

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»**

**Факультет Физики**

Полькин Артём Владиславович

**«Роль квазичастичных возбуждений в процессах  
теплового проскальзывания фазы»**

Выпускная квалификационная работа  
по направлению подготовки 03.03.02 Физика  
образовательная программа «Физика»

**Научный руководитель:**

Скворцов Михаил Андреевич,

*док. физ.-мат. наук,*

*в. н. с. ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН,*

*зав. Сектором квантовой мезоскопии*

Москва

2024

## Аннотация

В работе исследованы свойства квазичастиц в различных сверхпроводящих системах и их роль в процессах теплового проскальзывания фазы. Для одномерного провода найдена локальная плотность состояний на фоне инстантона Лангера-Амбегаокара. Вычислена ток-фазовая характеристика нульмерного SIS'IS-контакта и вычислена соответствующая скорость проскальзываний фазы как функция тока. Для нульмерного SINIS-контакта выведены динамические уравнения на фазу параметра порядка с учетом отклика квазичастиц. Найдена форма оптимальной флуктуации в реальном времени, отвечающая начальному этапу теплового проскальзывания фазы. При определенных условиях длительность инстантона оказывается пропорциональной времени релаксации андреевских состояний  $\tau_{in}$ . Данное обстоятельство приводит к зависимости вероятности проскальзывания фазы, стимулированного микроволновым излучением, от времени неупругой релаксации квазичастиц  $\tau_{in}$ .

# Содержание

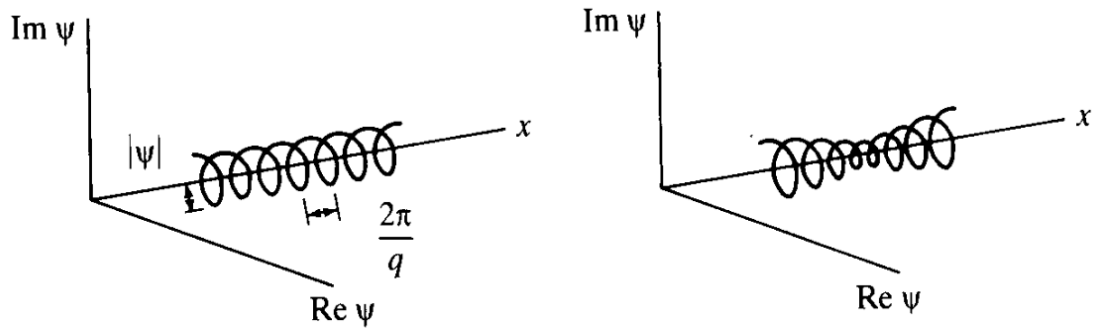
<b>Аннотация</b>	<b>1</b>
<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Электронная подсистема на фоне инстантона Лангера-Амбегаокара</b>	<b>8</b>
1.1 Уравнение Узаделя . . . . .	8
1.2 Плотность состояний . . . . .	10
<b>2 Термодинамика нульмерного SIS'IS-контакта</b>	<b>12</b>
2.1 Электронная подсистема . . . . .	12
2.2 Уравнение Гинзбурга-Ландау . . . . .	14
2.3 Активационный барьер . . . . .	15
<b>3 Проскальзывание фазы в реальном времени в нульмерном SINIS контакте</b>	<b>19</b>
3.1 Модель и решение в седловом приближении . . . . .	19
3.2 Влияние динамики фазы на квазичастицы . . . . .	22
3.2.1 Динамические уравнения на фазу . . . . .	24
3.2.2 Подстройка спектральных углов . . . . .	26
3.2.3 Подстройка функции распределения . . . . .	28
3.3 Полные уравнения для фазы . . . . .	29
3.4 Оптимальная флуктуация . . . . .	31
3.5 Тепловое проскальзывание фазы под действием микроволново- го излучения . . . . .	34
<b>Заключение</b>	<b>39</b>
<b>Список литературы</b>	<b>40</b>
<b>A Вывод уравнения на фазовые переменные</b>	<b>44</b>
<b>B Усреднение по квазичастичным степеням свободы</b>	<b>46</b>
B.1 Седловое приближение . . . . .	46
B.2 Вклады в действие после усреднения . . . . .	47

<b>С</b>	<b>Ланжевеновский шум в уравнениях на фазу</b>	<b>50</b>
<b>D</b>	<b>Решение уравнений на быструю динамику</b>	<b>52</b>

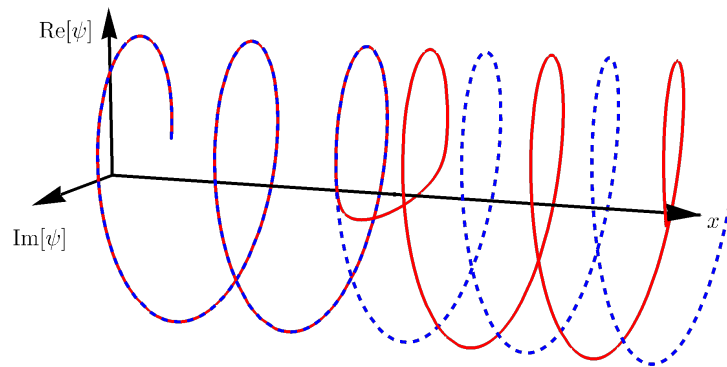
## Введение

В физике сверхпроводящих систем особую роль играют различные флуктуационные явления, при которых происходит разрушение сверхпроводимости [15]. Одно из таких явлений – проскальзывание фазы, которое может иметь как тепловую, так и квантовую природу. Тепловые проскальзывания фазы связаны с тем, что за счет равновесных термодинамических флуктуаций система может преодолеть барьер, разделяющий сверхтоковые состояния с различными намотками фазы. Такое явление приводит к конечному, хоть и экспоненциально малому, значению напряжения на вольт-амперной характеристике при токах меньше критического, а также проявляется в однофотонных детекторах на основе сверхпроводящих нанопроводов [27] в виде так называемых темновых отсчётов [26, 28, 20]. В последние годы активно исследуется когерентное квантовое проскальзывание фазы – эффект, дуальный классическому эффекту Джозефсона, где вместо туннелирования зарядов между сверхпроводниками происходит туннелирование вихрей или магнитного потока [19, 2, 29].

Впервые объяснение тепловых проскальзываний фазы в токонесущих сверхпроводящих проводах было дано в работе Лангера и Амбегаокара [11]. Этот процесс можно понять на примере кольца, по которому течёт ток. В таком кольце полный набег фазы параметра порядка  $\psi$  квантуется:  $\arg \psi = 2\pi n x / L$ , где  $L$  – длина кольца. При этом модуль параметра порядка в равновесном состоянии постоянен, а собственное число  $n$  сохраняется. Однако, при наличии тепловых флуктуаций в системе могут происходить переходы между состояниями с различными значениями  $n$ . Если такие флуктуации достаточно редкие, то этот переход удобно описывать в терминах свободной энергии, у которой при каждом значении  $n$  наблюдаются минимумы, отделённые друг от друга барьерами. Переход между соседними минимумами происходит через стационарные седловые решения для свободной энергии, которые по аналогии с теорией поля называются инстантонами. Достигнув за счет тепловых флуктуаций такого решения, в ходе дальнейшей временной динамики модуль параметра порядка зануляется в какой-то точке провода, и фаза скручивается, переходя из состояния с отличным  $n$ . Дальнейшая же эволюция системы будет зависеть от значения параметра Мак-Камбера [17].



(a)



(b)

Рис. 1: (a) Качественная пространственная зависимость параметра порядка в одномерном сверхпроводящем проводе со сверхтоком при температуре близкой к критической: слева состояние с постоянным значением модуля параметра порядка, отвечающее минимуму свободной энергии, справа седловое значение параметра порядка непосредственно перед проскальзыванием (из учебника [34]). (b) Реальная пространственная зависимость однородного (синий пунктир) и инстантонного решения (сплошной красный) параметра порядка, полученного в работе [18] при токе  $J = 0.2I_c$ , где  $I_c$  – критический ток. Для инстантонного значения подавление  $|\Delta(x)|$  происходит фактически на масштабе одного витка фазы.

Теория проскальзывания фазы при температуре близкой к критической была построена в работах [11, 17], где стационарные однородное и инстантонное решения, изображённые на Рис. 1 были найдены при помощи уравнения Гинзбурга-Ландау, а также была вычислена величина активационного барьера  $\delta F$ , равная разности свободных энергий для однородной и инстантонной кон-

фигурации. Этой величиной, в частности, определяется экспонента скорости проскальзываний фазы. Предэкспонента же в этих работах была найдена при помощи зависящего от времени уравнения Гинзбурга-Ландау.

Аналитическое описание проскальзывания фазы можно получить лишь в нульмерной геометрии джозефсоновского контакта, где инстантонная конфигурация всего одна, и в одномерном проводе, где такие состояния могут возникнуть в любой точке провода. В случае, когда важна конечная ширина сверхпроводящих проводов, как показывают результаты численного моделирования [35], оказывается, что по мере приближения к критическому току устойчивая конфигурация теряет вид вихря и приобретает вид, похожий на линию инстантонов, описанных в [11].

Подход, разработанный в работах Лангера-Амбегаокара, в дальнейшем был распространён и на температуры, не близкие к критическим, где перестаёт быть применимым уравнение Гинзбурга-Ландау. В таком случае уже нельзя проинтегрировать по квазичастичным степеням свободы, и оказывается продуктивным использование формализма уравнения Узаделя, которое описывает квазиклассические функции Грина квазичастиц [26]. В частности, при численном анализе эффективно одномерного провода было показано, что зависимость термоактивационного барьера  $\delta F$  от протекающего по проводу тока  $J$  качественно совпадает с зависимостью, полученной в [11], и для низких температур даёт аналогичную асимптотику  $\delta F \propto (1 - J/I_c)^{5/4}$ , где  $I_c$  – критический ток.

Схожие процессы исследовались также для сверхпроводников, на которые падало микроволновое излучение. При экспериментальном и численном исследовании сверхпроводников, описываемых RCSJ моделью с большой ёмкостью (то есть с большим параметром Мак-Камбера), было обнаружено появление побочного максимума в зависимости скорости проскальзываний фазы от тока. Предполагается, что этот максимум соответствует резонансу между падающим излучением и плазменной частотой контакта [7, 8].

В описанных работах проскальзывания фазы рассматривались как равновесные процессы, вероятность которых определяется термодинамикой системы, в рамках которой детали кинетики квазичастиц оказываются неважны. Однако, их роль может стать существенной в неравновесной ситуации. Например, неупругими процессами определяется минимальная частота микроволнового

излучения, необходимого для увеличения щели [33]. Другим примером влияния неупругих процессов на поглощение энергии является дебаевский механизм релаксации. В сверхпроводниках этот механизм связан с тем, что в присутствии микроволны у сверхтекучего импульса  $p_s$  появляется ненулевая производная по времени. Из-за этого плотность состояний, определяемая мгновенным значением импульса  $p_s$  преобразуется, что эквивалентно изменению уровней энергии квазичастиц. Эти изменения приводят к созданию неравновесной конфигурации квазичастичной подсистемы, релаксация которой происходит посредством неупругих столкновений. Такой механизм поглощения микроволнового излучения приводит к появлению в проводимости вклада, пропорционального большому времени неупругих процессов. Однако, в силу того, что плотность состояний инвариантна относительно обращения времени и зависит только от модуля  $|p_s|$ , дебаевская поправка к проводимости появляется либо в нелинейном режиме, либо при наличии постоянного сверхтока [31, 30], либо в двумерных нецентросимметричных сверхпроводниках с лежащим в плоскости магнитным полем [32].

Целью данной работы является исследование временной динамики процессов теплового проскальзывания фазы. Мы выведем динамические уравнения на фазовую переменную, которые учитывают медленный отклик квазичастиц. При определенных условиях эффективная проводимость в RSJ модели перехода оказывается пропорциональной времени неупругой релаксации андреевских связанных состояний. Данный эффект может быть обнаружен путем исследования проскальзываний фазы, стимулированных микроволновым излучением.

В первой части представленной работы получена конфигурация квазичастиц на фоне параметра порядка, найденного в [18]. Во второй части рассмотрена термодинамика нульмерного SISIS-контакта (S – сверхпроводник, I – изолятор), после чего продемонстрирована аналогия с задачей об одномерном сверхпроводнике. В третьей части исследована временная динамика фазы в нульмерном SINIS-контакте с наведённой сверхпроводимостью (N – нормальный металл), прояснена роль процессов неупругой релаксации андреевских состояний, найдена инстантонная траектория в реальном времени, и вычислена скорость проскальзывания фазы под действием микроволнового излучения.



# 1 Электронная подсистема на фоне инстантона Лангера-Амбегаокара

В этом разделе рассматривается поведение квазичастиц на фоне инстантонного решения Лангера-Амбегаокара для параметра порядка в сверхпроводящем проводе. С помощью одномерного уравнения Узаделя вычислена локальная плотность состояний. Ее вид позволяет предложить качественно похожую модель SINIS-контакта (S – сверхпроводник, N – нормальный металл, I – изолятор), где в качестве нормального металла будет выступать нульмерная диффузная гранула.

## 1.1 Уравнение Узаделя

В качестве модели в этом разделе рассматривается бесконечно длинный одномерный диффузный сверхпроводящий провод, по которому течёт постоянный ток. Для описания такой системы используется уравнение Узаделя, которое для запаздывающей функции Грина  $\hat{G}^R$  имеет вид [3]:

$$\left[ D\partial_x^2 \hat{G}^R - 2i\varepsilon\tau_3 + \hat{\Delta}, \hat{G}^R \right] = 0, \quad (1)$$

где  $\tau_i$  – матрицы Паули в пространстве Намбу,  $\hat{\Delta} = \Delta\tau_+ - \Delta^*\tau_-$  – параметр порядка, а  $D$  – коэффициент диффузии.

При температурах, близких к критической, оказывается возможным проинтегрировать уравнение (1) по квазичастичным степеням свободы, после чего уравнение самосогласования для параметра порядка  $\Delta$  сведётся к уравнению Гинзбурга-Ландау для сверхпроводника. Инстантонное решение этого уравнения с заданным током  $J$ , полученное в работах [11, 18], имеет вид

$$\psi(x) = \sqrt{1 - 3\kappa^2} \tanh\left(\sqrt{\frac{1 - 3\kappa^2}{2}}x\right) - i\sqrt{2}\kappa, \quad (2)$$

$$J \propto \kappa(1 - \kappa^2), \quad (3)$$

где  $\Delta(x) = \Delta_0\psi(x)$  со значением параметра порядка в системе без тока  $\Delta_0$  и обезразмеренной на корреляционную длину  $\xi \propto (1 - T/T_c)^{-1/2}$  пространственной переменной  $x = x/\xi$ .

Для изучения квазичастичной подсистемы на фоне инстантонного решения необходимо, следуя общей логике, описанной в [3], решить уравнение Узаделя (1) с параметром порядка (2).

После параметризации функции Грина сверхпроводника в терминах спектральных углов

$$\hat{G}^R(\varepsilon, x) = \begin{pmatrix} \cos \theta^R(\varepsilon, x) & \sin \theta^R(\varepsilon, x) e^{i\chi(\varepsilon, x)} \\ \sin \theta^R(\varepsilon, x) e^{-i\chi(\varepsilon, x)} & -\cos \theta^R(\varepsilon, x) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

уравнение (1) принимает вид системы

$$E_{\text{Th}} \partial_x (\sin^2 \theta^R \partial_x \chi) - i \sin \theta^R (\Delta e^{-i\chi} - \Delta^* e^{i\chi}) = 0, \quad (5a)$$

$$E_{\text{Th}} \partial_x^2 \theta^R - \frac{E_{\text{Th}}}{2} (\partial_x \chi')^2 \sin 2\theta^R + \cos \theta^R (\Delta e^{-i\chi} + \Delta^* e^{i\chi}) + 2i\varepsilon \sin \theta^R = 0, \quad (5b)$$

где введена энергия Таулесса  $E_{\text{Th}} = D/\xi^2$  на длине когерентности.

