

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”»

Факультет физики

Шишкин Максим Алексеевич

**ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В КАПЛЯХ
ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ**

Выпускная квалификационная работа
по направлению подготовки 03.03.02 Физика
образовательная программа «Физика»

Научный руководитель:
к.ф. - м.н., доц.
Пикина Елена Сергеевна

Москва
2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1 Стационарная конвекция	7
1.1 Нахождение стационарного поля температуры в отсутствии силы Марангони	8
1.1.1 Общее решение уравнения Лапласа в координатах сплющенного сфероида	9
1.1.2 Нахождение поля температуры	11
1.1.3 Обезразмеривание задачи	12
1.2 Нахождение конвективного течения	12
1.2.1 Нахождение общего стационарного движения	13
1.2.2 Удовлетворение условию Марангони	17
1.2.3 Модифицированная постановка с частичным прилипа- нием на границе	21
1.3 Нахождение первой поправки в поле температуры	25
2 Исследование устойчивости стационарного движения	29
2.1 Полностью свободная поверхность	31
2.2 Случай прилипания на нижней половине	36
2.2.1 Выделение базиса	36
2.2.2 Нахождение критических параметров	37
2.3 Обсуждение результатов	40
Заключение	43
Список использованных источников и литературы	45
Приложение 1 Вытянутый сфероид	48
Приложение 2 Экспериментальная установка	50

Введение

Конвективное движение является наиболее важным среди процессов, возникающих в жидкостях и газах в подавляющем большинстве природных и технологических процессах. Причиной такого движения могут служить как объёмные силы (гравитационные, электромагнитные), так и поверхностные (такие течения принято называть конвекцией Марангони), возникающие из-за градиентов поверхностного натяжения вследствие неоднородности температуры или химического состава (наиболее известный пример — «слёзы вина» [1]).

Объёмные механизмы широко распространены в природе, однако на микромасштабах поверхностные эффекты становятся наиболее существенными [2, 3]. Так Блоком [4], а после и в работе Пирсона [5], было показано, что при объяснении известных опытов Бенара по конвективной неустойчивости горизонтальных слоев жидкости [6] движущим фактором оказывается не столько гравитационный механизм, описанный Рэлеем [7], сколько поверхностный.

Во многом именно прикладные задачи дали толчок для интенсивного изучения конвекции Марангони во второй половине прошлого века. Модельные ситуации, в которых традиционно исследуется структура течения и его устойчивость берут своё начало из конкретных технологических процессов (*жидкий мостик* для выращивания кристаллов и очистке полупроводниковых материалов методом зонной плавки, *коаксиальный слой* для выращивания кристаллов методом Чохральского, *плоский слой* для открытого метода Бриджмена) [8]. Естественным образом по мере развития технологий возрастала необходимость всё более точных моделей для описания конвекции [9].

С появлением возможности проводить эксперименты на МКС [10, 11] и Луне [12] тематика получила дополнительный импульс, т.к. в условиях микрогравитации поверхностные механизмы — единственный источник конвективного тепло- и массопереноса.

Кроме того большой интерес вызван тем, что конвекция является первым примером самоорганизации динамических систем, наблюдаемых экспериментально [13].

Традиционно конвекция разделяется на два типа:

- Температурный градиент перпендикулярен поверхности – задача Марангони о *конвекционной неустойчивости*. В этом случае подогреваемый снизу (со стороны участка прилипания если таковой имеется) слой теряет устойчивость только при превышении некоторого порогового градиента.
- Если же имеется градиент температуры вдоль поверхности, то течение возникает беспороговым образом (при сколь угодно малом градиенте температуры). В таком случае говорят о неустойчивости Марангони или *термокапиллярной неустойчивости*.

Интересным примером такой конвекции может служить система с искривлённой межфазной поверхностью в произвольном (даже вертикальном) градиенте температуры в сферических каплях [14] и пузырях [15], приводящихся в движение из-за конвекции Марангони (см. «парадокс падающего пузырька» у Биркгофа [16]), а так же в сферических каплях на гидрофобной подложке [17].

Многочисленные теоретические [18, 19] и экспериментальные [20] исследования термокапиллярной конвекции, позволили изучить основные физические механизмы, определяющие движения и сценарии их неустойчивости в каждой конкретной конфигурации, определить условия их реализаций. Однако многие важные вопросы остались за рамками традиционных моделей. Это обусловлено идеализацией реального явления или процесса в рамках любой модели.

