETP Letters*, 89(4), 2009.
- [18] Klaus D. Usadel. Generalized Diffusion Equation for Superconducting Alloys. *Phys. Rev. Lett.*, 25:507–509, 1970.

# А Приложение. SINIS. Случай сильного взаимодействия с подложкой

В этом разделе будут явно выписаны вклады, которые не содержат принципиально новых эффектов.

## А.1 Поправки к функции распределения

Отбирая лишь члены третьего порядка из граничных условий (21) приходим к следующему их виду:

$$\begin{aligned}
 4\partial_x h_0^{(3)} \Big|_{x=1/2} = & \frac{1}{2r} \left[ \left\{ \tilde{f}_1^R \circ f_{S,2}^R \circ \delta h_1 - g_{S,1}^R \circ h_1^{(2)} - g_1^R \circ g_{S,1}^R \circ \delta h_1 \right\} + \right. \\
 & \left\{ \tilde{f}_2^R \circ f_{S,1}^R \circ \delta h_2 - g_{S,2}^R \circ h_2^{(2)} - g_2^R \circ g_{S,2}^R \circ \delta h_2 \right\} - \\
 & \left\{ \tilde{f}_1^R \circ \delta h_2 \circ f_{S,2}^A - h_1^{(2)} \circ g_{S,1}^A - g_1^R \circ \delta h_1 \circ g_{S,1}^A \right\} - \\
 & \left\{ \tilde{f}_2^R \circ \delta h_1 \circ f_{S,1}^A - h_2^{(2)} \circ g_{S,2}^A - g_2^R \circ \delta h_2 \circ g_{S,2}^A \right\} + \\
 & \left\{ \delta h_1 \circ f_{S,1}^A \circ \tilde{f}_2^A + h_1^{(2)} \circ g_{S,1}^A + \delta h_1 \circ g_{S,1}^A \circ g_1^A \right\} + \\
 & \left\{ \delta h_2 \circ f_{S,2}^A \circ \tilde{f}_1^A + h_2^{(2)} \circ g_{S,2}^A + \delta h_2 \circ g_{S,2}^A \circ g_2^A \right\} - \\
 & \left\{ f_{S,1}^R \circ \delta h_2 \circ \tilde{f}_2^A + g_{S,1}^R \circ h_1^{(2)} + g_{S,1}^R \circ \delta h_1 \circ g_1^A \right\} - \\
 & \left. \left\{ f_{S,2}^R \circ \delta h_1 \circ \tilde{f}_1^A + g_{S,2}^R \circ h_2^{(2)} + g_{S,2}^R \circ \delta h_2 \circ g_2^A \right\} \right] \quad (120)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4\partial_x h_0^{(3)} \Big|_{x=1/2} = & \frac{1}{2r} \left[ \left\{ \tilde{f}_1^R \circ f_{S,2}^R \circ \delta h_1 - g_{S,1}^R \circ h_1^{(2)} - g_1^R \circ g_{S,1}^R \circ \delta h_1 \right\} - \right. \\
 & \left\{ \tilde{f}_2^R \circ f_{S,1}^R \circ \delta h_2 - g_{S,2}^R \circ h_2^{(2)} - g_2^R \circ g_{S,2}^R \circ \delta h_2 \right\} - \\
 & \left\{ \tilde{f}_1^R \circ \delta h_2 \circ f_{S,2}^A - h_1^{(2)} \circ g_{S,1}^A - g_1^R \circ \delta h_1 \circ g_{S,1}^A \right\} + \\
 & \left\{ \tilde{f}_2^R \circ \delta h_1 \circ f_{S,1}^A - h_2^{(2)} \circ g_{S,2}^A - g_2^R \circ \delta h_2 \circ g_{S,2}^A \right\} + \\
 & \left\{ \delta h_1 \circ f_{S,1}^A \circ \tilde{f}_2^A + h_1^{(2)} \circ g_{S,1}^A + \delta h_1 \circ g_{S,1}^A \circ g_1^A \right\} - \\
 & \left\{ \delta h_2 \circ f_{S,2}^A \circ \tilde{f}_1^A + h_2^{(2)} \circ g_{S,2}^A + \delta h_2 \circ g_{S,2}^A \circ g_2^A \right\} - \\
 & \left\{ f_{S,1}^R \circ \delta h_2 \circ \tilde{f}_2^A + g_{S,1}^R \circ h_1^{(2)} + g_{S,1}^R \circ \delta h_1 \circ g_1^A \right\} + \\
 & \left. \left\{ f_{S,2}^R \circ \delta h_1 \circ \tilde{f}_1^A + g_{S,2}^R \circ h_2^{(2)} + g_{S,2}^R \circ \delta h_2 \circ g_2^A \right\} \right] \quad (121)
 \end{aligned}$$