Постоянный ток, текущий по проводу, связан с градиентом фазы и обеспечивается граничными условиями:  $\partial_x \chi(\pm\infty) = \kappa$ . Чтобы учесть их явно оказывается удобным сделать калибровочное преобразование  $\chi(x, \varepsilon) \mapsto \kappa x + \chi(x, \varepsilon)$ . Далее, после подстановки параметра порядка (2) система принимает вид:

$$E_{\text{Th}} \partial_x (\sin^2 \theta^R (\partial_x \chi + \kappa)) - i\Delta_0 \sin \theta^R (\psi e^{-i\chi} - \psi^* e^{i\chi}) = 0, \quad (6a)$$

$$E_{\text{Th}} \partial_x^2 \theta^R - \frac{E_{\text{Th}}}{2} (\partial_x \chi + \kappa)^2 \sin 2\theta^R + 2\Delta_0 \cos \theta^R \text{Re} [\psi e^{-i\chi}] + 2i\varepsilon \sin \theta^R = 0. \quad (6b)$$

В дальнейшем будет предполагаться предел  $T_c - T \ll T$ , в указанном пределе  $E_{\text{Th}} \propto 1 - T/T_c$ , а  $\Delta_0 \propto \sqrt{1 - T/T_c}$ , то есть градиентные члены, содержащие  $E_{\text{Th}}$  оказываются малыми. Тогда в главном порядке можно считать, что  $\chi(x) = \arg(\psi(x))$  [24], что позволяет сократить второе слагаемое в (6a), после чего уравнение можно проинтегрировать и подставить результат в (6b):

$$\sin^2 \theta^R (\partial_x \chi + \kappa) = \mathcal{J}, \quad (7a)$$

$$E_{\text{Th}} \partial_x^2 \theta^R - E_{\text{Th}} \mathcal{J}^2 \frac{\cot \theta^R}{\sin^2 \theta^R} + 2\Delta_0 \cos \theta^R |\psi| + 2i\varepsilon \sin \theta^R = 0. \quad (7b)$$

После этого можно заметить, что в силу наличия тока, ожидаемая БКШ особенность при энергиях  $\varepsilon = \pm\Delta_0$  сглаживается. Это значит, что особенности производных  $\theta^R$  будут размыты, что позволяет в уравнении (7b) пренебречь

слагаемым со второй производной в силу того, что малость  $E_{\text{Th}}$  не будет компенсироваться какими-либо расходимостями  $S$  физической точки зрения это является следствием того, что характерный масштаб изменения квазичастичной подсистемы связан с корреляционной длиной при нулевой температуре,  $\xi(0)$ , в то время как характерный масштаб для параметра порядка определяется температурной корреляционной длиной, которая при  $1 - T/T_c \ll 1$  оказывается большой. Такое разделение масштабов позволяет численно решить уравнение на  $\theta^R(x)$  в адиабатическом приближении (см Рис. 2).

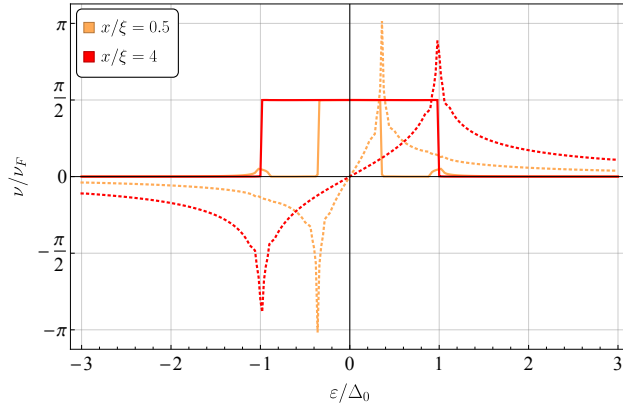


Рис. 2: Зависимость  $\theta^R(\varepsilon)$  в двух разных точках сверхпроводника на фоне инстантонного решения Лангера-Амбегаокара. Сплошная линия – вещественная часть, пунктирная линия – мнимая. Пики у сплошной оранжевой кривой на  $\varepsilon = \Delta_0$  являются следствием наличия тока. Здесь  $E_{\text{Th}} = \Delta_0/10$ ,  $J \approx 0.26I_c$ , где  $I_c$  – критический ток.

Из найденных решений видно, что даже достаточно близко к точке  $x = 0$ , где параметр порядка наиболее подавлен  $|\Delta(x)| \sim \Delta_0\kappa$ , решение имеет особенности при  $|\varepsilon| = \Delta_0$ , которая пропадает при нулевом токе  $\mathcal{J} = 0$ , то есть это особенность наводится частицами с бесконечности, для которых эффективное значение  $\Delta(x) = \Delta_0$ .

## 1.2 Плотность состояний

Воспользовавшись найденными решениями  $\theta^R(x)$ , можно сосчитать локальную плотность состояний  $\nu = \nu_F \text{Re} [\cos \theta^R]$  ( $\nu_F$  – плотность состояний на

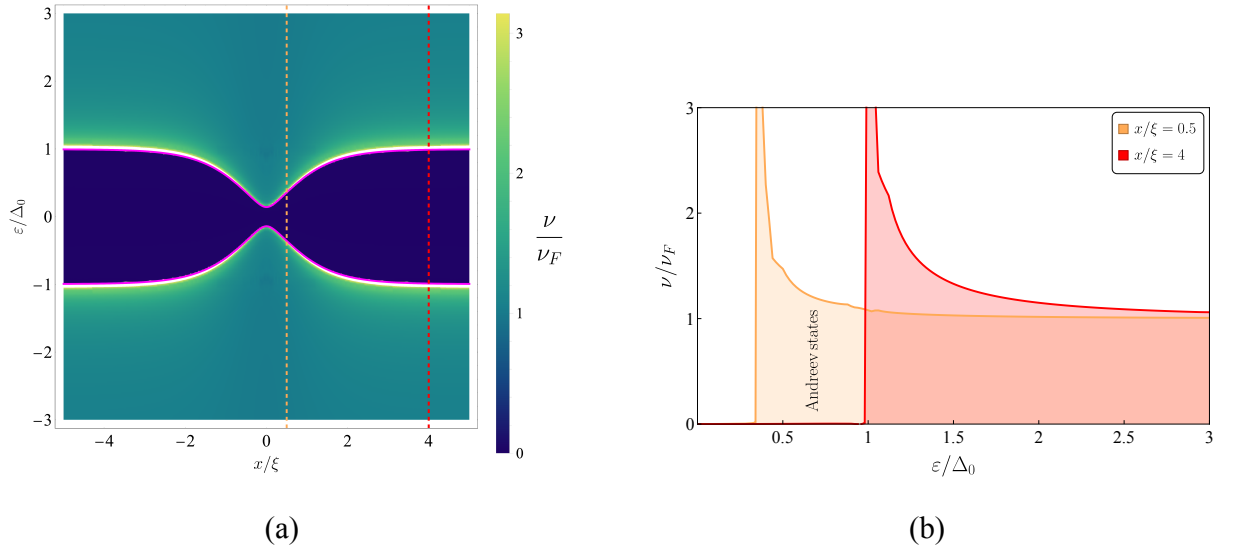


Рис. 3: (а) Плотность состояний, розовые линии соответствуют  $\pm|\psi(x)|$ , вдоль пунктирных линий сделаны срезы, изображённые на (b). (b) Плотность состояний при различных значениях  $x$ . Здесь  $E_{\text{Th}} = \Delta_0/10$ ,  $J \approx 0.26I_c$ .

уровне Ферми), изображённую на Рис. 3. Из полученной зависимости следует, что на даже при инстантонной конфигурации параметра порядка плотности состояний имеет вид, похожий на значение, полученное в рамках в теории БКШ с локальным значением щели  $\Delta_0\psi(x)$ . Также заметим, что в одномерном проводе существуют Андреевские состояния, то есть состояния с энергией, меньшей, чем «объёмное» значение параметра порядка  $\Delta_0|\psi(\pm\infty)|$ , эти состояния будут существенны позже при обсуждении диффузных мод в разделе 3.2.3.

Подобное поведение плотности состояний позволяет предложить упрощённую модель, состоящую из нормального (N) или сверхпроводящего (S') островка, к которому через два туннельных барьера (I) подключены объёмные сверхпроводники (S). То есть рассмотреть нульмерный SINIS- или SIS'IS-контакт. С точки зрения решённой в этом разделе одномерной задачи, это отвечает тому, что  $\Delta(x)$  будет заменяться на ступенчатую функцию, что в свою очередь сделает зависимость, изображённую на Рис. 3(a) более резкой. При этом стоит отметить, что при переходе к нульмерному контакту область с подавленной сверхпроводимостью присутствует в системе всегда, в то время как для одномерного провода эта особенность появляется только в инстантонной конфигурации.

## 2 Термодинамика нульмерного SIS'IS-контакта

В этом разделе будет описан переход к упрощённой нульмерной модели, после чего для нульмерного SIS'IS контакта будет найдена ток-фазовая характеристика, а также получены нульмерное инстантонное решение для параметра порядка  $\Delta$  и высота барьера свободной энергии.

### 2.1 Электронная подсистема

Переход к нульмерным системам является достаточно популярной идеей в физике сверхпроводников, в частности этот подход используется для описания транспортных эффектов, где он позволяет переформулировать задачу в терминах эквивалентных цепей [21, 22].

В этой работе переход к нульмерному контакту позволяет избежать решения пространственных уравнений, заменяя градиентные члены в уравнении (1) на обмен с объёмными сверхпроводящими контактами. Физически это означает, что место в пространстве, где в одномерном случае была подавлена сверхпроводимость, заменяется на нульмерный островок, изображённый на Рис. 4.

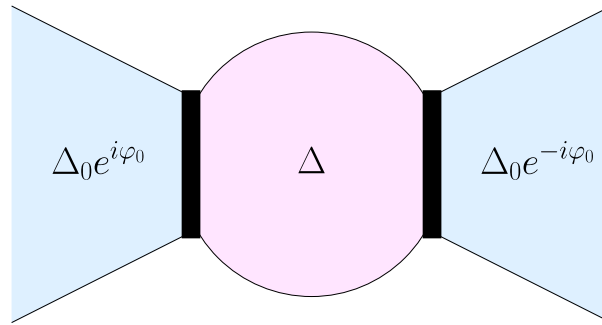


Рис. 4: Нульмерный SIS'IS контакт, граничные сверхпроводники являются массивными, то есть их квазичастичная подсистема определяется спектральными углами, полученными в рамках теории БКШ с параметрами порядка  $\Delta e^{\pm i\varphi_0}$ , а обратные эффекты близости в силу туннельности барьера пренебрежимо малы, параметр порядка нульмерного островка  $\Delta_0$  подчиняется уравнениям, приведённым в тексте раздела.

Чтобы получить ток-фазовую характеристику и найти нульмерный аналог инстантона Лангера-Амбегаокара можно воспользоваться мацубаровской нели-

нейной сигма-моделью (NL $\sigma$ M), которая описывает не только параметр порядка, но и квазичастицы в терминах квазиклассической матричной функции Грина [1, 23]. В этом формализме действие должно быть дополнено условием  $Q^2 = 1$  и имеет следующий вид:

$$S = \frac{\pi}{\delta} \left\{ -\text{Tr} \left[ \left( \varepsilon \tau_3 + \hat{\Delta} + \frac{\gamma}{2} (Q_L + Q_R) \right) Q \right] + \frac{|\Delta|^2}{\pi \lambda T} \right\}, \quad (8a)$$

$$\frac{\gamma}{2} (Q_R + Q_L) = \gamma (\tau_3 \cos \theta_0 + \tau_1 \sin \theta_0 \cos \varphi_0), \quad \hat{\Delta} = \tau_+ \Delta + \tau_- \Delta^*, \quad (8b)$$

$$\tan \theta_0 = \frac{\Delta_0}{\varepsilon}, \quad (8c)$$

здесь  $\tau_i$  – матрицы Паули в пространстве Намбу,  $\delta = 1/\nu_F V$  – среднее расстояние между уровнями ( $\nu_F$  – плотность состояний на уровне ферми на одну проекцию спина,  $V$  – объём островка),  $Q_{L(R)}$  – гриновские функции левого(правого) объёмного сверхпроводника,  $Q$  – матрица, описывающая островок, а  $\gamma$  – скорость ухода за счёт туннелирования, которая будет полагаться достаточно малой. Последнее слагаемое, находящееся под знаком следа обеспечивает туннельную связь между островком и массивными контактами ( $\gamma \sim G_T \delta$ , где  $G_T$  – безразмерный туннельный кондактанс барьера).

Чтобы от действия перейти к свободной энергии, необходимо вычислить седловое значение матрицы  $Q$ , которое будет совпадать с функцией Грина. Для упрощения дальнейшего решения можно заметить, что в силу симметрии контакта параметр порядка островка должен быть вещественным, то есть  $\hat{\Delta} = \Delta \tau_1$ . Тогда седловое уравнение

$$\left[ \varepsilon \tau_3 + \Delta \tau_1 + \frac{\gamma}{2} (Q_L + Q_R), Q \right] = 0 \quad (9)$$

можно решить в терминах параметризации матрицы  $Q$  через спектральные углы  $\theta$ :

$$Q = \tau_3 \cos \theta + \tau_1 \sin \theta, \quad (10a)$$

$$\tan \theta = \frac{\Delta + \gamma \sin \theta_0 \cos \chi}{\varepsilon + \gamma \cos \theta_0}. \quad (10b)$$

После этого, подставляя в действие явное выражение для  $Q$  и беря след по матричным индексам, выражение для свободной энергии сверхпроводника  $F$

принимает следующий вид:

$$S = F/T = \frac{\pi}{\delta} \left\{ -2 \sum_{\varepsilon_n} \sqrt{(\varepsilon_n + \gamma \cos \theta_0)^2 + (\Delta + \gamma \cos \varphi_0 \sin \theta_0)^2} + \frac{|\Delta|^2}{\pi \lambda T} \right\}, \quad (11)$$

где сумма берётся по всем фермионным мацубаровским частотам.

## 2.2 Уравнение Гинзбурга-Ландау

Для того, чтобы получить свободную энергию Гинзбурга-Ландау (ГЛ)  $F_{\text{sn}}$ , необходимо перейти к пределу  $1 - T/T_c \ll 1$ , после чего пренебречь частью свободной энергии, которая не зависит от  $\Delta$ , то есть не влияет на уравнения ГЛ. Таким образом, необходимо удерживать только члены вплоть до четвёртого порядка по  $\Delta$ ,  $\Delta_0$ , а в членах с малой прозрачностью  $\gamma$  достаточно ограничиться лишь вторым порядком, что аналогично удержанию только членов с  $|\nabla \Delta|^2$  в выражении для свободной энергии Гинзбурга-Ландау пространственных систем. После указанных приближений, свободная энергия имеет вид

$$F_{\text{sn}} = \frac{1}{\delta} \left( \log \frac{T}{T_c} \Delta^2 + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2 T_c^2} \Delta^4 + \frac{\pi\gamma}{4T_c} (\Delta^2 + \Delta_0^2 - 2\Delta\Delta_0 \cos \varphi_0) \right). \quad (12)$$

При температуре  $T$  ниже критической  $T_c$ , в предположении, что островок и массивные контакты сделаны из одного материала, то есть

$$\Delta_0 = 2\pi T_c \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}}, \quad (13)$$

удобно ввести обезразмеренную переменную  $\Delta = \Delta_0 f$ , после чего уравнение ГЛ становится зависящим от единственного безразмерного параметра

$$\zeta = \frac{\pi\gamma}{4T_c} (1 - T/T_c)^{-1} = 2\gamma\tau_{\text{GL}}, \quad (14)$$

где

$$\tau_{\text{GL}} = \frac{\pi}{8(T_c - T)} \quad (15)$$

так называемое время Гинзбурга-Ландау [15]. В терминах введённых параметров уравнение Гинзбурга-Ландау принимает вид:

$$-f + f^3 + \zeta (f - \cos \varphi_0) = 0. \quad (16)$$

Для полного описания системы к этому уравнению также необходимо добавить выражение для тока  $J$ :

$$J = 2e \frac{\partial F_{\text{sn}}}{\partial \varphi_0} = \frac{e\pi\gamma\Delta_0}{T_c \delta} \Delta \sin \varphi_0 = \frac{e\pi\gamma\Delta_0^2}{T_c \delta} j, \quad (17)$$

где  $j = f \sin \varphi_0$  – безразмерный ток.

Можно заметить, что уравнение Гинзбурга-Ландау (16) имеет три решения. Для нахождения ток-фазовой характеристики необходимо отобрать один корень, который отвечает минимальному значению свободной энергии (12). Решая уравнение (16) и отбирая корни указанным способом, можно получить асимптотики равновесного значения параметра порядка при малой прозрачности  $\zeta \ll 1$  или при температуре, очень близкой к критической  $\zeta \gg 1$ :

$$f \approx \begin{cases} \cos \varphi_0 \left( 1 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{\zeta} \right); & \zeta \gg 1, \\ \text{sign}(\cos \varphi_0) + \frac{\cos \varphi_0 - \text{sign}(\cos \varphi_0)}{2} \zeta; & \zeta \ll 1. \end{cases} \quad (18)$$

Подставляя полученные асимптотики в выражение для тока (17), можно получить приближённые значения для ток-фазового соотношения:

$$j \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0; & \zeta \gg 1, \\ \text{sign}(\cos \varphi_0) \sin \varphi_0; & \zeta \ll 1, \end{cases} \quad (19)$$

то есть при  $\zeta \gg 1$  выполняется обычное джозефсоновское соотношение, а в случае  $\zeta \ll 1$  воспроизводится формула Кулика-Омельянчука [6, 36]. Пользуясь найденными асимптотиками также можно найти зависимость критического тока  $j_c$  от  $\zeta$ :

$$j_c \approx \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4\zeta}; & \zeta \gg 1, \\ 1 - \frac{\zeta}{2}; & \zeta \ll 1. \end{cases} \quad (20)$$

В промежуточных случаях, значения параметра порядка  $f$  и тока  $j$  получаются как решения уравнения третьей степени, благодаря чему можно получить ток-фазовое соотношение (Рис. 5(a)) и критический ток (Рис. 5(b)).