Целью данной работы является исследование конвекции Марангони в аксиально-симметричных эллипсоидальных каплях (сплюснутых сфероидах) в вертикальном градиенте температуры, что продиктовано двумя факторами:

1. Ни в технологических процессах, ни в природе не бывает бесконечных плоских слоев, а так же достаточно крупные капли уже нельзя рассматривать как сферические из-за действия гравитации [21]. Кроме того, наиболее общим случаем является одновременное наличие градиента температуры как вдоль поверхности, так и поперек. Эллипсоидальное приближение же является наиболее простой гладкой геометрией, до-

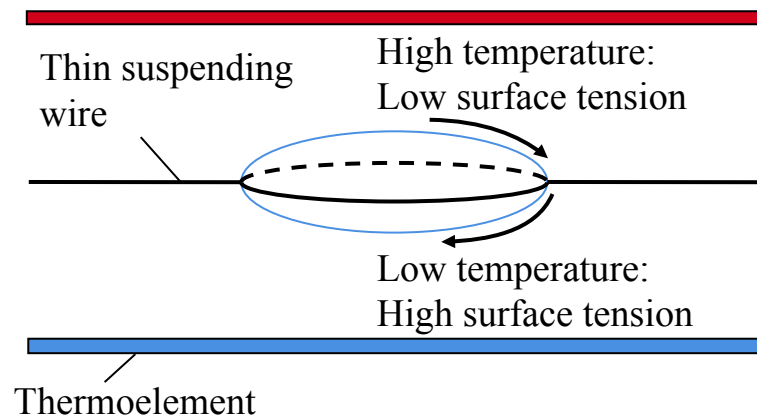


Рис. 1: Схематическое изображение первой постановки. Капля жидкости на небольшом удерживающем кольце (большая часть поверхности свободна). Соответствующая экспериментальная установка приведена в Приложении 2.

пускающей аналитическое рассмотрение как влияния ненулевой кривизны, так и конечности системы.

2. Рассматривая различные соотношения полуосей эллипсоида можно построить кроссовер от задачи Марангони в плоском слое к стационарной конвекции Марангони в сферических каплях.

Данное исследование подразумевает две конкретные экспериментальные схемы, приведенные на рис. (1, 2).

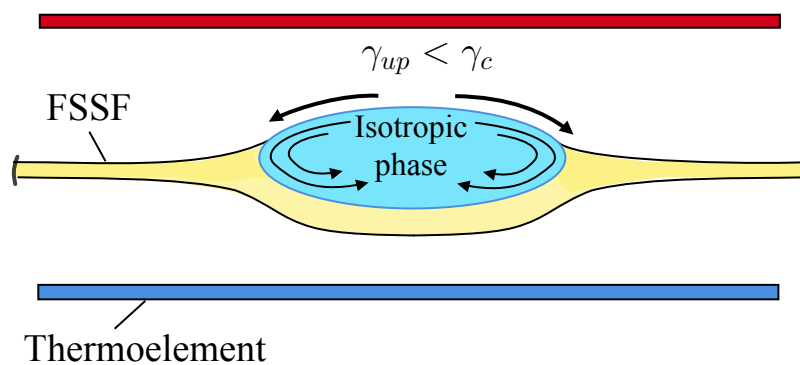


Рис. 2: Схематическое изображение второй постановки. В нагретой выше температуры фазового перехода в свободно подвешенной смектической пленке спонтанно формируются капли изотропной фазы [22]. При нагреве сверху в смектической пленке образуются дефекты, и при достаточном нагреве часть поверхности изотропной фазы может освободиться, после чего сила Марангони на этой части поверхности увлечёт каплю в конвективное движение. Альтернативный сценарий — капля масла, помещенная на поверхность СПСП.

1 Стационарная конвекция

Движение в капле возникает из-за касательной силы на поверхности, вызванной вариацией поверхностного натяжения. Для большинства встречающихся жидкостей зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры линейна в широком диапазоне температур вдали от критической точки

$$\gamma = \gamma_0 - \varsigma (T - \bar{T}),$$

где γ_0 - значение поверхностного натяжения при некоторой средней температуре \bar{T} . Для большинства жидкостей $\varsigma > 0$. Полное описание при произвольных градиентах температуры — сложная нелинейная задача. Однако при небольших градиентах возможно аналитическое решение.