В частности, члены в разложении функций распределения:

$$h_0^{(3)} = \sum_{n=-1,0,1} A_n^{(3)}(\varepsilon) \cos(\varkappa_n V x) e^{2inVt}$$

$$h_3^{(2)} = \sum_{n=-1,0,1} B_n^{(3)}(\varepsilon) \sin(\varkappa_n V x) e^{2inVt}$$

$$\begin{aligned}
A_n^{(3)} = & -\frac{1}{8r\varkappa_n V \sin[\varkappa_n V/2]} \times \\
& [\Delta(n, 0) \{ \beta_-^R (f_{S,-}^R \delta h_2 - f_{S,-}^A \delta h_{1,-,-}) + \beta_-^A (-f_{S,-}^A \delta h_2 + f_{S,-}^R \delta h_{1,-,-}) + \\
& \beta_+^R (f_{S,+}^R \delta h_1 - f_{S,+}^A \delta h_{2,++}) + \beta_+^A (-f_{S,+}^A \delta h_1 + f_{S,+}^R \delta h_{2,++}) + \\
& (g_{S,-}^A - g_{S,-}^R) \left( (s_2^A + s_2^R) \delta h_2 + 2(\tilde{A}_0 - \tilde{B}_0) \right) + \\
& (g_{S,+}^A - g_{S,+}^R) \left( (s_1^A + s_1^R) \delta h_1 + 2(\tilde{A}_0 + \tilde{B}_0) \right) \} + \\
& \Delta(n, 1) \{ g_{S,-}^A q_1^A \delta h_{1,-,-} + \alpha_+^A (f_{S,-}^R \delta h_2 - f_{S,-}^A \delta h_{1,-,-}) + \\
& (g_{S,+++}^A - g_{S,+++}^R) q_1^R \delta h_{1,++} + (g_{S,---}^A - g_{S,---}^R) q_2^A \delta h_{2,-,-} - g_{S,+}^R q_2^R \delta h_{2,++} + \\
& \alpha_-^R (-f_{S,+}^A \delta h_1 + f_{S,+}^R \delta h_{2,++}) + g_{S,+}^A (q_2^R \delta h_{2,++} + 2\tilde{A}_1 - 2\tilde{B}_1) - \\
& 2g_{S,---}^R (\tilde{A}_1 - \tilde{B}_1) + 2g_{S,+++}^A (\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1) - \\
& g_{S,-}^R (q_1^A \delta h_{1,-,-} + 2(\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1)) \} + \\
& \Delta(n, -1) \{ -g_{S,-}^R q_1^R \delta h_{1,-,-} + \alpha_+^R (-f_{S,-}^A \delta h_2 + f_{S,-}^R \delta h_{1,-,-}) + \\
& (g_{S,+++}^A - g_{S,+++}^R) q_1^A \delta h_{1,++} + (g_{S,---}^A - g_{S,---}^R) q_2^R \delta h_{2,-,-} + g_{S,+}^A q_2^A \delta h_{2,++} + \\
& \alpha_-^A (f_{S,+}^R \delta h_1 - f_{S,+}^A \delta h_{2,++}) - g_{S,+}^R (q_2^A \delta h_{2,++} + 2\tilde{A}_{-1} - 2\tilde{B}_{-1}) + \\
& 2g_{S,---}^A (\tilde{A}_{-1} - \tilde{B}_{-1}) - \\
& 2g_{S,+++}^R (\tilde{A}_{-1} + \tilde{B}_{-1}) + g_{S,-}^A (q_1^R \delta h_{1,-,-} + 2(\tilde{A}_{-1} + \tilde{B}_{-1})) \} ] \quad (122)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n^{(3)} = & \frac{1}{8r\kappa_{nV} \cos[\kappa_{nV}/2]} \times \\
& [\Delta(n, 0) \{ -\beta_-^R (f_{S,-}^R \delta h_2 - f_{S,-}^A \delta h_{1,-}) - \beta_-^A (-f_{S,-}^A \delta h_2 + f_{S,-}^R \delta h_{1,-}) + \\
& \beta_+^R (f_{S,+}^R \delta h_1 - f_{S,+}^A \delta h_{2,++}) + \beta_+^A (-f_{S,+}^A \delta h_1 + f_{S,+}^R \delta h_{2,++}) + \\
& (g_{S,-}^A - g_{S,-}^R) \left( (s_2^A + s_2^R) \delta h_2 + 2(\tilde{A}_0 - \tilde{B}_0) \right) + \\
& (g_{S,+}^A - g_{S,+}^R) \left( (s_1^A + s_1^R) \delta h_1 + 2(\tilde{A}_0 + \tilde{B}_0) \right) \} + \\
& \Delta(n, 1) \{ g_{S,-}^A q_1^A \delta h_{1,-} + \alpha_+^A (f_{S,-}^R \delta h_2 - f_{S,-}^A \delta h_{1,-}) + \\
& (g_{S,+++}^A - g_{S,+++}^R) q_1^R \delta h_{1,++} - (g_{S,---}^A - g_{S,---}^R) q_2^A \delta h_{2,-} + g_{S,+}^R q_2^R \delta h_{2,++} - \\
& \alpha_-^R (-f_{S,+}^A \delta h_1 + f_{S,+}^R \delta h_{2,++}) - g_{S,+}^A (q_2^R \delta h_{2,++} + 2\tilde{A}_1 - 2\tilde{B}_1) - \\
& 2g_{S,---}^R (\tilde{A}_1 - \tilde{B}_1) + 2g_{S,+++}^A (\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1) - \\
& g_{S,-}^R (q_1^A \delta h_{1,-} + 2(\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1)) \} + \\
& \Delta(n, -1) \{ -g_{S,-}^R q_1^R \delta h_{1,-} + \alpha_+^R (-f_{S,-}^A \delta h_2 + f_{S,-}^R \delta h_{1,-}) + \\
& (g_{S,+++}^A - g_{S,+++}^R) q_1^A \delta h_{1,++} - (g_{S,---}^A - g_{S,---}^R) q_2^R \delta h_{2,-} - g_{S,+}^A q_2^A \delta h_{2,++} - \\
& \alpha_-^A (f_{S,+}^R \delta h_1 - f_{S,+}^A \delta h_{2,++}) + g_{S,+}^R (q_2^A \delta h_{2,++} + 2\tilde{A}_{-1} - 2\tilde{B}_{-1}) - \\
& 2g_{S,---}^A (\tilde{A}_{-1} - \tilde{B}_{-1}) - 2g_{S,+++}^R (\tilde{A}_{-1} + \tilde{B}_{-1}) + \\
& g_{S,-}^A (q_1^R \delta h_{1,-} + 2(\tilde{A}_{-1} + \tilde{B}_{-1})) \} ] \quad (123)
\end{aligned}$$