### 2.3 Активационный барьер

Чтобы посчитать барьер свободной энергии, необходимо написать разность свободных энергий между аналогом однородного решения (индекс  $u$ ) и анало-



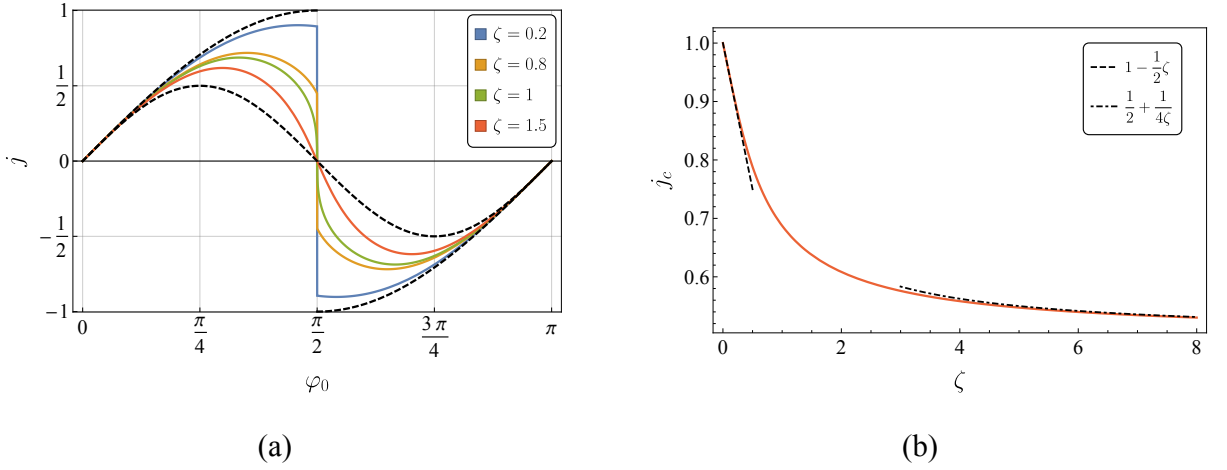


Рис. 5: (a) Зависимость безразмерного тока  $j$  от разности фаз  $2\varphi_0$  при различных значениях  $\zeta$ , (b) зависимость критического тока  $j_c$  от  $\zeta$ . Чёрные линии – асимптотические значения при  $\zeta \gg 1$  (штрих-пунктирная линия),  $\zeta \ll 1$  (пунктирная линия).

гом инстантонного решения (индекс  $i$ ). Упрощая формулу для активационного барьера при помощи уравнения Гинзбурга-Ландау (16), явный вид барьера можно записать как

$$\delta F \equiv F_{\text{sn}}^{(i)} - F_{\text{sn}}^{(u)} = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \frac{\Delta_0^4}{T_c^2 \delta} \left( \frac{3}{2} (f_u^4 - f_i^4) + (\zeta - 1) (f_u^2 - f_i^2) \right) \quad (21)$$

Для нахождения зависимости барьера свободной энергии от тока удобно переписать уравнение (16), избавившись от  $\varphi_0$  при помощи (17):

$$-f + f^3 + \zeta \left( f - \sqrt{1 - \frac{j^2}{f^2}} \right) = 0. \quad (22)$$

После чего в пределе  $1 - j/j_c \ll 1$  становится возможным разложить уравнение вблизи критического тока, в окрестности которого  $f^2 = f_c^2 \pm f_1^2$ , где  $f_c$  – значение  $f$  при  $j = j_c$ . Величина  $f_1^2$  находится из приближенного решения уравнения Гинзбурга-Ландау (22) и даётся выражением

$$f_1^2 \approx \sqrt{\frac{2j_c^2 \zeta^2 (1 - j/j_c)}{(\zeta - 1)^2 + 6(f_c^2 + \zeta - 1)f_c^2}}. \quad (23)$$

Чтобы понять, какое решение отвечает  $f_i$ , а какое  $f_u$  полезно ввести эффективный потенциал по аналогии с [11], проинтегрировав (22) по  $f$ . Тогда эффективный потенциал принимает следующий вид:

$$U_{\text{eff}} = \frac{f^4}{4} + \frac{(\zeta - 1)f^2}{2} - \sqrt{f^2 - j^2} \zeta + j \zeta \operatorname{arccot} \frac{j}{\sqrt{f^2 - j^2}}. \quad (24)$$

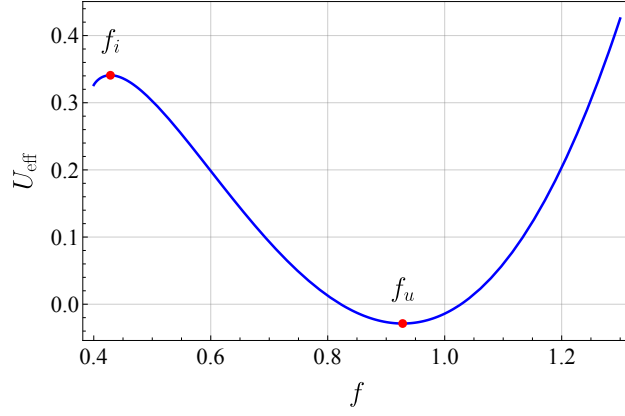


Рис. 6: Зависимость эффективного потенциала  $U_{\text{eff}}(f)$  от безразмерного параметра порядка  $f$  для  $j = 0.4$ ,  $\zeta = 5$ .

Из поведения эффективного потенциала, изображённого на Рис. 6 можно понять, что минимуму отвечает больший корень ( $f_u^2 = f_s^2 + f_1^2$ ), а максимуму меньший ( $f_i^2 = f_s^2 - f_1^2$ ).

После чего, подставляя решения (23) в выражение для активационного барьера (21), можно получить, что при токе, близком к критическому темп проскальзываний фазы имеет вид

$$\log \Gamma = \frac{\delta F}{T} \approx \frac{7\zeta(3)}{4\pi^2} \frac{\Delta_0^4}{T_c^3 \delta} (3f_c^2 - 1 + \zeta) f_1^2 \propto (1 - j/j_c)^{1/2}. \quad (25)$$

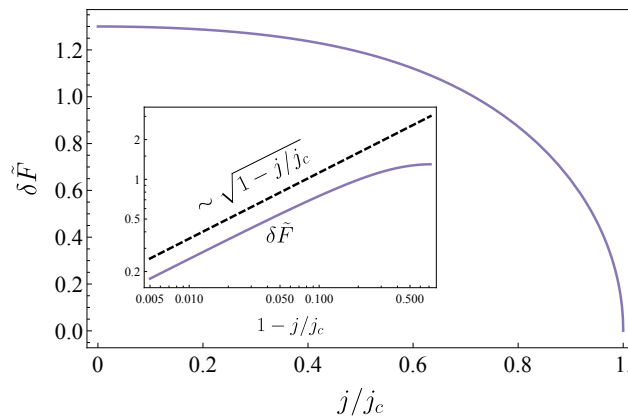


Рис. 7: Зависимость обезразмеренного барьера свободной энергии  $\delta\tilde{F} = \left(\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2} \frac{\Delta_0^4}{T_c^3 \delta}\right)^{-1} \cdot \delta F$  от безразмерного тока  $j$  для SIS'IS контакта. На врезке в двойном логарифмическом масштабе сплошной линией обозначена  $\delta\tilde{F}$ , пунктирной линией изображена сдвинутая зависимость  $\sqrt{1 - j/j_c}$ . Здесь  $\zeta = 0.8$ .

В промежуточном случае зависимость барьера  $\delta F$  от тока  $j$  получается из численного поиска корней уравнения (22) и изображена на Рис. 7.

### 3 Проскальзывание фазы в реальном времени в нульмерном SINIS контакте

В этом разделе будет изучено тепловое проскальзывание фазы в нульмерном SINIS-контакте. В терминах келдышевской NL $\sigma$ M будет получено среднеполевое значение спектральных углов  $\theta^{R(A)}$ , после чего будет произведено усреднение по флуктуациям квазичастиц, написаны и решены уравнения на классическую и квантовую компоненты фазы  $\varphi$ , что соответствует поиску оптимальной флуктуации ланжевеновского шума. После в развитом формализме будет найдено решение и соответствующая ему скорость процесса в присутствии микроволнового излучения.

#### 3.1 Модель и решение в седловом приближении

В предыдущем разделе было продемонстрировано, что физические процессы, аналогичные наблюдаемым в одномерных сверхпроводящих проводах, могут происходить и в нульмерных контактах. Более того, все эти эффекты можно свести к эффектам близости с массивными сверхпроводящими контактами, то есть к зависимости полученных результатов от  $\varphi$ . Это значит, что для воспроизведения основных физических результатов достаточно ограничиться лишь наведенной сверхпроводимостью, то есть пренебречь собственной динамикой параметра порядка в нульмерном островке. По этой причине в этом разделе будет рассмотрен контакт, состоящий из двух сверхпроводников с различной фазой параметра порядка, подсоединённых через два изолятора к металлическому островку. Такой SINIS-контакт изображён на Рис. 8.

Для нахождения темпа проскальзываний фазы можно было бы, как и в прошлом разделе, воспользоваться мацубаровским формализмом, однако здесь проскальзывания фазы будут описываться в реальном времени, после чего система будет изучаться вне равновесия. Для описания таких физических процессов оказывается удобным воспользоваться формализмом келдышевской NL $\sigma$ M [33, 4, 16], в котором действие

$$S = \frac{i\pi}{\delta} \text{Tr} \left[ \left( i\varepsilon\tau_3 - \frac{\gamma}{2}(Q_L + Q_R) \right) Q \right] + \frac{C}{e^2} \int dt \dot{\varphi} \dot{\varphi}_q + \frac{1}{e} \int dt J \varphi_q, \quad (26)$$

где  $\delta$  – среднее расстояние между уровнями,  $\gamma$  – обратное время ухода квази-

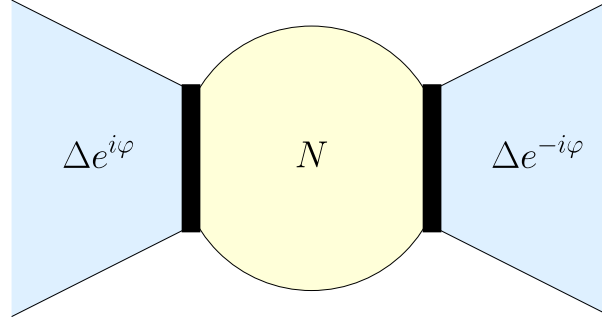


Рис. 8: Нульмерный SINIS контакт. Сверхпроводники являются массивными, то есть эффекты близости считаются незначительными в силу малости  $\gamma$ . Параметры порядка сверхпроводников –  $\Delta e^{\pm i\varphi}$ .

частиц, которое будет полагаться малым,  $e$  – заряд электрона (далее будет использоваться система единиц, в которой  $e = 1$ ), а  $C$  – ёмкость. Последнее слагаемое выступает в роли множителя Лагранжа и фиксирует ток  $J$ , текущий по контакту.  $\tau_i, \sigma_i$  – матрицы Паули в Намбу и келдышевском пространстве. Переменные  $\varphi(t), \varphi_q(t)$  обозначают классическую и квантовую компоненты фазы соответственно, а  $Q_{L,R}$  – функции Грина массивных контактов [5]:

$$Q_{R,L} = \exp [\pm i\tau_3 (\varphi + \frac{1}{2}\varphi_q\sigma_1) / 2] Q_{(0)} \exp [\mp i\tau_3 (\varphi + \frac{1}{2}\varphi_q\sigma_1) / 2] \quad (27a)$$

$$Q_{(0)} = \begin{pmatrix} Q_{(0)}^R & F(Q_{(0)}^R - Q_{(0)}^A) \\ 0 & Q_{(0)}^A \end{pmatrix}_K, \quad (27b)$$

$$Q_{(0)}^R(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos \theta_0^R(\varepsilon) & \sin \theta_0^R(\varepsilon) \\ \sin \theta_0^R(\varepsilon) & -\cos \theta_0^R(\varepsilon) \end{pmatrix}_N, \quad (27c)$$

$$Q_{(0)}^A(\varepsilon) = - \begin{pmatrix} \cos \theta_0^A(\varepsilon) & \sin \theta_0^A(\varepsilon) \\ \sin \theta_0^A(\varepsilon) & -\cos \theta_0^A(\varepsilon) \end{pmatrix}_N, \quad (27d)$$

где индексы К, N обозначают матрицы в келдышевском и Намбу пространстве соответственно. Спектральные углы  $\theta_0^R, \theta_0^A$  определяются своими стандартными значениями из теории БКШ с вещественным параметром порядка  $\Delta$ :

$$\tan \theta_0^{R(A)}(\varepsilon) = -\frac{\Delta}{i(\varepsilon \pm i0)}, \quad (28)$$

а функция распределения  $F(\varepsilon) = \tanh \frac{\varepsilon}{2T}$  является тепловой с температурой  $T$ .

Для того, чтобы найти среднеполевое значение  $Q$  (функцию Грина) удобно

воспользоваться параметризацией, аналогичной  $Q_{(0)}$ :

$$Q = \begin{pmatrix} Q^R & F(Q^R - Q^A) \\ 0 & Q^A \end{pmatrix}_K, \quad (29a)$$

$$Q^{R(A)} = \pm \left( \tau_3 \cos \theta^{R(A)}(\varepsilon) + \tau_1 \sin \theta^{R(A)}(\varepsilon) \right). \quad (29b)$$

Такая параметризация подразумевает, что найденное в седловом приближении решение будет стационарным, то есть значение фазовых переменных будет постоянным:  $\varphi(t) = \varphi_0$  и  $\varphi_q(t) = 0$ , а функция распределения внутри островка будет совпадать с функцией распределения в контактах.

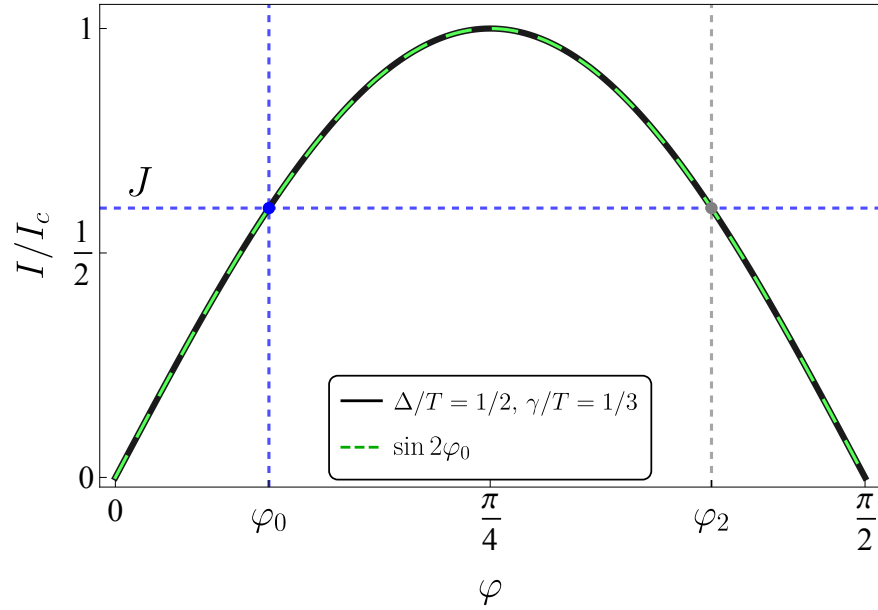


Рис. 9: Ток-фазовое соотношение для SINIS-контакта при достаточно большой температуре (чёрный). Зелёным изображено стандартное ток-фазовое соотношение  $I_c \sin 2\varphi_0$ . Синим изображено седловое значение  $\varphi_0$ , около которого далее будет произведено разложение.  $\varphi_2$  – второе стационарное решение. Переход между  $\varphi_0$  и  $\varphi_2$  соответствует проскальзыванию фазы.

В указанной параметризации седловое значение спектральных углов

$$\tan \theta^{R(A)}(\varepsilon) = \frac{\pm \gamma \sin \theta_0^{R(A)}(\varepsilon) \cos \varphi_0}{-i\varepsilon \pm \gamma \cos \theta_0^{R(A)}(\varepsilon)}, \quad (30a)$$

фаза  $\varphi_0$  же должна находиться из уравнения  $\delta S / \delta \varphi_q |_{\varphi_q=0} = 0$ , которое отвечает фиксации тока:

$$J = \frac{\gamma \sin \varphi_0}{\delta} \int d\varepsilon \operatorname{Im}[\sin \theta^R(\varepsilon) \sin \theta_0^R(\varepsilon)] F(\varepsilon). \quad (30b)$$

Стоит отметить, что выражением (30b) определяется ток-фазовое соотношение для рассматриваемого контакта (см. Рис. 9), которое в пределе температуры достаточно близкой к критической мало отличается от случая SIS'IS контакта (19) в том же пределе  $1 - T/T_c \ll 1$ , которому соответствует  $\zeta \gg 1$ .