Безразмерным параметром, описывающий интенсивность термокапиллярной конвекции является отношение характерной силы Марангони к силам вязкого трения:

$$Ma = \frac{\varsigma H^2 A}{\chi \eta},$$

где H — высота капли, A — вертикальная компонента градиента температуры в капле, η — динамическая вязкость, а χ - коэффициент температуропроводности жидкости.

Заметим при этом, что влиянием гравитации можно пренебречь в том случае, если число Рэлея (отношение силы Архимеда к вязким силам) много меньше числа Марангони, что накладывает ограничение на размер капель:

$$Ma \gg R = \frac{\rho g \beta A H^4}{\eta \chi} \implies H \ll H_c = \sqrt{\frac{\varsigma}{\rho g \beta}},$$

где g — ускорение свободного падения, β — коэффициент объёмного расширения жидкости.

При небольших градиентах движение медленное, т.ч. конвективным механизмом передачи тепла по сравнению с термодиффузионным¹ можно пренебречь. Найдя таким образом основной мотив поля температуры, можно отдельно решить задачу о нахождении течения в капле с заданной тангенциальной силой, индуцированной вариацией температуры на поверхности.

¹При этом мы не учитываем процессы испарения, что допустимо для небольших градиентов либо для масел с низким давлением насыщенных паров.

Кроме того, мы пренебрегаем термокапиллярной конвекцией в окружающем воздухе в силу малой вязкости, а рэлеевская конвекция не реализуется из-за нагрева сверху.

По мере увеличения градиента температуры в рамках линейного отклика будет увеличиваться локальная скорость жидкости, сама картина течения при этом останется прежней.

Для проверки самосогласованности такого рассмотрения необходимо по теории возмущения найти конвективную поправку в поле температуры, вызванную найденным течением жидкости и убедиться в её малости по сравнению с найденным термодиффузионным мотивом. Именно это требование и определяет границу применимости и малый параметр такого построения:

$$T_1 \ll T_0 \implies \varepsilon = \frac{Ma}{Ma_n} \ll 1,$$

где Ma_n — такое Ma , что вклад в теплоперенос от конвекции становится сравним с термодиффузионным. Эта величина зависит от соотношения полусей капли и отношения теплопроводности капли и воздуха.

Отметим, что для достаточно вязких жидкостей ($\nu/\chi \gg 1$, ν — кинематическая вязкость) число Рейнольдса оказывается мало вплоть до границы применимости описанной выше теории, так что инерционным слагаемым в уравнении Навье-Стокса мы так же пренебрегаем.

1.1 Нахождение стационарного поля температуры в отсутствии силы Марангони

Поле температуры в отсутствии течения описывается уравнением Лапласа $\nabla^2 T_0 = 0$ с граничными условиями:

- непрерывность температуры на границе капли и воздуха $T_{in} = T_{out}$
- непрерывность нормального к границе потока тепла $\varkappa_l \frac{\partial T_{in}}{\partial n} = \varkappa_a \frac{\partial T_{out}}{\partial n}$, где \varkappa_l и \varkappa_a теплопроводности жидкости и воздуха соответственно
- равномерный градиент вдали от капли $T_{out} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \bar{T} + A_{out} z$

Заметим, что эта задача эквивалентна электростатической задаче при замене температуры на потенциал ($T \rightarrow \phi$), а теплопроводности на диэлектри-