Где для вкладов, возникающих из поправок к функции распределения введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_n &= \cos(\kappa_{nV}/2) A_n^{(2)} \\
\tilde{B}_n &= \sin(\kappa_{nV}/2) B_n^{(2)}
\end{aligned} \quad (124)$$

## A.2 Нестационарные вклады в ток во втором порядке

Полное выражение для тока во втором порядке имеет следующий вид:

$$I(t) = \frac{1}{8R_\Sigma} \left\{ J_{h_s}^{(1)} + \left( J_0^{(1)} + J_+^{(1)} e^{2iVt} + J_-^{(1)} e^{-2iVt} \right) \right\} \quad (125)$$

$$\begin{aligned}
J_{h_s}^{(1)}(\varepsilon) \equiv \int d\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_S}\right) (f_S^A(\varepsilon) - f_S^R(\varepsilon)) [e^{2itV} v_{++}^A - v_{--}^A e^{-2itV} + \\
e^{2itV} v_{--}^R - v_{++}^R e^{-2itV}] \quad (126)
\end{aligned}$$



$$J_+^{(1)}(\varepsilon) \equiv \int d\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_e}\right) [v_+^A f_{S,-}^R - f_{S,+}^A v_-^R + f_{S,+++}^A v_+^A - f_{S,---}^R v_-^R] \quad (127)$$

$$J_-^{(1)}(\varepsilon) \equiv \int d\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_e}\right) [-v_-^A f_{S,+}^R + f_{S,-}^A v_+^R - f_{S,---}^A v_-^A + f_{S,+++}^R v_+^R] \quad (128)$$

$$J_0^{(1)}(\varepsilon) \equiv \int d\varepsilon (f_{S,-}^A + f_{S,-}^R) (u_-^A + u_-^R) - (f_{S,+}^A + f_{S,+}^R) (u_+^A + u_+^R) \quad (129)$$