## 3.2 Влияние динамики фазы на квазичастицы

При переходе между двумя решениями уравнения (30b), то есть между значениями фазы, отвечающими одному и тому же току, у переменных  $\varphi, \varphi_q$  появляется некоторая медленная зависимость от времени. Тогда для изучения эволюции фазы во времени необходимо учесть влияние, оказываемое этой динамикой, на спектральные углы  $\theta^{R(A)}$ , которые определяются куперонами  $c_{\epsilon, \epsilon'}^{R(A)}$ ,  $c_{\epsilon, \epsilon'}^{R(A)*}$ , и на функцию распределения  $F$ , которая определяется диффузонами  $d_{\epsilon, \epsilon'}, w_{\epsilon, \epsilon'}$  и их квантовыми аналогами  $\bar{d}_{\epsilon, \epsilon'}, \bar{w}_{\epsilon, \epsilon'}$ . Вклад диффузонов и куперонов в действие можно учесть при помощи разложения  $Q$ -матрицы по флуктуациям [4]:

$$Q = U_F^{-1} U^{-1} \sigma_3 \tau_3 (1 + W + W^2/2 + \dots) U U_F, \quad (31a)$$

$$W = \begin{pmatrix} c^R \tau_+ - c^{R*} \tau_- & d\tau_0 + w\tau_3 \\ -\bar{d}\tau_0 - \bar{w}\tau_3 & c^A \tau_+ - c^{A*} \tau_- \end{pmatrix}_K, \quad (31b)$$

$$U_F = \begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_K, \quad (31c)$$

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\tau_2 \theta^R/2} & 0 \\ 0 & e^{i\tau_2 \theta^A/2} \end{pmatrix}_K, \quad (31d)$$

$$\mathcal{U} = U U_F. \quad (31e)$$

После указанного разложения действие принимает вид:

$$S = S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)}, \quad (32a)$$

$$S^{(0)} = C \int dt \dot{\varphi} \dot{\varphi}_q + \int dt \varphi_q(t) (J - I_1(t) - I_2(t) \cos \varphi(t) - I_3(t) \sin \varphi(t)) - \int dt_1 dt_2 \varphi_q(t_1) \mathcal{D}(t_1 - t_2) \varphi_q(t_2), \quad (32b)$$

$$S^{(1)} = -\frac{i\pi\gamma}{2\delta} \text{Tr} \left[ (Q_L - Q_L^{(0)} + Q_R - Q_R^{(0)}) \mathcal{U}^{-1} \sigma_3 \tau_3 W \mathcal{U} \right], \quad (32c)$$

$$S^{(2)} = \frac{i\pi}{2\delta} \text{tr} \left[ c_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{A*} \mathcal{E}_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{AA} c_{\epsilon_2, \epsilon_1}^A + c_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{R*} \mathcal{E}_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{RR} c_{\epsilon_2, \epsilon_1}^R + \right. \\ \left. + 2\bar{d}_{\epsilon_1, \epsilon_2} \mathcal{E}_{\epsilon_2, \epsilon_1}^{RA} d_{\epsilon_2, \epsilon_1} + 2\bar{w}_{\epsilon_1, \epsilon_2} \mathcal{E}_{\epsilon_2, \epsilon_1}^{RA} w_{\epsilon_2, \epsilon_1} \right], \quad (32d)$$

где под  $\text{tr} [\cdot]$  подразумевается взятие следа по энергетическим индексам  $\epsilon_{1,2}$ .

Первый вклад  $S^{(0)}$  является значением действия при зависящих от времени фазах, но с  $Q$ -матрицей, определяемой уравнением (30a) с постоянным значением  $\varphi_0$ , которое определяется как меньший корень уравнения (30b). В этом вкладе, аналогично работе [12], введены выражения для токов, зависящих от времени через малую  $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}(t)/2$ ,

$$I_1(t) = -\frac{\pi\gamma}{\delta} \int (d\varepsilon) \left( (F(\varepsilon - \tilde{\omega}) - F(\varepsilon)) \text{Re} [\cos \theta_0^R(\varepsilon)] \text{Re} [\cos \theta^R(\varepsilon - \tilde{\omega})] - \right. \\ \left. - (F(\varepsilon + \tilde{\omega}) - F(\varepsilon)) \text{Re} [\cos \theta_0^R(\varepsilon)] \text{Re} [\cos \theta^R(\varepsilon + \tilde{\omega})] \right), \quad (33a)$$

$$I_2(t) = -\frac{\pi\gamma}{\delta} \int (d\varepsilon) \left( (F(\varepsilon - \tilde{\omega}) - F(\varepsilon)) \text{Im} [\sin \theta_0^R(\varepsilon)] \text{Im} [\sin \theta^R(\varepsilon - \tilde{\omega})] - \right. \\ \left. (F(\varepsilon + \tilde{\omega}) - F(\varepsilon)) \text{Im} [\sin \theta_0^R(\varepsilon)] \text{Im} [\sin \theta^R(\varepsilon + \tilde{\omega})] \right), \quad (33b)$$

$$I_3(t) = \frac{\pi\gamma}{\delta} \int (d\varepsilon) \left( F(\varepsilon) \text{Re} [\sin \theta^R(\varepsilon - \tilde{\omega}) + \sin \theta^R(\varepsilon + \tilde{\omega})] \text{Im} [\sin \theta_0^R(\varepsilon)] + \right. \\ \left. + \text{Im} [F(\varepsilon - \tilde{\omega}) \sin \theta^R(\varepsilon - \tilde{\omega}) + F(\varepsilon + \tilde{\omega}) \sin \theta^R(\varepsilon + \tilde{\omega})] \text{Re} [\sin \theta_0^R(\varepsilon)] \right). \quad (33c)$$

Обратим внимание, что при  $\tilde{\omega} = 0$ ,  $I_1(t) = I_2(t) = 0$ , а  $I_3(t)$  воспроизводит правую часть уравнения (30b), восстанавливая ток-фазовое соотношение.

Важно отметить, что вклад в ток  $I_2(t)$  содержит в себе так называемый  $\cos \varphi$ -член, исследованный в работах [13, 9, 25]. Его наличие видно, например, из асимптотического выражения для вклада  $I_2(t)$  (80b), которое начинается с линейного вклада по  $\tilde{\omega}$ , то есть соответствует производной фазы, а также пропорционально  $\cos \varphi_0$ , из-за чего итоговый вклад в действие будет иметь вид  $\propto (1 + \cos 2\varphi_0) \dot{\varphi}(t)$ . Однако при соотношении между параметрами, рассматриваемом далее, этот вклад даёт малые поправки по сравнению с  $I_1(t)$  (см. Приложение А).

Корреляторы для квантовой компоненты в том же адиабатическом приближении по малой  $\tilde{\omega}$  имеют вид  $\delta$ -функции и записываются как

$$\mathcal{D}(t - t') = \delta(t - t') (\mathcal{D}_1(t) + \mathcal{D}_2(t) \cos \varphi) \quad (34a)$$



$$\mathcal{D}_1(t) = \frac{i\pi\gamma}{4\delta} \int (d\varepsilon) (\operatorname{Re} [\cos \theta^R(\varepsilon - \omega)] \operatorname{Re} [\cos \theta_0^R(\varepsilon)] (1 - F(\varepsilon - \omega)F(\varepsilon)) + \\ + \operatorname{Re} [\cos \theta^R(\varepsilon + \omega)] \operatorname{Re} [\cos \theta_0^R(\varepsilon)] (1 - F(\varepsilon + \omega)F(\varepsilon))) \quad (34b)$$

$$\mathcal{D}_2(t) = \frac{i\pi\gamma}{4\delta} \int (d\varepsilon) (\operatorname{Im}[\sin \theta^R(\varepsilon - \omega)] \operatorname{Im}[\sin \theta_0^R(\varepsilon)] (1 - F(\varepsilon - \omega)F(\varepsilon)) + \\ + \operatorname{Im}[\sin \theta^R(\varepsilon + \omega)] \operatorname{Im}[\sin \theta_0^R(\varepsilon)] (1 - F(\varepsilon + \omega)F(\varepsilon))) \quad (34c)$$

Вклад в действие  $S^{(1)}$  описывает отклик квазичастичной подсистемы на отклонение фазы от стационарного значения. Здесь  $Q_{L,R}$  определяются из (27a) с  $\varphi = \varphi(t)$  и  $\varphi_q \neq 0$ , а  $Q_{R,L}^{(0)} = e^{\pm i\tau_3\varphi_0/2} Q_{(0)} e^{\mp i\tau_3\varphi_0/2}$ , где  $Q_{(0)}$  определяется из уравнения (27b).

Третий вклад в действие  $S^{(2)}$  представляет из себя сумму голых диффузных и куперонных вкладов, которые определяются следующими выражениями:

$$\mathcal{E}_\epsilon^{R(A)} = \mp i\epsilon \cos \theta^{R(A)}(\epsilon) + \\ + \gamma \left( \cos \theta^{R(A)}(\epsilon) \cos \theta_0^{R(A)}(\epsilon) + \cos \varphi_0 \sin \theta^{R(A)}(\epsilon) \sin \theta_0^{R(A)}(\epsilon) \right), \quad (35a)$$

где

$$\mathcal{E}_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{\alpha_1, \alpha_2} = \mathcal{E}_{\epsilon_1}^{\alpha_1} + \mathcal{E}_{\epsilon_2}^{\alpha_2}. \quad (35b)$$

Можно заметить, что пользуясь явными седловыми выражениями для спектральных углов (30a), выражение для  $\mathcal{E}_\epsilon^{R(A)}$  можно переписать как

$$\mathcal{E}_\epsilon^{R(A)} = \gamma \cos \varphi_0 \frac{\sin \theta_0^{R(A)}(\epsilon)}{\sin \theta^{R(A)}(\epsilon)}, \quad (35c)$$

при этом

$$\theta^R(\epsilon) = \theta^{R^*}(-\epsilon) = -\theta^A(-\epsilon); \quad \mathcal{E}_\epsilon^R = \mathcal{E}_{-\epsilon}^A. \quad (36)$$

### 3.2.1 Динамические уравнения на фазу

В пределе  $T \gg \Delta$ ,  $\gamma \gg \tau_{\text{in}}^{-1}$ , где  $\tau_{\text{in}}^{-1}$  – обратное время неупругих столкновений, которое будет пренебрежимо малым в большинстве вычислений, динамические уравнения на фазовые переменные принимают достаточно простой (для полных уравнений см. Приложение A) вид. В пренебрежении ёмкостным

членом уравнения описывают чисто диссипативную динамику и записываются как

$$\mu\dot{\varphi} - J + I_3 \sin \varphi - \frac{\delta S^{(1)}}{\delta \varphi_q(t)} = 2\mathcal{D}\varphi_q, \quad (37a)$$

$$\mu\dot{\varphi}_q - \varphi_q I_3 \cos \varphi + \frac{\delta S^{(1)}}{\delta \varphi(t)} = 0, \quad (37b)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} (I_1(t) + I_2(t) \cos \varphi + I_3(t) \sin \varphi(t)) \Big|_{\tilde{\omega}=0}, \quad (37c)$$

где  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(t)|_{\tilde{\omega}=0}$  и  $I_3 = I_3(t)|_{\tilde{\omega}=0}$ . Правая часть первого уравнения имеет смысл классического ланжевеновского шума, второе уравнение же определяет оптимальную флуктуацию этого шума, которая должна быть реализована в системе, чтобы частица смогла преодолеть потенциальный барьер между различными решениями ток-фазового соотношения (30b) (см. Приложение C).

Для того, чтобы эти уравнения обладали нужными физическими свойствами, в частности, имели бы единственное стационарное решение  $\varphi_0$  при  $J$ , равном критическому току, необходимо учитывать подстройку квазичастичных степеней свободы под динамику фазы. Эта динамика ожидается медленной, так как переход между решениями (30b) имеет является инстантоном. Фактически, отсутствие этой подстройки в уравнениях (37) с  $S^{(1)} = 0$  является следствием того, что изначальное седло для квазичастичных степеней свободы отвечало стационарному седловому значению фазы  $\varphi(t) = \varphi_0$ , в то время как искомое значение фазы соответствует другой седловой траектории, которая описывает переход от постоянного значения  $\varphi_0$  к большему корню  $\varphi_2$  ток-фазового соотношения (30b), которое в свою очередь уже имеет медленную зависимость от времени. Для учёта этой временной зависимости необходимо проинтегрировать по квазичастичным степеням свободы  $W$ , что эквивалентно сдвигу изначального седлового приближения для квазичастиц.

После усреднения по  $W$ , в пределе  $1 - J/I_c \ll 1$  классическую компоненту фазы можно представить в виде  $\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_i(t)$ , где  $\varphi_i(t) \sim \sqrt{1 - J/I_c} \ll 1$  – изменение фазы за время перехода между различными корнями уравнения (30b). После этого действие, которое в силу причинности не содержит вкладов без квантовой компоненты  $\varphi_q$ , можно разложить вплоть до членов  $\varphi_i^2 \varphi_q, \varphi_q^2$ . Такое разложение эквивалентно переходу от потенциала стиральной доски к квадратно-кубической параболе в RSJ модели [17, 14], после чего часть дей-

ствия (32), содержащая квазичастичные степени свободы  $S_{\text{coup}} = S^{(1)} + S^{(2)}$  записывается как

$$\begin{aligned}
S_{\text{coup}} = & -\frac{i\pi\gamma^2}{2\delta} \int dt_{1,2,3}(\mathbf{d}\omega)(\mathbf{d}\Omega) \left( e^{i\omega(t_1-t_2)} \left[ \varphi_i(t_2)\varphi_q(t_1)K^{(1)}(\omega) \sin^2 \varphi_0 + \right. \right. \\
& + \varphi_q(t_1)\varphi_q(t_2)K^{(2)}(\omega) \sin^2 \varphi_0 + (2\varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2)\varphi_q(t_1) + \varphi_i^2(t_2)\varphi_q(t_1)) \times \\
& \times \left. \left( \frac{1}{8}K^{(1)}(\omega) \sin 2\varphi_0 - 2K^{(3)}(\omega) \sin \varphi_0 \right) \right] 2\pi\delta(\Omega)\delta(t_3) + \varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2)\varphi_q(t_3) \times \\
& \times \left. \left( K^{(4a)}(\omega, \Omega)e^{i(t_3\omega-t_1\Omega+t_2(\Omega-\omega))} + K^{(4s)}(\omega, \Omega)e^{i(t_1\Omega-t_2\omega-t_3(\Omega-\omega))} \right) \sin \varphi_0 \right) \quad (38)
\end{aligned}$$

Здесь каждое ядро имеет два вклада:  $K^{(\alpha)}(\omega) = K_c^{(\alpha)}(\omega) + K_d^{(\alpha)}(\omega)$ , где индекс  $c$  отвечает куперонному вкладу, а  $d$  – диффузному, то есть вкладам со знаменателями  $\mathcal{E}_{\epsilon, \epsilon'}^{RR}$  и  $\mathcal{E}_{\epsilon, \epsilon'}^{RA}$  соответственно. Полное выражение для ядер дано в Приложении В.2. Дальнейший же анализ удобно проводить отдельно для куперонных и диффузных вкладов.

### 3.2.2 Подстройка спектральных углов

В явном виде интегралы в действии взять не представляется возможным, поэтому для получения локальных уравнений на фазу необходимо воспользоваться тем, что ожидаемые характерные времена в уравнении будут большими из-за близости тока к критическому. Это позволяет разложить ядра  $K_c^{(\alpha)}$  по малым  $\omega$ . Для того, чтобы сохранить структуру уравнений, нужно разложить  $K_c^{(1)}(\omega)$  до первого порядка по  $\omega$ , тогда нулевой порядок будет приводить к изменению структуры эффективного потенциала, а первый порядок будет порождать производную по времени, а значит изменять коэффициент  $\mu$ . К аналогичным изменениям потенциала приведёт и разложение  $K_c^{(3)}(\omega)$  до нулевого порядка по  $\omega$ , в то время как разложение  $K_c^{(3)}(\omega) \approx K_c^{(3)}(0)$  приводит к изменению коэффициента  $\mathcal{D}$ .