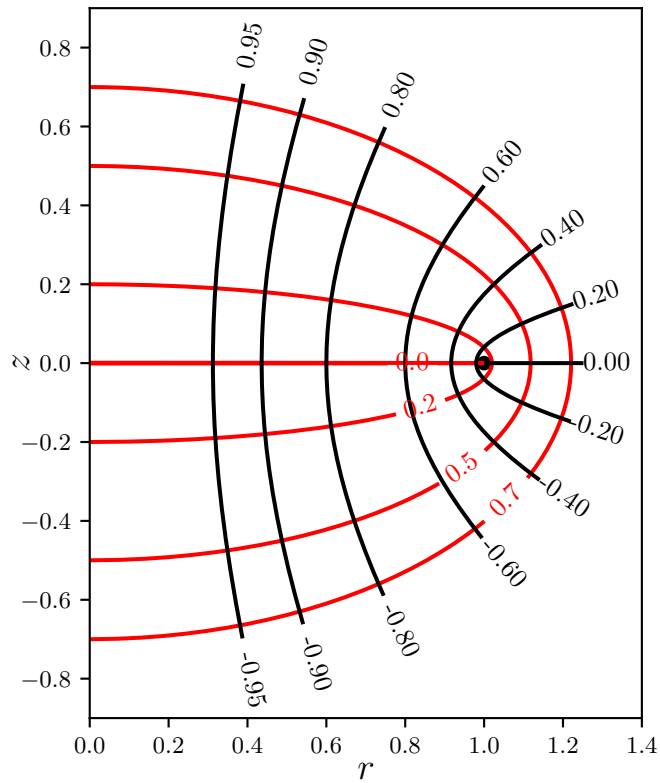


Рис. 3: Координаты сплющенного сфероида в меридиональной плоскости. Линии уровня u (черным) и ξ (красным). Граница капли соответственно задается уравнением $\xi = \xi_0$.

ческую проницаемость ($\varkappa \rightarrow \varepsilon$). Решение же задачи о эллипсоиде вращения, помещенного в однородное электрическое поле хорошо известно [23] — снаружи поле спадает дипольным образом, а внутри устанавливается однородное электрическое поле.

1.1.1 Общее решение уравнения Лапласа в координатах сплющенного сфероида

В работе используются следующие ортогональные координаты:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{1-u^2}\cos\varphi \\ c\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{1-u^2}\sin\varphi \\ c\xi u \end{pmatrix}$$

Масштабные множители суть:

$$h_\xi = c\sqrt{\frac{\xi^2 + u^2}{1 + \xi^2}}, \quad h_u = c\sqrt{\frac{\xi^2 + u^2}{1 - u^2}}, \quad h_\varphi = c\sqrt{1 + \xi^2}\sqrt{1 - u^2}$$

Отметим существенную *особенность* этой системы координат. Различные u, φ при $\xi = 0$ описывают точки на диске ($z = 0, r = c\sqrt{1 - u^2}$), при этом $\mathbf{r}(\xi = 0, u) = \mathbf{r}(\xi = 0, -u)$, т.е. две точки в эллипсоидальных координатах описывают одну и ту же точку в реальном физическом пространстве. Это накладывает дополнительное требование на описание физических полей в координатах (ξ, u) – любое реальное физическое поле должно быть чётной функцией u при $\xi = 0$. Поскольку это требование автоматически распространяется на пространственные производные (∂_z, ∂_r) всех порядков, то в действительности условие на их четность накладывает на само поле и его производные набор довольно громоздких условий при $\xi = 0$. Однако если это поле есть произведение $f_\xi(\xi)f_u(u)$, то требование одно - четности f_ξ и f_u должны совпадать.

Уравнение Лапласа:

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{1}{h_\xi h_u h_\varphi} \left(\partial_\xi \frac{h_u h_\varphi}{h_\xi} \partial_\xi + \partial_u \frac{h_\xi h_\varphi}{h_u} \partial_u + \partial_\varphi \frac{h_\xi h_u}{h_\varphi} \partial_\varphi \right) \phi = \\ &= \frac{c}{h_\xi h_u h_\varphi} (\partial_\xi(1 + \xi^2)\partial_\xi + \partial_u(1 - u^2)\partial_u + (\xi^2 + u^2)\partial_\varphi^2) \phi = 0\end{aligned}$$

может быть решено с использованием разделения переменных $\phi = \Xi(\xi)U(u)$, при этом мы рассматриваем только на зависящие от азимутального угла функции вследствие аксиальной симметрии задачи.