### A.3 Все вклады в стационарный ток в третьем порядке

После раскрытия всех свёрток и нескольких сдвигов переменной интегрирования приходим к следующему выражению:

$$I = \frac{1}{8R_\Sigma} \left[ \frac{1}{4\kappa_0 r} \left( \cot \frac{\kappa_0}{2} + \tan \frac{\kappa_0}{2} \right) J_+^{(2)} + \frac{1}{4\kappa_0 r} \left( \tan \frac{\kappa_0}{2} - \cot \frac{\kappa_0}{2} \right) J_-^{(2)} + J_f^{(2)} + J_g^{(2)} \right] \quad (130)$$

Где введены следующие обозначения:

$$J_-^{(2)} = \int d\varepsilon (g_S^R - g_S^A) (\delta h_{2,+} - \delta h_{1,-}) (u^A + u^R) (f_S^A + f_S^R) = 0 \quad (131)$$

$$J_+^{(2)} = \int d\varepsilon (g_{S,+}^R - g_{S,+}^A) (u_-^A (\delta h_2 f_{S,-}^A - \delta h_{1,-} f_{S,-}^R) + u_-^R (\delta h_2 f_{S,-}^R - \delta h_{1,-} f_{S,-}^A)) + (g_{S,-}^A - g_{S,-}^R) (u_+^A (\delta h_1 f_{S,+}^A - \delta h_{2,+} f_{S,+}^R) + u_+^R (\delta h_1 f_{S,+}^R - \delta h_{2,+} f_{S,+}^A)) \quad (132)$$

$$J_g^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\varepsilon \left( u_-^{A^2} \left( (h_2^{(0)} - h_{S,-}) g_{S,-}^A + \delta h_2 g_{S,-}^R \right) - u_-^{R^2} \left( (h_2^{(0)} - h_{S,-}) g_{S,-}^R + \delta h_2 g_{S,-}^A \right) - v_+^{R^2} \left( (h_2^{(0)} - h_{S,-}) g_{S,-}^R + \delta h_2 g_{S,-}^A \right) + v_+^{A^2} \left( (h_2^{(0)} - h_{S,-}) g_{S,-}^A + \delta h_2 g_{S,-}^R \right) + u_+^{R^2} \left( (h_1^{(0)} - h_{S,+}) g_{S,+}^R + \delta h_1 g_{S,+}^A \right) - u_+^{A^2} \left( (h_1^{(0)} - h_{S,+}) g_{S,+}^A + \delta h_1 g_{S,+}^R \right) + v_-^{R^2} \left( (h_1^{(0)} - h_{S,+}) g_{S,+}^R + \delta h_1 g_{S,+}^A \right) - v_-^{A^2} \left( (h_1^{(0)} - h_{S,+}) g_{S,+}^A + \delta h_1 g_{S,+}^R \right) \right) \quad (133)$$

$$\begin{aligned}
J_f^{(2)} = & \frac{1}{2} \int d\varepsilon v_-^A v \left( \frac{V}{2} - \varepsilon \right) \left( - (g_{S,+}^A + g_{S,---}^A) \right) \left( -\delta h_2 f_{S,-}^A + \delta h_{1,--} f_{S,-}^R \right) + \\
& v_-^R v \left( \varepsilon - \frac{V}{2} \right) \left( g_{S,+}^R + g_{S,---}^R \right) \left( -\delta h_2 f_{S,-}^R + \delta h_{1,--} f_{S,-}^A \right) - \\
& 2u_-^A g_{S,-}^A u \left( \frac{V}{2} - \varepsilon \right) \left( -\delta h_2 f_{S,-}^A + \delta h_{1,--} f_{S,-}^R \right) + \\
& 2u_-^R u \left( \varepsilon - \frac{V}{2} \right) g_{S,-}^R \left( -\delta h_2 f_{S,-}^R + \delta h_{1,--} f_{S,-}^A \right) - \\
& v_+^R v \left( \varepsilon + \frac{V}{2} \right) \left( g_{S,-}^R + g_{S,+++}^R \right) \left( -\delta h_1 f_{S,+}^R + \delta h_{2,++} f_{S,+}^A \right) + \\
& v_+^A v \left( -\varepsilon - \frac{V}{2} \right) \left( g_{S,-}^A + g_{S,+++}^A \right) \left( -\delta h_1 f_{S,+}^A + \delta h_{2,++} f_{S,+}^R \right) - \\
& 2u_+^R u \left( \varepsilon + \frac{V}{2} \right) g_{S,+}^R \left( -\delta h_1 f_{S,+}^R + \delta h_{2,++} f_{S,+}^A \right) + \\
& 2u_+^A g_{S,+}^A u \left( -\varepsilon - \frac{V}{2} \right) \left( -\delta h_1 f_{S,+}^A + \delta h_{2,++} f_{S,+}^R \right) \quad (134)
\end{aligned}$$