В таком приближении, вклад в действие от куперонов  $S_{\text{coup}}^{(c)}$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
S_{\text{coup}}^{(c)} = & -\frac{i\pi\gamma^2}{2\delta} \int dt \left[ \left( \varphi_i(t)K_c^{(1)}(0) \sin^2 \varphi_0 + \varphi_i^2(t)K_c^{(3\Sigma)} \sin 2\varphi_0 \right) \varphi_q(t) - \right. \\
& \left. -i\dot{\varphi}_i(t)\varphi_q(t) \partial_\omega K_c^{(1)}(\omega) \Big|_{\omega=0} \sin^2 \varphi_0 + \varphi_q^2(t)K^{(2)}(0) \sin^2 \varphi_0 \right], \quad (39)
\end{aligned}$$

где введено обозначение

$$K_c^{(3\Sigma)} = \frac{3}{8}K_c^{(1)}(0) + \left( K_c^{(4a)}(0,0) + K_c^{(4s)}(0,0) - 6K_c^{(3)}(0) \right) \frac{\sin \varphi_0}{\sin 2\varphi_0}. \quad (40)$$

Первый вклад в действие удобно переписать в терминах  $I_3$  и её производных по фазе, чтобы был явно виден механизм подстройки барьера. Тогда, пользуясь явным выражением (33с), производные можно переписать как

$$\partial_{\varphi_0} I_3(0) = \frac{2i\pi\gamma}{\delta} \tan \varphi_0 \int (d\varepsilon) \sin \theta^R(\varepsilon) \sin \theta_0^R(\varepsilon) \cos^2 \theta^R(\varepsilon) F(\varepsilon), \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\varphi_0}^2 I_3(0) = & \cot \varphi_0 \partial_{\varphi_0} I_3(0) + \\ & + \frac{6\pi\gamma}{\delta} i \tan^2 \varphi_0 \int (d\varepsilon) F(\varepsilon) \sin^3 \theta^R(\varepsilon) \cos^2 \theta^R(\varepsilon) \sin \theta_0^R(\varepsilon). \end{aligned} \quad (41b)$$

Сравнивая выражения для производных с значением ядер  $K_c^{(1)}(0)$ ,  $K_c^{(3\Sigma)}$ , выписанных в (86), можно заметить, что

$$K_c^{(1)}(0) = -\frac{2i\delta}{\pi\gamma^2 \sin \varphi_0} \partial_{\varphi_0} I_3(0). \quad (42a)$$

$$K_c^{(3\Sigma)} \approx -\frac{3i\delta}{2\pi\gamma^2 \cos \varphi_0} \partial_{\varphi_0}^2 I_3(0), \quad (42b)$$

где знак приближенного равенства отвечает пренебрежению вторым слагаемым в (41b), так как квадратичное разложение по флуктуациям  $W$  недостаточно точное, чтобы воспроизвести вклады со старшей степенью скорости ухода  $\gamma$ .

При учёте старших степеней разложения ядер  $K$  «одеваются» коэффициенты в уравнении (37), для учёта этих эффектов, необходимо удержать линейный вклад по  $\omega$  в  $K_c^{(1)}(\omega)$  и постоянный вклад в  $K_c^{(2)}(\omega)$ . Эти вклады имеют вид:

$$\partial_{\omega} K_c^{(1)}(\omega) \Big|_{\omega=0} = 2 \int (d\varepsilon) \frac{\cos^2 \theta^R(\varepsilon) \sin^2 \theta_0^R(\varepsilon)}{\mathcal{E}^R(\varepsilon)} F'(\varepsilon) \quad (43a)$$

$$K_c^{(2)}(0) = - \int (d\varepsilon) \frac{\cos^2 \theta^R(\varepsilon) \sin^2 \theta_0^R(\varepsilon)}{\mathcal{E}^R(\varepsilon)} (1 - F^2(\varepsilon)) \quad (43b)$$

Стоит отметить, что при тепловых функциях распределения  $F$  выполнено условие детального баланса:  $1 - F^2(\varepsilon) = 2TF'(\varepsilon)$ . Таким образом, для фермиевских функций распределения  $F$  изменения коэффициентов  $\mu$  и  $\mathcal{D}$ , вызванные куперонными степенями свободы, согласованы:

$$\partial_{\omega} K_c^{(1)}(\omega) \Big|_{\omega=0} = -\frac{1}{T} K_c^{(2)}(0) \quad (44)$$

### 3.2.3 Подстройка функции распределения

При усреднении диффузионных вкладов существенную роль, как и в [31], играет время неупругих столкновений  $\tau_{\text{in}}$ . Это связано с тем, что знаменатели выражений (85) содержат  $\mathcal{E}_{\varepsilon-\omega/2}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon+\omega/2}^A$ , написанные без учёта неупругих взаимодействий. Эта сумма при  $\omega = 0$  обращается в нуль в целой полосе энергий, что отображено на Рис. 10(b). Наличие нулевой области связано с тем, что при  $\tau_{\text{in}}^{-1} = 0$  у андреевских состояний, изображённых на Рис. 10(a), нет никакого механизма ухода, из-за чего они проводят в системе бесконечно большое время.

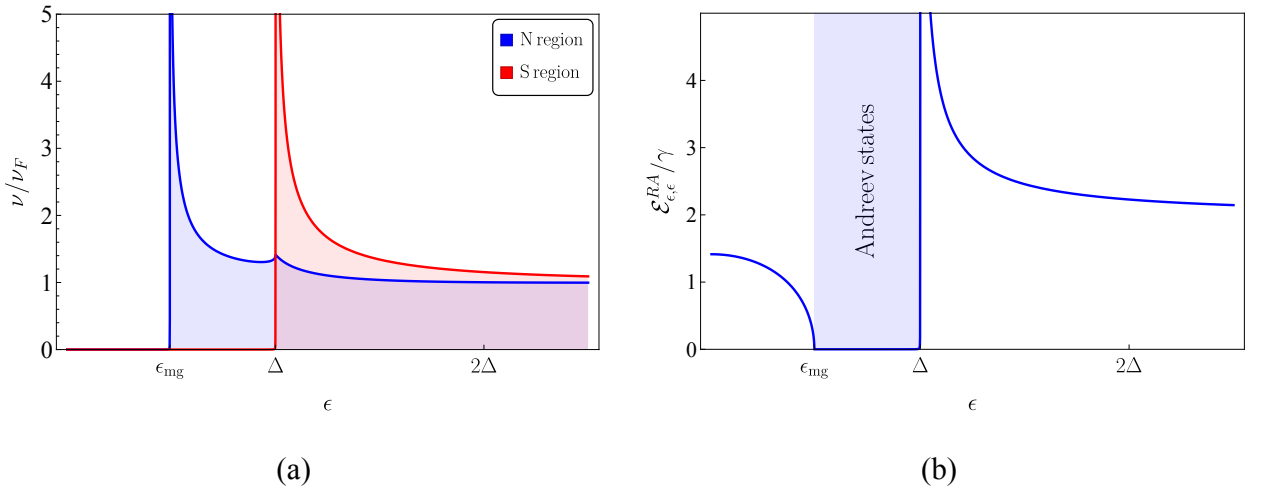


Рис. 10: (a) Плотность состояний  $\nu = \nu_F \text{Re} [\cos \theta^R]$  в объёмных сверхпроводниках (красный) и в N-области SINIS контакта (синий). Область без перекрытия отвечает андреевским состояниям. (b) Значения диффузионного знаменателя  $\mathcal{E}_{\epsilon,\epsilon}^{RA}$  при нулевых частотах при  $\tau_{\text{in}}^{-1} = 0$ .  $\epsilon_{\text{mg}}$  – энергия минищели

Простейший способ учесть релаксацию андреевских состояний заключается в использовании  $\tau$ -приближения [33, 31]: замене энергии  $\varepsilon \mapsto \varepsilon \pm \tau_{\text{in}}^{-1}/2$ , где  $\tau_{\text{in}}$  – феноменологически введенное время неупругих столкновений, знак «+» выбирается для запаздывающих функций, а для опережающих – «-». После учёта неупругих столкновений, в пределе  $\omega \ll \tau_{\text{in}}^{-1}$ , можно вычислить асимптотические значения ядер  $K_d^{(\alpha)}$ . После анализа выражений (85) оказывается, что  $K_d^{(1)}(0) = K_d^{(3)}(0) = K_d^{(4a,s)}(0,0) = 0$ , что следует из того факта, что потенциальный барьер определяется равновесными конфигурациями квазичастиц, то есть определяется только спектральными углами  $\theta^{R(A)}$ , изменение ко-

торых связано с куперонами. Однако, подстройка коэффициентов  $\mu$ ,  $\mathcal{D}$  оказывается достаточно сильной и определяется значениями интегралов

$$\partial_\omega K_d^{(1)}(\omega) \Big|_{\omega=0} = - \int (d\varepsilon) \frac{\sin^2 \frac{\theta^R(\varepsilon)+\theta^A(\varepsilon)}{2} (\sin \theta_0^R(\varepsilon) - \sin \theta_0^A(\varepsilon))^2}{\mathcal{E}_\varepsilon^R + \mathcal{E}_\varepsilon^A} F'(\varepsilon), \quad (45a)$$

$$K_d^{(2)}(0) = \frac{1}{2} \int (d\varepsilon) \frac{\sin^2 \frac{\theta^R(\varepsilon)+\theta^A(\varepsilon)}{2} (\sin \theta_0^R(\varepsilon) - \sin \theta_0^A(\varepsilon))^2}{\mathcal{E}_\varepsilon^R + \mathcal{E}_\varepsilon^A} (1 - F^2(\varepsilon)). \quad (45b)$$

Между этими выражениями в случае тепловых функций распределения также выполняется соотношение, аналогичное (44):

$$\partial_\omega K_d^{(1)}(\omega) \Big|_{\omega=0} = -\frac{1}{T} K_d^{(2)}(0). \quad (46)$$

### 3.3 Полные уравнения для фазы

После описанных в разделах 3.2.2, 3.2.3 интегрирований по квазичастичным степеням свободы, уравнения (37) на фазовые переменные  $\varphi_i(t) = \varphi(t) - \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  – меньшее решение ток-фазового соотношения (30b), и  $\varphi_q(t)$  принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} \dot{\varphi}_i + \varphi_i (I_3(0) \cos \varphi_0 + \partial_{\varphi_0} I_3(0) \sin \varphi_0) - \\ - \frac{1}{2} \varphi_i^2 \sin \varphi_0 (I_3(0) - 3\partial_{\varphi_0}^2 I_3(0)) = -2\tilde{\mathcal{D}} \varphi_q, \end{aligned} \quad (47a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} \dot{\varphi}_q - \varphi_q (I_3(0) \cos \varphi_0 + \partial_{\varphi_0} I_3(0) \sin \varphi_0) + \\ + \varphi_i \varphi_q \sin \varphi_0 (I_3(0) - 3\partial_{\varphi_0}^2 I_3(0)) = 0, \end{aligned} \quad (47b)$$

где введены «одетые» значения коэффициентов  $\mu$ ,  $\mathcal{D}$

$$\tilde{\mu} = \mu + \frac{\pi\gamma^2}{2\delta} \partial_\omega K^{(1)}(\omega) \Big|_{\omega=0} \sin^2 \varphi_0, \quad (48a)$$

$$\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} + \frac{i\pi\gamma^2}{2\delta} K^{(2)}(0) \sin^2 \varphi_0. \quad (48b)$$

Эти уравнения существенно упрощаются в пределе температуры, близкой к критической, то есть  $T \gg \Delta, \gamma$ , для которого можно воспользоваться асимптотическими выражениями (80) и получить:

$$\mu = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \mathcal{D} = -\frac{i\gamma}{\delta} T. \quad (49)$$

Можно заметить, что здесь выполнено соотношение  $\mu = -iT\mathcal{D}$ . После чего, пользуясь (44,48), можно получить, что и для перенормированных коэффициентов это соотношение остаётся верным, то есть  $\tilde{\mu} = -iT\tilde{\mathcal{D}}$ .

Значение коэффициента  $\tilde{\mu}$  устанавливается из приближённых асимптотик интегралов (45):

$$\partial_{\omega} K_c^{(1)}(\omega) \Big|_{\omega=0} = \frac{\Delta^2}{8T^3}, \quad (50a)$$

$$\partial_{\omega} K_d^{(1)}(\omega) \Big|_{\omega=0} = \frac{\tau_{\text{in}} \Delta^2}{\gamma T} \frac{\cos \varphi_0}{1 + \cos \varphi_0}. \quad (50b)$$

В указанном пределе вклад в эффективную проводимость  $\tilde{\mu}$  от куперонных степеней свободы (50a) меньше вклада, приходящего от диффузионных степеней свободы (50b). Подставляя эти выражения в (48a), видим, что вклад члена (50a) в перенормировку  $\mu$  оказывается мал по параметру  $\Delta^2 \gamma / T^3 \ll 1$ , и им можно пренебречь. Оставляя только вклад члена (50b), получаем для перенормированного коэффициента  $\tilde{\mu}$ :

$$\tilde{\mu} = \mu \left( 1 + \frac{\pi \Delta^2 \tau_{\text{in}} \cos \varphi_0 \sin^2 \varphi_0}{2T} \right). \quad (51)$$

Ток-фазовое соотношение (30b) в описанных выше приближения принимает простой вид  $J = I_c \sin 2\varphi_0$ , где  $I_c$  определяется из соотношения  $I_3 \approx 2I_c \cos \varphi_0$ , то есть

$$I_c = \frac{2\pi\gamma T}{\delta} \sum_{n>0} \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \omega_n^2}} \frac{\gamma \Delta}{\omega_n (\gamma + \sqrt{\Delta^2 + \omega_n^2})} \approx \frac{7\zeta(3)}{4\pi^2} \frac{\gamma^2 \Delta^2}{T^2 \delta}. \quad (52)$$

Более того, при стандартном ток-фазовом соотношении равенство (42b) является точным, а  $\cos 2\varphi_0 = \sqrt{1 - j^2}$ , где  $j = J/I_c$  – безразмерный ток. В интересующем пределе  $1 - j \ll 1$  значение фазы  $\varphi_0 \approx \pi/4$ .

В результате, выражение для перенормированной проводимости (51) принимает вид

$$\tilde{\mu} = \mu \left( 1 + C \cdot \frac{\tau_{\text{in}}}{\tau_{\text{GL}}} \right), \quad (53)$$

где мы использовали определение времени Гинзбурга-Ландау (15) и ввели коэффициент

$$C = \frac{\pi^4}{28\zeta(3)} \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \approx 1.2 \quad (54)$$

Таким образом, при учёте подстройки квазичастиц под медленную динамику фазы в эффективной проводимости  $\tilde{\mu}$  появляется новый вклад, определяющийся отношением большого времени релаксации андреевских состояний и времени Гинзбурга-Ландау. Это слагаемое связано с процессами аналогичными дебаевскому механизму поглощения [31]. В зависимости от близости к  $T_c$  полученная добавка может быть как малой, так и большой. Наиболее интересный случай реализуется не слишком близко к критической температуре, когда  $T_c - T \gg 1/\tau_{\text{in}}$ . В этом пределе перенормировка  $\mu$  за счет медленной релаксации андреевских состояний оказывается большой.

### 3.4 Оптимальная флуктуация

Используя полученные в предыдущем разделе значения для коэффициентов, уравнения, определяющие инстантонное значение фазы, то есть оптимальную флуктуацию, можно записать в следующей форме:

$$\tilde{\mu}\dot{\varphi}_i(t) + 2I_c\varphi_i(t) \cos 2\varphi_0 - 2I_c\varphi_i^2(t) \sin 2\varphi_0 + 2\tilde{D}\varphi_q(t) = 0, \quad (55a)$$

$$\tilde{\mu}\dot{\varphi}_q(t) - 2I_c\varphi_q(t) \cos 2\varphi_0 + 4I_c\varphi_q(t)\varphi_i(t) \sin 2\varphi_0 = 0. \quad (55b)$$

Для решения этих уравнений удобным оказывается вернуться к действию (32), которое после усреднений в использованном приближении имеет вид

$$S = \int dt \left[ (-2I_c\varphi_i(t) \cos 2\varphi_0 + 2I_c\varphi_i^2(t) \sin 2\varphi_0) \varphi_q(t) - \tilde{D}\varphi_q^2 + \tilde{\mu}\dot{\varphi}_q\varphi \right]. \quad (56)$$

Это действие эквивалентно задаче классической гамильтоновой механики с координатой  $\varphi_i(t)$  и эффективным импульсом  $p(t) = i\mu\varphi_q(t)$ , который, впрочем, имеет флуктуационную природу [10]. Пользуясь введёнными обозначениями, гамильтонову задачу можно сформулировать как

$$S = i \int dt (p\dot{\varphi}_i - H(p, \varphi_i)), \quad (57a)$$

$$H(p, \varphi_i) = \frac{1}{\tilde{\mu}} \left( 2I_c (-\varphi_i \cos 2\varphi_0 + \varphi_i^2 \sin 2\varphi_0) p + ip^2 \frac{\tilde{D}}{\tilde{\mu}} \right). \quad (57b)$$

Искомому переходу соответствует значение гамильтониана  $H(p, q) = 0$  [10]. Из явного вида следует  $H$  следует, что у этого уравнения есть тривиальное решение  $\varphi_q(t) = p = 0$ , которое соответствует «классическому» значению фазы,



одно из которых есть  $\varphi(t) = \varphi_0$ . Нетривиальное же решение, отвечающее переходу между различными значениями фазы, описывается импульсом

$$p = -\frac{2I_c}{i\tilde{D}/\tilde{\mu}} (-\varphi_i \cos 2\varphi_0 + \varphi_i^2 \sin 2\varphi_0) = \frac{\tilde{\mu}^2}{i\tilde{D}} \dot{\varphi}_i, \quad (58)$$

подстановка которого в уравнения движения (55) сводит систему к обычному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H}{\partial p} = -2\frac{I_c}{\mu} \sin 2\varphi_0 (-\varphi_i \cot 2\varphi_0 + \varphi_i^2) \quad (59)$$

Его решение, изображённое на Рис. 11, содержит единственный свободный параметр  $t_0$ , определяющий момент перехода, и для разности фаз  $2\varphi_0 < \pi/2$  имеет вид:

$$\varphi_i(t) = \frac{\cot 2\varphi_0}{1 + \exp[-(t - t_0)/\tau_{\text{inst}}]}. \quad (60)$$

где  $\tau_{\text{inst}}$  — длительность инстантона, характеризующая время, требуемое для перехода от минимума к максимуму потенциала, дается выражением

$$\tau_{\text{inst}} = \frac{\tilde{\mu}}{2I_c \cos 2\varphi_0} = \frac{\tilde{\mu}}{2I_c \sqrt{1 - j^2}}. \quad (61)$$

Наиболее интересная ситуация возникает в пределе  $\tau_{\text{in}} \gg \tau_{\text{GL}}$ , когда эффективная проводимость системы  $\tilde{\mu}$  определяется релаксацией андреевских состояний, см. уравнение (53). В этом пределе размер инстантона

$$\tau_{\text{inst}} \approx \frac{\pi^3}{14\zeta(3)(1 + \sqrt{2})} \frac{T}{\gamma} \frac{\tau_{\text{in}}}{\sqrt{1 - j^2}} \sim \frac{T}{\gamma} \frac{\tau_{\text{in}}}{\sqrt{1 - j^2}}. \quad (62)$$

Найденное характерное время инстантона  $\tau_{\text{inst}}$  значительно превышает время неупругой релаксации андреевских состояний  $\tau_{\text{in}}$ , как за счет малости отношения  $T/\gamma$ , так и за счет близости к критическому току,  $j \rightarrow 1$ . Неравенство  $\tau_{\text{inst}} \gg \tau_{\text{in}}$  гарантирует справедливость проведенного в действии (38) разложения по малой частоте  $\omega \sim 1/\tau_{\text{inst}}$ .