После подстановки получим уравнение на $U(u)$, которое является уравнением Лежандра, а его решение - полиномы Лежандра², т.е. $U(u) = U_n(u) = P_n(u)$, а константа разделения — $n(n + 1)$, тогда на $\Xi(\xi)$ получаем похожее уравнение:

$$\partial_\xi(1 + \xi^2)\partial_\xi \Xi_n - n(n + 1)\Xi_n = 0,$$

первым решением которого являются те же полиномы Лежандра, но от мнимого аргумента $P_n(i\xi)$. Для дальнейшего удобства избавимся от мнимости:

$$\Xi_n^{(1)}(\xi) = \begin{cases} P_n(i\xi) & \text{for even } n, \\ (-i) \cdot P_n(i\xi) & \text{else.} \end{cases}$$

²Второй класс функций не подходит из-за их расходимости при $u = \pm 1$, а мы интересуемся только регулярными решениями.

Второй класс функций, как и первый может быть построен явно с использованием первых двух: $\Xi_0^{(1)} = 1$, $\Xi_0^{(2)} = \arctan(\xi)$, $\Xi_1^{(1)} = \xi$, $\Xi_1^{(2)} = \xi \arctan \xi + 1$ и рекуррентного соотношения:

$$\Xi_{n+1} = (-1)^n \frac{2n+1}{n+1} \xi \Xi_n - \frac{n}{n+1} \Xi_{n-1}. \quad (1.1)$$

Отметим, что второй класс функций так же хорош как и первый с точки зрения непрерывности и т.д., он тем не менее не может быть использован в произведении с соответствующими полиномами Лежандра $P_n(u)$ для описания реальных физических полей в эллипсоидальных координатах, т.к. имеет другую четность, то есть поле в реальном пространстве не будет гладким. Поэтому далее в тексте нигде не используются функции второго рода и индекс (1) опускается.

Для описания температуры в воздухе нам понадобятся функции, стремящиеся к нулю на больших ξ , их мы так же приведем явным образом: $\Xi_0^{(r)} = \frac{\pi}{2} - \text{atan} \xi$, $\Xi_1^{(r)} = \frac{\pi}{2} \xi - \xi \text{atan} \xi - 1$, а следующие могут быть получены по тому же рекуррентному соотношению (1.1).

1.1.2 Нахождение поля температуры

Воспроизведем полученный ранее из аналогии с электростатической задачей результат в удобных координатах с использованием найденных в 1.1.1 функций.

Условие вдали от капли тут же диктует вид решения в воздухе:

$$T_{out} = \bar{T} \cdot \underbrace{1}_{P_0 \Xi_0} + A_{out} c \underbrace{u \xi}_{P_1 \Xi_1} + \sum_n \alpha_n P_n(u) \Xi_n^{(r)}(\xi)$$

Внутри капли:

$$T_{in} = \sum_n \beta_n P_n(u) \Xi_n(\xi)$$

Осталось удовлетворить граничным условиям — непрерывность температуры и теплового потока на границе капли $\xi = \xi_0$, причем поскольку $\{P_n\}$ ортогональные базис, эти равенство должно выполняться для любого u , а значит

и в проекции на любую P_n .

$$n = 0 : \begin{cases} \beta_0 = \bar{T} + \alpha_0 \Xi_0^{(r)}(\xi_0), \\ \varkappa_{lq} \cdot 0 = \varkappa_{air} \cdot 0 + \varkappa_{air} \alpha_0 \partial_\xi \Xi_0^{(r)}(\xi_0) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_0 = 0, \\ \beta_0 = \bar{T} \end{cases}$$

$$n = 1 : \begin{cases} \beta_1 \xi_0 = A_{out} c \xi_0 + \alpha_1 \Xi_1^{(r)}(\xi_0), \\ \varkappa_l \beta_1 = \varkappa_a A_{out} c + \varkappa_a \alpha_1 \partial_\xi \Xi_1^{(r)}(\xi_0) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = A_{out} c \frac{\varkappa-1}{\Xi_1^{(r)}(\xi_0)/\xi_0 - \varkappa \partial_\xi \Xi_1^{(r)}(\xi_0)}, \\ \beta_1 = A_{out} c \varkappa \frac{\Xi_1^{(r)}(\xi_0)/\xi_0 - \partial_\xi \Xi_1^{(r)}(\xi_0)}{\Xi_1^{(r)}(\xi_0)/\xi_0 - \varkappa \partial_\xi \Xi_1^{(r)}(\xi_0)} \equiv A_{in} c \end{cases}$$

Для всех оставшихся $n > 1$ получаем линейную систему на (α_n, β_n) с нулевой правой частью, а значит они равны нулю.