#### A.4 Стационарный ток в четвёртом порядке

Ток в четвёртом порядке в силу его громоздкости приводится в нераскрытом виде:

$$\begin{aligned}
I(t) = & \frac{1}{8R_\Sigma} \int d\varepsilon \left[ - \left\{ \bar{f}_1^R \circ \delta h_2 \circ f_{S,2}^A - f_1^R \circ h_2^{(2)} \circ f_{S,2}^A \right. \right. \\
& \left. \left. - h_1^{(3)} \circ g_{S,1}^A - \tilde{g}_1^R \circ \delta h_1 \circ g_{1,S}^A - \right. \right. \\
& \left. \left. \bar{f}_2^R \circ \delta h_1 \circ f_{S,1}^A + f_2^R \circ h_1^{(2)} \circ f_{S,1}^A + h_2^{(3)} \circ g_{S,2}^A + \tilde{g}_2^R \circ \delta h_2 \circ g_{S,2}^A \right\} - \right. \\
& \left\{ -f_{S,1}^R \circ h_2^{(2)} \circ f_2^A + g_{S,1}^R \circ h_1^{(3)} + f_{S,1}^R \circ \delta h_2 \circ \bar{f}_2^A + g_{S,1}^R \circ \delta h_1 \circ \tilde{g}_1^A + \right. \\
& \left. f_{S,2}^R \circ h_1^{(2)} \circ f_1^A - f_{S,2}^R \circ \delta h_1 \circ \bar{f}_1^A - g_{S,2}^R \circ h_2^{(3)} - g_{S,2}^R \circ \delta h_2 \circ \tilde{g}_2^A \right\} + \\
& \left\{ h_{S,1} \circ f_{S,1}^A \circ \bar{f}_2^A + h_{S,1} \circ g_{S,1}^A \circ \tilde{g}_1^A - h_{S,2} \circ f_{S,2}^A \circ \bar{f}_1^A - h_{S,2} \circ g_{S,2}^A \circ \tilde{g}_2^A \right\} - \\
& \left\{ h_1^{(0)} \circ \bar{f}_1^A \circ f_{S,2}^A - h_1^{(3)} \circ g_{S,1}^A + h_1^{(2)} \circ f_1^A \circ f_{S,2}^A + h_1^{(0)} \circ \tilde{g}_1^A \circ g_{S,1}^A - \right. \\
& \left. h_2^{(0)} \circ \bar{f}_2^A \circ f_{S,1}^A + h_2^{(3)} \circ g_{S,2}^A - h_2^{(2)} \circ f_2^A \circ f_{S,1}^A - h_2^{(0)} \circ \tilde{g}_2^A \circ g_{S,2}^A \right\} + \\
& \left\{ \bar{f}_1^R \circ f_{S,2}^R \circ h_{S,1} - \tilde{g}_1^R \circ g_{S,1}^R \circ h_{S,1} - \bar{f}_2^R \circ f_{S,1}^R \circ h_{S,2} + \tilde{g}_2^R \circ g_{S,2}^R \circ h_{S,2} \right\} - \\
& \left\{ f_{S,1}^R \circ \bar{f}_2^R \circ h_1^{(0)} + f_{S,1} \circ f_2^R \circ h_1^{(2)} + g_{S,1}^R \circ h_1^{(3)} - g_{S,1}^R \circ \tilde{g}_1^R \circ h_1^{(0)} - \right. \\
& \left. f_{S,2}^R \circ \bar{f}_1^R \circ h_2^{(0)} - f_{S,2} \circ f_1^R \circ h_2^{(2)} - g_{S,2}^R \circ h_2^{(3)} + g_{S,2}^R \circ \tilde{g}_2^R \circ h_2^{(0)} \right\} \left. \right] \quad (135)
\end{aligned}$$