Отметим также, что несмотря на то, что вид уравнения совпадает с RSJ моделью, в пределе  $\tau_{\text{in}} \gg \tau_{\text{GL}}$  получающееся в задаче характерное время  $\tau_{\text{inst}}$  существенно превышает время перехода в RSJ модели, где оно определяется сопротивлением контакта  $R$ :  $\tau_{\text{RSJ}} = 1/(I_c R \cos \varphi_0)$ .

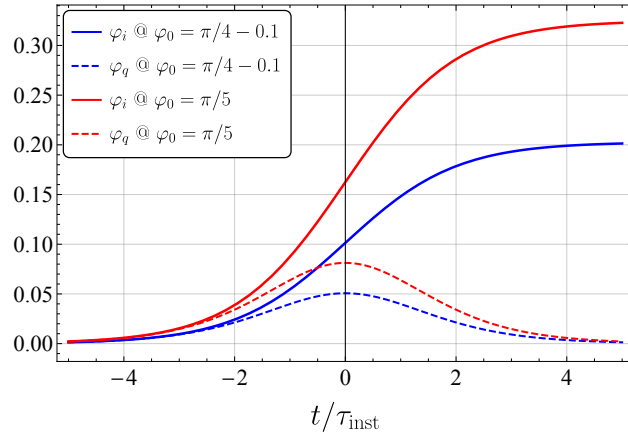


Рис. 11: Зависимость классической фазы  $\varphi_i(t)$  и её квантового аналога  $|\varphi_q(t)|/(\tilde{\mu}^2/i\tilde{D})$  в случае инстантонной конфигурации при различных значениях тока  $J = I_c \sin 2\varphi_0$

Изменения величин  $\varphi_i, \varphi_q$  на инстантонном решении имеют порядок

$$\varphi_i \sim \cot 2\varphi_0 = \frac{\sqrt{1-j^2}}{j} \ll 1, \quad (63a)$$

$$\varphi_q \sim p/\tilde{\mu} \sim \frac{I_c}{T} \cos 2\varphi_0 \cot 2\varphi_0 \sim \frac{I_c}{T} (1-j^2) \ll 1, \quad (63b)$$

что оказывается малым в силу близости тока к критическому, оправдывая все приближения, сделанные в разделах 3.2.1 – 3.2.3.

Вычисляя при помощи найденного решения (60) темп тепловых проскальзываний фазы, находим

$$\log \Gamma = iS = -\frac{2I_c \cos 2\varphi_0 \cot^2 2\varphi_0}{T \cdot 6} = -\frac{I_c (1-j^2)^{3/2}}{T \cdot 3j^2}. \quad (64)$$

Как и следовало ожидать, температура в знаменателе появляется как независимое от неравновесных свойств системы отношение  $i\tilde{D}/\tilde{\mu}$ . Из этого в частности следует, что равновесная скорость проскальзываний фазы определяется термодинамическими свойствами контакта и не зависит от того, как протекает процесс.

### 3.5 Тепловое проскальзывание фазы под действием микроволнового излучения

Как было показано в предыдущем разделе, когда островок находится в равновесии с массивными сверхпроводящими берегами, скорость проскальзывания фазы определяется термодинамикой контакта. Однако, если вывести систему из равновесия, вероятность распада станет зависеть от длительности процесса. Одним из способов показать это явно – рассмотреть систему, подверженную микроволновому излучению с частотой  $\omega_0$ .

Для того, чтобы учесть такое излучение, рассмотрим систему, по которой помимо постоянного тока  $J$  течёт ещё и переменный  $J_{ac} \sin \omega_0 t$  [33]. Полагая амплитуду переменного тока  $J_{ac}$  достаточно маленькой, чтобы можно было считать, что этот ток не изменяет седловое приближение (30а), учёт переменного тока сводится к замене  $J \mapsto J + J_{ac} \sin \omega_0 t$  в выражении (32), то есть необходимо заменить вклад в действие  $S^{(0)}$  на  $S_{mw}^{(0)}$ , где

$$S_{mw}^{(0)} = \int dt \varphi_q(t) (J + J_{ac} \sin \omega_0 t - I_1(t) - I_2(t) \cos \varphi(t) - I_3(t) \sin \varphi(t)) - \int dt_1 dt_2 \varphi_q(t_1) \mathcal{D}(t_1 - t_2) \varphi_q(t_2) + C \int dt \dot{\varphi} \dot{\varphi}_q. \quad (65)$$

Эта замена не изменяет процедуру дальнейших усреднений по квазичастичным степеням свободы, а значит единственное, к чему она приводит – к изменению эффективного гамильтониана для оптимальной флуктуации, который в приближениях, описанных в разделе 3.4 имел вид (57b). Гамильтониан в присутствии микроволны записывается как

$$H_{mw} = \frac{1}{\mu} \left[ 2I_c \left( -\varphi_i \cos 2\varphi_0 + \varphi_i^2 \sin 2\varphi_0 + \frac{J_{ac}}{2I_c} \sin \omega_0 t \right) p + \frac{i\tilde{\mathcal{D}}}{\tilde{\mu}} p^2 \right], \quad (66)$$

а уравнения движения модифицируются соответственно

$$2I_c \tau_{inst} \dot{\varphi}_i \cos 2\varphi_0 + 2I_c \cos 2\varphi_0 \varphi_i - 2I_c \varphi_i^2 \sin 2\varphi_0 - 2Tp = J_{ac} \sin \omega_0 t, \quad (67a)$$

$$2I_c \tau_{inst} \dot{p}(t) \cos 2\varphi_0 - 2I_c p(t) \cos 2\varphi_0 + 4I_c \varphi_i(t) p(t) \sin 2\varphi_0 = 0, \quad (67b)$$

где все параметры введены в соответствие с разделом 3.4.

Для решения этих уравнений удобно разделить движение на быструю и медленную динамику:

$$\varphi_i(t) = \phi(t) + \varphi_f(t), \quad p(t) = p_s(t) + p_f(t), \quad (68)$$

где  $p_s(t)$  и  $\phi_s(t)$  – медленные переменные, а  $p_f(t)$  и  $\varphi_f(t)$  – быстрые. Под быстрыми степенями свободы понимается динамика, создаваемая микроволной, то есть  $\langle p(t) \rangle = p_s(t)$ ,  $\langle \varphi_i(t) \rangle = \phi(t)$ , где  $\langle \cdot \rangle$  – усреднение за период осцилляций микроволны. Такое разделение допустимо в силу того, что  $\omega_0 \tau_{\text{inst}} \gg 1$ , то есть характерные масштабы микроволны и инстантонного перехода (60) хорошо отделены друг от друга.

После разделения на быстрые и медленные уравнения, равенства (67) принимают вид

$$\tau_{\text{inst}} \left( \dot{\phi} + \langle \dot{\varphi}_f \rangle \right) = 2y_s + 2\langle y_f \rangle - \phi - \langle \varphi_f \rangle + \tan 2\varphi_0 \phi^2 + 2\langle \phi \rangle \varphi_s \tan 2\varphi_0 + \langle \phi^2 \rangle \tan 2\varphi_0, \quad (69a)$$

$$\tau_{\text{inst}} (\dot{y}_s + \langle \dot{y}_f \rangle) = y_s + \langle y_f \rangle - 2\phi y_s \tan 2\varphi_0 - 2\langle \varphi_f y_f \rangle \tan 2\varphi_0 - 2\langle \varphi_f \rangle y_s \tan 2\varphi_0 - 2\phi \langle y_f \rangle \tan 2\varphi_0, \quad (69b)$$

для медленных степеней свободы, в то время как быстрые степени свободы определяются из уравнений

$$\tau_{\text{inst}} (\dot{\varphi}_f - \langle \dot{\varphi}_f \rangle) = 2(y_f - \langle y_f \rangle) - (\varphi_f - \langle \varphi_f \rangle) + \tan 2\varphi_0 (\varphi_f^2 - \langle \varphi_f^2 \rangle) + 2(\varphi_f - \langle \varphi_f \rangle) \phi \tan 2\varphi_0 + \frac{J_{\text{ac}}}{2I_c \cos 2\varphi_0} \sin \omega t, \quad (70a)$$

$$\tau_{\text{inst}} (\dot{y}_f - \langle \dot{y}_f \rangle) = p_f - \langle p_f \rangle - 2 \tan 2\varphi_0 (\varphi_f y_f - \langle \varphi_f y_f \rangle) - 2y_s (\varphi_f - \langle \varphi_f \rangle) \tan 2\varphi_0 - 2\phi (y_f - \langle y_f \rangle) \tan 2\varphi_0, \quad (70b)$$

где для удобства были введены обозначения  $y_{f,s} = \frac{T}{2I_c \cos 2\varphi_0} p_{f,s}$ .

В таком виде становится возможным решить уравнения на быструю динамику, которые определяют флуктуации, создаваемые микроволной, после чего их можно подставить в духе задачи о маятнике Капицы в уравнения, определяющие медленную динамику (69).

Нелинейные уравнения, определяющие быструю динамику (70) можно решить пертурбативно по параметру  $J_{\text{ac}}/(2I_c \cos 2\varphi_0)$ . В ведущем приближении быстрые флуктуации принимают вид (см. Приложение D):

$$\varphi_f^{(1)} = \frac{1 - 2\phi \tan 2\varphi_0}{(\tau_{\text{inst}} \omega_0)^2 + (1 - 2\phi \tan 2\varphi_0)^2 - 4y_s \tan 2\varphi_0} \sin \omega_0 t - \frac{\tau_{\text{inst}} \omega_0}{(\tau_{\text{inst}} \omega_0)^2 + (1 - 2\phi \tan 2\varphi_0)^2 - 4y_s \tan 2\varphi_0} \cos \omega_0 t, \quad (71a)$$

$$p_f^{(1)} = \frac{2p_s \tan 2\varphi_0}{(\tau_{\text{inst}}\omega_0)^2 + (1 - 2\phi \tan 2\varphi_0)^2 - 4y_s \tan 2\varphi_0} \sin \omega_0 t. \quad (71b)$$

Можно заметить, что наиболее существенным оказывается вклад в  $\varphi_f^{(1)}$ , пропорциональный  $\cos \omega_0 t$ , а остальные оказываются параметрически меньше. Тогда после подстановки быстрых решений в уравнения на медленную динамику и производя разложение по параметру  $\omega_0 \tau_{\text{inst}} \gg 1$ , выражения (69) принимают вид

$$\tau_{\text{inst}} \dot{\phi} = 2y_s - \phi + \phi^2 \tan 2\varphi_0 + \left( \frac{J_{\text{ac}}}{2I_c \cos 2\varphi_0} \right)^2 \frac{\tan 2\varphi_0}{2\tau_{\text{inst}}^2 \omega^2}, \quad (72a)$$

$$\tau_{\text{inst}} \dot{y}_s = y_s - 2\phi y_s. \quad (72b)$$

Эти уравнения можно решить по аналогии с тем, как было получено решение без микроволнового излучения (60), то есть из соображений зануления гамильтониана (66). В таком случае система (72) принимает следующий вид:

$$y_s = \tau_{\text{inst}} \dot{\phi} = - \left( -\phi + \phi^2 \tan 2\varphi_0 + \left( \frac{J_{\text{ac}}}{2I_c \cos 2\varphi_0} \right)^2 \frac{\tan 2\varphi_0}{2\tau_{\text{inst}}^2 \omega^2} \right). \quad (73)$$

Решение этого уравнения на медленную фазу записывается как

$$\phi = \frac{\cot 2\varphi_0}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \lambda^2} \tanh \left( \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{2\tau_{\text{inst}}} (t - t_0) \right) \right] \quad (74)$$

$$\lambda^2 = \left( \frac{J_{\text{ac}}}{2I_c \cos 2\varphi_0} \right)^2 \frac{2 \tan^2 2\varphi_0}{\tau_{\text{inst}}^2 \omega_0^2} \quad (75)$$

Стоит отметить, что при получении явного вида перехода (74) не предполагалась малость параметра  $\lambda$ , то есть единственное условие на этот параметр – инстантонный характер решения, который достигается при  $\lambda < 1$ . Также, как и ожидалось, решение (74) переходит в (60) при  $\lambda = 0$ . Таким образом, главные отличия между решением с микроволновым излучением и без – изменение амплитуды медленного решения, которое вызвано изменением эффективного потенциала в присутствии микроволнового излучения (см. Рис. 12), а также изменение характерных времён перехода.

После нахождения решения можно сосчитать темп проскальзываний фазы:

$$\begin{aligned} \log \Gamma(\omega_0) = iS &= -\frac{2I_c \cos 2\varphi_0}{T} \int dt y_s \dot{\phi} = \\ &= \log \Gamma(0) \left( 1 - \frac{1}{2\tau_{\text{inst}}^2 \omega_0^2} \left( \frac{I_c J_{\text{ac}}}{I_c^2 - J^2} \right)^2 \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (76)$$

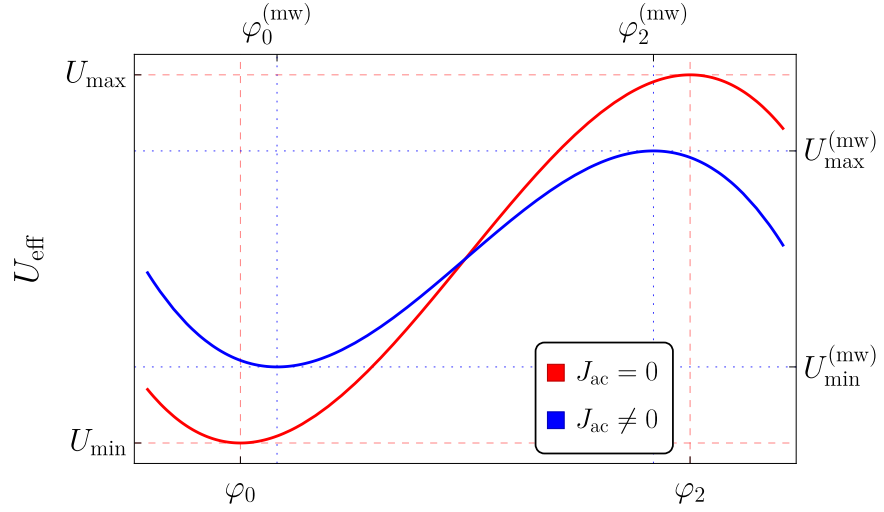


Рис. 12: Эффективный потенциал  $U_{\text{eff}}(\varphi)$  с микроволной (синий) и без неё (красный). Основное отличие – достаточно сильное уменьшение высоты потенциального барьера.  $\varphi_{0(2)}$  – первое (второе) решение уравнения (30b), а верхний индекс  $\varphi_{0,2}^{(\text{mw})}$  – отвечает решениям с микроволновым излучением.

где равновесное значение скорости проскальзывания фазы  $\Gamma(0)$  определено в (64). Стоит заметить, что такое выражение для подынтегрального выражения связано с тем, что на темп процесса не зависит от времени, за которое происходит проскальзывание фазы. Таким образом, на значение скорости проскальзывания фазы влияет лишь высота, зависящая от времени релаксации андreeвских состояний  $\tau_{\text{in}}$ , потенциального барьера, который необходимо преодолеть фазе, чтобы попасть во второе решение уравнения ток-фазового соотношения (30b).

Наконец, можно получить ограничения на параметры для описанного решения. Первое условие – связано с разделением временных масштабов инстантонного перехода и динамики, вызванной микроволной:  $\omega_0 \tau_{\text{in}} \gg 1$ . Второе связано с относительной малостью старших членов в решении уравнения на фазовые переменные (см Приложение D), и в терминах постоянного тока  $j$  и времени неупругих процессов  $\tau_{\text{in}}$  записывается как:

$$\frac{J_{\text{ac}}}{I_c} \ll (\tau_{\text{in}} \omega_0)^2 \frac{T^2 I_c}{\gamma^2 J}, \quad (77a)$$

то есть имеет достаточно широкий диапазон применимости в силу малости  $\gamma$ .

Третье условие связано с тем, что решение уравнения (69) не должно иметь расходимостей, то есть должно описывать переход между двумя различными

значениями фазы. Это условие записывается как

$$\frac{J_{ac}}{I_c} < \tau_{in}\omega_0 \frac{T}{\gamma} \frac{\sqrt{1-j^2}}{j}. \quad (77b)$$

## Заключение

В работе исследован ряд модельных физических систем, аналогичных одномерному сверхпроводящему проводу, в которых происходит тепловое проскальзывание фазы.

Показано, что квазичастичную систему на фоне одномерного инстантона Лангера-Амбегаокара можно рассматривать в пространственно-адиабатическом приближении. В этом пределе локальная плотность состояний качественно похожа на выражение БКШ с локальным значением щели  $\Delta(x)$ . Из вида плотности состояний, можно сделать вывод, что качественно такую систему можно описать при помощи нульмерного контакта, где место с подавленной сверхпроводимостью заменено на нульмерный островок (SIS'IS или SINIS).

Найдена ток-фазовая характеристика для SIS'IS контакта, которая в пределе  $T \rightarrow T_c$  совпадает с формулой Джозефсона, а в пределе малой прозрачности – с формулой Кулика-Омельянчука. Проведена аналогия между одномерным и нульмерным случаями и найдена зависимость барьера свободной энергии от тока  $\delta F \propto \sqrt{1 - j/j_c}$ .

Для нульмерного SINIS-контакта выведены уравнения фазовой динамики с учетом процессов квазичастичной релаксации. Показано, что куперонные и диффузионные степени свободы оказывают принципиально различное влияние на динамику фазы, которая описывается уравнениями, встречающимися в RSJ модели. Куперонный вклад модифицирует вид потенциального барьера, в то время как диффузионная часть определяет характерные времена в системе. Величина диффузионных поправок определяется релаксацией андреевских состояний, характерное время которой дается временем неупругих столкновений  $\tau_{in}$ .

С помощью выведенных уравнений исследован переход между двумя различными решениями ток-фазового соотношения, найден инстантон в реальном времени и вычислена его длительность  $\tau_{inst}$  как функция  $\tau_{in}$ . В то время как равновесная скорость проскальзываний фазы определяется чисто термодинамическими характеристиками системы и не зависит от  $\tau_{inst}$ , такая зависимость проявляется в неравновесных условиях. Вычислена скорость теплового проскальзывания фазы под действием микроволнового излучения. При заданной частоте и амплитуде излучения вероятность проскальзывания фазы уменьшается с ростом неупругого времени  $\tau_{in}$ .



## Список литературы

- [1] Daniil S. Antonenko and Mikhail A. Skvortsov. Quantum decay of the supercurrent and intrinsic capacitance of josephson junctions beyond the tunnel limit. *Phys. Rev. B*, 92:214513, Dec 2015.
- [2] O. V. Astafiev, L. B. Ioffe, S. Kafanov, Yu. A. Pashkin, K. Yu. Arutyunov, D. Shahar, O. Cohen, and J. S. Tsai. Coherent quantum phase slip. *Nature*, 484(7394):355–358, 2012.
- [3] Wolfgang Belzig, Frank K Wilhelm, Christoph Bruder, Gerd Schön, and Andrei D Zaikin. Quasiclassical Green’s function approach to mesoscopic superconductivity. *Superlattices and Microstructures*, 25(5-6):1251–1288, may 1999.
- [4] M. V. Feigel’man, A. I. Larkin, and M. A. Skvortsov. Keldysh action for disordered superconductors. *Phys. Rev. B*, 61:12361–12388, May 2000.
- [5] Artem V. Galaktionov and Andrei D. Zaikin. Fluctuations of the josephson current and electron-electron interactions in superconducting weak links. *Phys. Rev. B*, 82:184520, Nov 2010.
- [6] A. A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov, and E. Il’ichev. The current-phase relation in josephson junctions. *Rev. Mod. Phys.*, 76:411–469, Apr 2004.
- [7] N. Grønbech-Jensen, M. G. Castellano, F. Chiarello, M. Cirillo, C. Cosmelli, L. V. Filippenko, R. Russo, and G. Torrioli. Microwave-induced thermal escape in josephson junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 93:107002, Aug 2004.
- [8] Sun Guozhu, Wang Yiwen, Cao Junyu, Chen Jian, Ji Zhengming, Kang Lin, Xu Weiwei, Yu Yang, Han Siyuan, and Wu Peiheng. Microwave-induced phase escape in a josephson tunnel junction. *Phys. Rev. B*, 77:104531, Mar 2008.
- [9] Richard E. Harris. Cosine and other terms in the josephson tunneling current. *Phys. Rev. B*, 10:84–94, Jul 1974.
- [10] Alex Kamenev. *Field Theory of Non-Equilibrium Systems*. Cambridge University Press, 2011.

- [11] J. S. Langer and Vinay Ambegaokar. Intrinsic resistive transition in narrow superconducting channels. *Phys. Rev.*, 164:498–510, Dec 1967.
- [12] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov. Current damping in superconducting junctions with nonequilibrium electron distribution functions. *JETP*, 60(5):1060–1067, 1984.
- [13] A. I. Larkin and Yu. N. Óvchinnikov. Tunnel effects between superconductors in an alternating field. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 51:1535–1543, November 1966.
- [14] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov. Decay of the supercurrent in tunnel junctions. *Phys. Rev. B*, 28:6281–6285, Dec 1983.
- [15] Anatoly Larkin, Andrei Varlamov, and James Annett. *Theory of Fluctuations in Superconductors*, volume 59. 05 2006.
- [16] Alex Levchenko and Alex Kamenev. Keldysh Ginzburg-Landau action of fluctuating superconductors. *Phys. Rev. B*, 76:094518, Sep 2007.
- [17] D. E. McCumber. Effect of ac Impedance on dc Voltage-Current Characteristics of Superconductor Weak-Link Junctions. *Journal of Applied Physics*, 39(7):3113–3118, June 1968.
- [18] D. E. McCumber and B. I. Halperin. Time scale of intrinsic resistive fluctuations in thin superconducting wires. *Phys. Rev. B*, 1:1054–1070, Feb 1970.
- [19] J. E. Mooij and Yu. V. Nazarov. Superconducting nanowires as quantum phase-slip junctions. *Nature Physics*, 2(3):169–172, 2006.
- [20] Chandra M Natarajan, Michael G Tanner, and Robert H Hadfield. Superconducting nanowire single-photon detectors: physics and applications. *Superconductor Science and Technology*, 25(6):063001, apr 2012.
- [21] Yuli V. Nazarov. Circuit theory of andreev conductance. *Phys. Rev. Lett.*, 73:1420–1423, Sep 1994.
- [22] Yuli V. Nazarov. Novel circuit theory of andreev reflection. *Superlattices and Microstructures*, 25(5):1221–1231, 1999.

- [23] Yuval Oreg, P. W. Brouwer, B. D. Simons, and Alexander Altland. Competition between zero bias anomaly and proximity effect in disordered systems. *Phys. Rev. Lett.*, 82:1269–1272, Feb 1999.
- [24] A. S. Osin and Ya. V. Fominov. Superconducting phases and the second josephson harmonic in tunnel junctions between diffusive superconductors. *Phys. Rev. B*, 104:064514, Aug 2021.
- [25] W. A. Schlup. Adiabatic and pendulum approximations to the retarded Josephson equation. *Journal of Applied Physics*, 49(6):3011–3017, 06 1978.
- [26] A. V. Semenov, P. A. Krutitskii, and I. A. Devyatov. Microscopic theory of phase slip in a narrow dirty superconducting strip. *JETP Letters*, 92(11):762–766, 2010.
- [27] Alex D. Semenov, Gregory N. Gol'tsman, and Alexander A. Korneev. Quantum detection by current carrying superconducting film. *Physica C Superconductivity*, 351(4):349–356, April 2001.
- [28] Alexej D. Semenov, Mariia Sidorova, Mikhail A. Skvortsov, Artem Kuzmin, Konstantin Ilin, and Michael Siegel. Local thermal fluctuations in current-carrying superconducting nanowires. *Phys. Rev. B*, 102:184508, Nov 2020.
- [29] Rais S. Shaikhaidarov, Kyung Ho Kim, Jacob W. Dunstan, Ilya V. Antonov, Sven Linzen, Mario Ziegler, Dmitry S. Golubev, Vladimir N. Antonov, Evgeni V. Il'ichev, and Oleg V. Astafiev. Quantized current steps due to the a.c. coherent quantum phase-slip effect. *Nature*, 608(7921):45–49, 2022.
- [30] M. Smith, A. V. Andreev, M. V. Feigel'man, and B. Z. Spivak. Conductivity of superconductors in the flux flow regime. *Phys. Rev. B*, 102:180507, Nov 2020.
- [31] M. Smith, A. V. Andreev, and B. Z. Spivak. Debye mechanism of giant microwave absorption in superconductors. *Phys. Rev. B*, 101:134508, Apr 2020.
- [32] M. Smith, A. V. Andreev, and B. Z. Spivak. Giant magnetoconductivity in noncentrosymmetric superconductors. *Phys. Rev. B*, 104:L220504, Dec 2021.

- [33] K. S. Tikhonov, M. A. Skvortsov, and T. M. Klapwijk. Superconductivity in the presence of microwaves: Full phase diagram. *Phys. Rev. B*, 97:184516, May 2018.
- [34] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 2004.
- [35] D. Y. Vodolazov. Saddle point states in two-dimensional superconducting films biased near the depairing current. *Phys. Rev. B*, 85:174507, May 2012.
- [36] Colin M. Whisler, Maxim G. Vavilov, and Alex Levchenko. Josephson currents in chaotic quantum dots. *Phys. Rev. B*, 97:224515, Jun 2018.

## А Вывод уравнения на фазовые переменные

Для того, чтобы написать уравнение на классическую и квантовую компоненты фазы, необходимо взять вариационную производную по сопряжённым компонентам фазы. Полученные таким образом уравнения имеют вид:

$$-C\ddot{\varphi} + J - (I_1(t) + I_2(t) \cos \varphi + I_3(t) \sin \varphi) - 2\mathcal{D}(t)\varphi_q = -\frac{\delta S^{(1)}}{\delta \varphi_q(t)} \quad (78a)$$

$$\begin{aligned} -C\ddot{\varphi}_q - \varphi_q (I_3(t) \cos \varphi - I_2(t) \sin \varphi) + \mathcal{D}_2(t) \sin \varphi \varphi_q^2 + 2\varphi_q \dot{\varphi}_q \frac{\partial \mathcal{D}(t)}{\partial \dot{\varphi}} + \\ + \dot{\varphi}_q \left( \frac{\partial I_1(t)}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial I_2(t)}{\partial \dot{\varphi}} \cos \varphi + \frac{\partial I_3(t)}{\partial \dot{\varphi}} \sin \varphi \right) = -\frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta \varphi(t)} \end{aligned} \quad (78b)$$

Можно заметить, что в (78) нет явных членов с первой производной по времени, которые есть в (37). Для их получения нужно воспользоваться тем фактом, что ожидаемая динамика является инстантонной, из-за чего характерные времена в задаче будут малыми, то есть  $\dot{\varphi}$  ожидается малой. Тогда, раскладывая токи  $I_i(t)$  по малой  $\tilde{\omega}$  воспроизводится эффективный коэффициент  $\mu$  трения. Притом из явного выражения для интеграла  $I_3(t)$  следует, что  $\partial_\omega I_3(t) = 0$ .

Также полезно заметить, что при  $T \gg \tilde{\omega}$  всегда остаётся верным соотношение

$$\frac{\mu}{\mathcal{D}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} (I_1(t) + I_2(t) \cos \varphi + I_3(t) \sin \varphi) \Big|_{\tilde{\omega}=0}}{\mathcal{D}_1(t) + \mathcal{D}_2(t) \cos \varphi \Big|_{\tilde{\omega}=0}} = \frac{i}{T}, \quad (79)$$

которое является ключевым для определения эффективной температуры системы.

Для дальнейшего упрощения уравнений необходимо сравнить значения интегралов, которые в приближении  $T \gg \Delta, \gamma \gg \tau_{\text{in}}^{-1}$  имеют следующий вид:

$$I_1(t) = \frac{2\gamma}{\delta} \tilde{\omega}, \quad (80a)$$

$$I_2(t) = \frac{2\gamma^2 \cos \varphi_0}{\delta} F'(\Delta) \mathcal{K} \left( \frac{\gamma}{\Delta}, \varphi_0 \right) \tilde{\omega}, \quad (80b)$$

$$I_3(t) = \frac{4\pi\gamma T}{\delta} \sum_{n>0} \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \omega_n^2}} \frac{\gamma \Delta \cos \varphi_0}{\sqrt{\omega_n^2 \left( \gamma + \sqrt{\Delta^2 + \omega_n^2} \right)^2 + \gamma^2 \Delta^2 \cos^2 \varphi_0}}, \quad (80c)$$

$$\mathcal{D}_1(t) = -\frac{iT\gamma}{\delta}, \quad (80d)$$

$$\mathcal{D}_2(t) = -iT \frac{\gamma^2 \cos \varphi_0}{\delta} F'(\Delta) \mathcal{K} \left( \frac{\gamma}{\Delta}, \varphi_0 \right), \quad (80e)$$

$$\mathcal{K}(y, \varphi) = -\text{Im} \left[ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)(x + iy)^2 + y^2 \cos^2 \varphi}} \right] \approx \begin{cases} \frac{K(-\cot^2 \varphi)}{y |\sin \varphi|}, & y \gg 1 \\ \frac{\pi}{2} + O(y), & y \ll 1 \end{cases}, \quad (80f)$$

при этом следующая степень разложения  $I_3(t)$  по малому  $\tilde{\omega}$  будет пропорциональна  $\tilde{\omega}^2$ . Из полученных выражений видно, что  $\mathcal{D}_1 \gg \mathcal{D}_2$ , а  $I_1(t) \gg I_2(t)$ . После пренебрежения коэффициентами с индексом 2, а также после отбрасывания членов с, как ожидается, малыми членами  $\sim \varphi_q^2$ , уравнения на фазы принимают вид (37).

# В Усреднение по квазичастичным степеням свободы

## В.1 Седловое приближение

Для того, чтобы учесть подстройку квазичастиц под медленную динамику фазы, то есть для интегрирования по гауссовым флуктуациями  $W$ , удобно ввести промежуточное обозначение:

$$\mathcal{M}_{i,j}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \left( \mathcal{U} \left[ Q_L - Q_L^{(0)} + Q_R - Q_R^{(0)} \right] \mathcal{U}^{-1} \right)_{i,j}(\epsilon_1, \epsilon_2), \quad (81)$$

где по всем промежуточным энергиям подразумевается интегрирование. После чего можно записать решения седловых уравнений, получающихся как производные по всем полям, из которых состоит матрица  $W$  в виде:

$$c_{\epsilon_1, \epsilon_2}^R = \gamma \frac{\mathcal{M}_{12}(\epsilon_1, \epsilon_2)}{\mathcal{E}_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{RR}}; \quad c_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{R*} = \gamma \frac{\mathcal{M}_{21}(\epsilon_1, \epsilon_2)}{\mathcal{E}_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{RR}}; \quad (82a)$$

$$c_{\epsilon_1, \epsilon_2}^A = -\gamma \frac{\mathcal{M}_{34}(\epsilon_1, \epsilon_2)}{\mathcal{E}_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{AA}}; \quad c_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{A*} = -\gamma \frac{\mathcal{M}_{43}(\epsilon_1, \epsilon_2)}{\mathcal{E}_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{AA}}; \quad (82b)$$

$$d_{\epsilon_1, \epsilon_2} = \frac{\gamma}{2} \frac{\mathcal{M}_{13}(\epsilon_1, \epsilon_2) - \mathcal{M}_{24}(\epsilon_1, \epsilon_2)}{\mathcal{E}_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{RA}}; \quad (82c)$$

$$\bar{d}_{\epsilon_1, \epsilon_2} = \frac{\gamma}{2} \frac{\mathcal{M}_{31}(\epsilon_1, \epsilon_2) - \mathcal{M}_{42}(\epsilon_1, \epsilon_2)}{\mathcal{E}_{\epsilon_2, \epsilon_1}^{RA}}; \quad (82d)$$

$$w_{\epsilon_1, \epsilon_2} = \frac{\gamma}{2} \frac{\mathcal{M}_{13}(\epsilon_1, \epsilon_2) + \mathcal{M}_{24}(\epsilon_1, \epsilon_2)}{\mathcal{E}_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{RA}}; \quad (82e)$$

$$\bar{w}_{\epsilon_1, \epsilon_2} = \frac{\gamma}{2} \frac{\mathcal{M}_{31}(\epsilon_1, \epsilon_2) + \mathcal{M}_{42}(\epsilon_1, \epsilon_2)}{\mathcal{E}_{\epsilon_2, \epsilon_1}^{RA}}; \quad (82f)$$

Тогда часть действия (32), зависящую от квазичастиц, можно записать как

$$S^{(1)} + S^{(2)} = -\frac{i\pi\gamma^2}{2\delta} \int (d\epsilon_1)(d\epsilon_2) \left( \frac{2\mathcal{M}_{1,2}(\epsilon_1, \epsilon_2)\mathcal{M}_{2,1}(\epsilon_2, \epsilon_1)}{\mathcal{E}_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{RR}} + \frac{2\mathcal{M}_{1,3}(\epsilon_1, \epsilon_2)\mathcal{M}_{3,1}(\epsilon_2, \epsilon_1) + \mathcal{M}_{2,4}(\epsilon_1, \epsilon_2)\mathcal{M}_{4,2}(\epsilon_2, \epsilon_1)}{\mathcal{E}_{\epsilon_1, \epsilon_2}^{RA}} \right), \quad (83)$$

где было использовано, что вследствие свойства (36) запаздывающие (со знаменателем  $\mathcal{E}_{\epsilon, \epsilon'}^{RR}$ ) и опережающие (со знаменателем  $\mathcal{E}_{\epsilon, \epsilon'}^{AA}$ ) куперонные вклады оказываются равны друг другу.

## В.2 Вклады в действие после усреднения

При разложении действия по малым отклонениям от седлового решения  $\varphi_i(t) = \varphi(t) - \varphi_0$ , действие принимает вид (38) с ядрами  $K^{(\alpha)} = K_c^{(\alpha)} + K_d^{(\alpha)}$ .

Куперонная часть ядер  $K^{(\alpha)}$  представляет из себя следующие интегралы:

$$K_c^{(1)}(\omega) = 2 \int (d\varepsilon) \frac{\cos^2 \frac{\theta_+^R + \theta_-^R}{2} (\sin \theta_0^R(\varepsilon_+) + \sin \theta_0^R(\varepsilon_-))^2 F(\varepsilon_+)}{\mathcal{E}_{\varepsilon_+}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R}, \quad (84a)$$

$$K_c^{(2)}(\omega) = -\frac{1}{2} \int (d\varepsilon) \frac{\cos^2 \frac{\theta_+^R + \theta_-^R}{2} (\sin \theta_0^R(\varepsilon_+) + \sin \theta_0^R(\varepsilon_-))^2 (1 - F(\varepsilon_-)F(\varepsilon_+))}{\mathcal{E}_{\varepsilon_+}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R}, \quad (84b)$$

$$K_c^{(3)}(\omega) = \frac{1}{4} \int (d\varepsilon) \frac{\cos^2 \frac{\theta_0^R(\varepsilon_+) - \theta_0^R(\varepsilon_-)}{2} \sin(\theta_+^R + \theta_-^R) \sin(\theta_0^R(\varepsilon_+) + \theta_0^R(\varepsilon_-)) F(\varepsilon_+)}{\mathcal{E}_{\varepsilon_+}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R} \quad (84c)$$

$$K_c^{(4a)}(\omega, \Omega) = \int (d\varepsilon) \cos \frac{\theta_+^R + \theta_-^R}{2} (\sin \theta_0^R(\varepsilon_+) + \sin \theta_0^R(\varepsilon_-)) F(\varepsilon_+) \times \\ \times \left( \frac{\sin \frac{\theta_+^R + \theta_-^R}{2} \cos \theta_0^R(\varepsilon_- + \Omega)}{\mathcal{E}_{\varepsilon_+}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R} + \frac{\cos \frac{\theta_+^R + \theta_-^R}{2} \sin \theta_0^R(\varepsilon_- + \Omega)}{\mathcal{E}_{\varepsilon_+}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R} \cos \varphi_0 \right), \quad (84d)$$

$$K_c^{(4s)}(\omega, \Omega) = \int (d\varepsilon) \cos \frac{\theta_+^R + \theta_-^R}{2} (\sin \theta_0^R(\varepsilon_+) + \sin \theta_0^R(\varepsilon_-)) \times \\ \times \left( \cos \frac{\theta_+^R + \theta_-^R}{2} \cos \varphi_0 \left( \frac{\sin \theta_0^R(\varepsilon_+ - \Omega) + \sin \theta_0^A(\varepsilon_+ - \Omega)}{\mathcal{E}_{\varepsilon_+}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R} F(\varepsilon_+ - \Omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sin \theta_0^R(\varepsilon_- + \Omega) - \sin \theta_0^A(\varepsilon_+ - \Omega)}{\mathcal{E}_{\varepsilon_+}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R} F(\varepsilon_+) \right) + \sin \frac{\theta_+^R + \theta_-^R}{2} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\cos \theta_0^R(\varepsilon_- + \Omega) - \cos \theta_0^A(\varepsilon_+ - \Omega)}{\mathcal{E}_{\varepsilon_+}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R} F(\varepsilon_+) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\cos \theta_0^R(\varepsilon_+ - \Omega) + \cos \theta_0^A(\varepsilon_+ - \Omega)}{\mathcal{E}_{\varepsilon_+}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R} F(\varepsilon_+ - \Omega) \right) \right). \quad (84e)$$

Диффузные вклады  $K_d^{(\alpha)}$  в интегральные ядра действия  $K^{(\alpha)}$  можно запи-



сать как

$$K_d^{(1)}(\omega) = \int (d\varepsilon) \frac{\sin^2 \frac{\theta_-^R + \theta_+^A}{2} (\sin \theta_0^R(\varepsilon_-) - \sin \theta_0^A(\varepsilon_+))^2 (F(\varepsilon_-) - F(\varepsilon_+))}{\mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_+}^A}, \quad (85a)$$

$$K_d^{(2)}(\omega) = \frac{1}{2} \int (d\varepsilon) \frac{\sin^2 \frac{\theta_-^R + \theta_+^A}{2} (\sin \theta_0^R(\varepsilon_-) - \sin \theta_0^A(\varepsilon_+))^2 (1 - F(\varepsilon_-)F(\varepsilon_+))}{\mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_+}^A}, \quad (85b)$$

$$K_d^{(3)}(\omega) = \frac{1}{8} \int (d\varepsilon) (F(\varepsilon_-) - F(\varepsilon_+)) \times \\ \times \frac{\sin^2 \frac{\theta_0^R(\varepsilon_-) - \theta_0^A(\varepsilon_+)}{2} \sin(\theta_0^R(\varepsilon_-) + \theta_0^A(\varepsilon_+)) \sin(\theta_-^R + \theta_+^A)}{\mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_+}^A}, \quad (85c)$$

$$K_d^{(4a)}(\omega, \Omega) = -\frac{1}{4} \int (d\varepsilon) (\sin \theta_0^R(\varepsilon_-) - \sin \theta_0^A(\varepsilon_+)) \left( \frac{\sin(\theta_-^R + \theta_+^A)}{\mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_+}^A} \times \right. \\ \left. (\cos \theta_0^R(\varepsilon_- + \Omega)(F(\varepsilon_- + \Omega) - F(\varepsilon_+)) + \cos \theta_0^A(\varepsilon_- + \Omega) \times \right. \\ \left. \times (F(\varepsilon_- + \Omega) - F(\varepsilon_-))) + 2 \cos \varphi_0 \frac{\sin^2 \frac{\theta_-^R + \theta_+^A}{2}}{\mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_+}^A} (\sin \theta_0^R(\varepsilon_- + \Omega) \times \right. \\ \left. \times (F(\varepsilon_+) - F(\varepsilon_- + \Omega)) + \sin \theta_0^A(\varepsilon_- + \Omega)(F(\varepsilon_-) - F(\varepsilon_- + \Omega))) \right), \quad (85d)$$

$$K_d^{(4s)}(\omega, \Omega) = - \int (d\varepsilon) \sin \frac{\theta_0^R(\varepsilon_- + \Omega) - \theta_0^A(\varepsilon_+ - \Omega)}{2} \times \\ \times (\sin \theta_0^R(\varepsilon_-) - \sin \theta_0^A(\varepsilon_+)) (F(\varepsilon_+) - F(\varepsilon_-)) \sin \frac{\theta_-^R + \theta_+^A}{2} \times \\ \times \left( \frac{\cos \frac{\theta_-^R + \theta_+^A}{2} \sin \frac{\theta_0^R(\varepsilon_- + \Omega) + \theta_0^A(\varepsilon_+ - \Omega)}{2}}{\mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_+}^A} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \frac{\theta_-^R + \theta_+^A}{2} \cos \frac{\theta_0^R(\varepsilon_- + \Omega) + \theta_0^A(\varepsilon_+ - \Omega)}{2}}{\mathcal{E}_{\varepsilon_-}^R + \mathcal{E}_{\varepsilon_+}^A} \cos \varphi_0 \right). \quad (85e)$$

Здесь для краткости использованы обозначения  $\theta_{\pm}^{R(A)} = \theta^{R,A}(\varepsilon \pm \omega/2)$ ,  $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm \omega/2$ .

В приближении малых  $\omega$ , что соответствует большой длительности процесса, важными оказываются лишь значения некоторых комбинаций выписанных выше интегральных ядер на нулевых частотах:

$$K_c^{(1)}(0) = \frac{4}{\gamma \cos \varphi_0} \int (d\varepsilon) \sin \theta^R(\varepsilon) \sin \theta_0^R(\varepsilon) \cos^2 \theta^R(\varepsilon) F(\varepsilon), \quad (86a)$$

$$K_c^{(3\Sigma)} = \frac{3}{\gamma \cos \varphi_0} \int (d\varepsilon) \sin \theta^R(\varepsilon) \sin \theta_0^R(\varepsilon) \cos^2 \theta^R(\varepsilon) F(\varepsilon), \quad (86b)$$

где явное выражение для  $K_c^{(3\Sigma)}$  дано в уравнении (40). Существенными эти вклады оказываются, так как именно они определяют изменение эффективного барьера потенциальной энергии для фазовых переменных.

## С Ланжевенский шум в уравнениях на фазу

Механизм получения явного вклада от ланжевенского шума в уравнениях на фазовые переменные будет одинаковым как для уравнений (37), так и для уже проинтегрированных по квазичастичным степеням свободы (55). Для простоты получение ланжевенского шума будет продемонстрировано на примере уравнений (55):

$$\tilde{\mu}\dot{\varphi}_i(t) + 2I_c\varphi_i(t) \cos 2\varphi_0 - 2I_c\varphi_i^2(t) \sin 2\varphi_0 + 2\tilde{D}\varphi_q(t) = 0, \quad (87a)$$

$$\tilde{\mu}\dot{\varphi}_q(t) - 2I_c\varphi_q(t) \cos 2\varphi_0 + 4I_c\varphi_q(t)\varphi_i(t) \sin 2\varphi_0 = 0. \quad (87b)$$

Этим уравнениям соответствует действие (56):

$$S = \int dt \left[ (-2I_c\varphi_i(t) \cos 2\varphi_0 + 2I_c\varphi_i^2(t) \sin 2\varphi_0) \varphi_q(t) - \tilde{D}\varphi_q^2 + \tilde{\mu}\dot{\varphi}_q \right]. \quad (88)$$

Для того, чтобы свести уравнения (87) к обыкновенным уравнениям RSJ модели с ланжевенским шумом можно произвести преобразование Хаббарда-Стратоновича [16], при помощи которого распарить квантовые компоненты фазы  $\varphi_q(t)$ :

$$\exp \left[ - \int dt |\tilde{D}| \varphi_q^2(t) \right] = \int \mathbf{D}[\xi_\varphi] \exp \left[ - \int dt |\tilde{D}|^{-1} \xi_\varphi^2(t) + 2i\xi_\varphi(t)\varphi_q(t) \right], \quad (89)$$

где была явно учтена фаза коэффициента  $\tilde{D}$ . Полезно заметить, что из такого вклада в действие следует, что коррелятор  $\xi_\varphi$  является вещественным и равен

$$\langle \xi_\varphi(t)\xi_\varphi(t') \rangle = \frac{|\tilde{D}|}{2} \delta(t - t'). \quad (90)$$

Однако, с точки зрения действия, преобразование распаривание добавляет ещё одно неизвестное поле  $\xi_\varphi(t)$  и преобразует действие (88) к виду

$$S_{\text{noise}} = \int dt \left[ (-2I_c\varphi_i(t) \cos 2\varphi_0 + 2I_c\varphi_i^2(t) \sin 2\varphi_0) \varphi_q(t) + \tilde{\mu}\dot{\varphi}_q - \right. \\ \left. - \tilde{D}^{-1}\xi_\varphi^2 + 2\xi_\varphi(t)\varphi_q(t) \right]. \quad (91)$$

Тогда, после взятия вариационных производных по всем полям, получаются соответствующие уравнения:

$$\tilde{\mu}\dot{\varphi}_i(t) + 2I_c\varphi_i(t) \cos 2\varphi_0 - 2I_c\varphi_i^2(t) \sin 2\varphi_0 = -2\tilde{D}^{-1}\xi_\varphi(t), \quad (92a)$$

$$\xi_\varphi(t) = \tilde{D}\varphi_q(t). \quad (92b)$$

$$\tilde{\mu}\dot{\varphi}_q(t) - 2I_c\varphi_q(t) \cos 2\varphi_0 + 4I_c\varphi_q(t)\varphi_i(t) \sin 2\varphi_0 = 0, \quad (92c)$$

Первое из полученных уравнений (92a) – стандартное уравнение RSJ модели с тепловым (см. значение  $\tilde{\mu}$  (51) и свойство  $\tilde{\mu} = -iT\tilde{D}$ )  $\delta$ -коррелированным ланжевеновским шумом (90).

Второе уравнение (92b) – уравнение, задающее связь между ланжевеновским шумом  $\xi_\varphi$  и оптимальной флуктуацией  $\varphi_q$

Третье уравнение (92c) – уравнение, из которого определяется значение оптимальной ланжевеновского шума, необходимой для того, чтобы фаза преодолела потенциальный барьер. При этом в случае, когда такая флуктуация не интересна, решение  $\varphi_q(t) = 0$  возвращает к обычной задаче об RSJ с тепловым шумом.

Стоит также отметить, что, как следует из решения, найденного в разделе 3.4, оптимальная флуктуация ланжевеновского шума  $\xi_\varphi^{\text{opt}}(t)$  будет являться вещественной, так как седловое значение  $\varphi_q$  – чисто мнимая величина.

## D Решение уравнений на быструю динамику

Для пертурбативного решения уравнений (70), удобно представить быстрые переменные  $\varphi_f, y_f$  в виде разложения по малому параметру:

$$\varphi_f = \sum_{n=1} \left( \frac{J_{ac}}{2I_c \cos 2\varphi_0} \right)^n \varphi_f^{(n)}; \quad y_f = \sum_{n=1} \left( \frac{J_{ac}}{2I_c \cos 2\varphi_0} \right)^n y_f^{(n)}, \quad (93)$$

после чего уравнения в главном порядке по параметру  $J_{ac}/(2I_c \cos 2\varphi_0)$  принимают вид

$$\tau_{inst} \dot{\varphi}_f^{(1)} = 2y_f^{(1)} - \varphi_f^{(1)} + 2\phi\varphi_f^{(1)} \tan 2\varphi_0 + \sin \omega_0 t, \quad (94a)$$

$$\tau_{inst} \dot{y}_f^{(1)} = y_f^{(1)} - 2\varphi_f^{(1)} p_s \tan 2\varphi_0 - 2p_f^{(1)} \phi \tan 2\varphi_0. \quad (94b)$$

Эти линеаризованные уравнения допускают аналитическое решение в виде (71). Аналогичным образом можно получить решение и в старших порядках. Для того, чтобы решение по теории возмущений было осмысленным, необходимо, чтобы относительная величина вкладов от старших порядков была малой:

$$\left| \frac{J_{ac}}{2I_c \cos 2\varphi_0} \frac{\overline{p_f^{(2)}}}{\overline{p_f^{(1)}}} \right| \sim \left| \frac{J_{ac}}{2I_c \cos 2\varphi_0} \frac{\overline{\varphi_f^{(2)}}}{\overline{\varphi_f^{(1)}}} \right| = \frac{J_{ac}}{2I_c \cos 2\varphi_0} \frac{\tan 2\varphi_0}{4(\tau_{inst}\omega_0)^2} \ll 1, \quad (95)$$

здесь под средним  $\overline{f}$  подразумевается  $\overline{f} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$ , где  $\langle \cdot \rangle$  – обыкновенное усреднение по периоду микроволны  $2\pi/\omega_0$ .