1.1.3 Обезразмеривание задачи

Далее для удобства мы будем использовать безразмерные переменные (ниже везде тильды опускаем):

- температуру отсчитываем от \bar{T} и измеряем в перепадах температуры на высоте капли при механическом равновесии: $T = \tilde{T} A_{in} H$
- все расстояния удобно измерять в $c = \frac{H/2}{\xi_0} = \frac{a}{\sqrt{1+\xi_0^2}}$ (для сильно сплюснутых капель это почти большая полуось)
- скорость жидкости будем измерять в χ/H : $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} \chi/H$
- время обращения в cH/χ : $t = \tilde{t} cH/\chi = \tilde{t} H^2/(2\xi_0 \chi)$

Тогда температура внутри капли в нулевом порядке есть

$$\tilde{T}_0^{in} \equiv T_0^{in} = \frac{\tilde{z}}{2\xi_0} = \frac{u\xi}{2\xi_0}.$$

1.2 Нахождение конвективного течения

В первом порядке по ε возникает сила Марангони $\propto Ma \partial_\tau T_0$, вызывающая движение жидкости.

Поскольку изменение формы вследствие вариации коэффициента поверхностного натяжения можно оценить как относительное изменение радиуса кривизны, которое из закона Лапласа может быть оценено как относительное изменение коэффициента поверхностного натяжения $\frac{\delta R}{R} \sim \frac{\delta \gamma}{\gamma} \ll 1$, что предполагается малой величиной, то изменением формы можно пренебречь.

1.2.1 Нахождение общего стационарного движения

Так как задача обладает аксиальной симметрией, любое течение может быть описано скалярной Стоксовой функцией тока $\psi(u, \xi)$ [24]:

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\xi}}{h_u h_\varphi} \partial_u \psi - \frac{\hat{u}}{h_\xi h_\varphi} \partial_\xi \psi$$

В пренебрежении гравитацией $Ma \gg R \implies H \ll H_c = \sqrt{\frac{\zeta}{\rho g \beta}}$ и нелинейностью $Re \ll 1 \implies \tilde{v} \ll \frac{\nu}{\chi} \sim 50^3$ стационарная функция тока должна удовлетворять уравнению [24]:

$$\hat{E}^4 \psi = 0,$$

где \hat{E}^2 определен как

$$\hat{E}^2 = \frac{1}{\xi^2 + u^2} ((\xi^2 + 1) \partial_\xi^2 + (1 - u^2) \partial_u^2).$$

Некоторые полезные алгебраические утверждения.

Введем некоторый набор операторов и собственных функций.

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \partial_u (1 - u^2) \partial_u, \quad \hat{P} P_n = -n(n+1) P_n \\ \hat{\mathcal{F}} &= (1 - u^2) \partial_u^2, \quad \hat{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n = -n(n+1) \mathcal{F}_n \\ \hat{\Xi} &= \partial_\xi (1 + \xi^2) \partial_\xi, \quad \hat{\Xi} \Xi_n = n(n+1) \Xi_n \\ \hat{\mathcal{X}} &= (1 + \xi^2) \partial_\xi^2, \quad \hat{\mathcal{X}} \mathcal{X}_n = n(n+1) \mathcal{X}_n \end{aligned} \tag{1.2}$$

³Оценка приведена для силиконового масла ПМС 5.

Заметим, что зная P_n и Ξ_n можем получить и вторую пару:

$$\mathcal{F}_n = \frac{P_{n+1} - P_{n-1}}{2n+1} = \int_{-1}^u P_n(u') du' \quad (1.3)$$

$$\mathcal{X}_n = \frac{\Xi_{n+1} - \Xi_{n-1}}{2n+1} \quad (1.4)$$

Важно отметить, что введённый оператор $\hat{\mathcal{F}}$ (с граничным условием $\mathcal{F}(u = \pm 1) = 0$) является самосопряженным и в соответствии с общей теорией задачи Штурма-Лиувилля спектр $\{\mathcal{F}_n\}$ является полным ортогональным на отрезке $u \in [-1, 1]$ набором функций с таким граничным условием.

Поскольку в уравнениях часто встречается умножение на u, u^2, ξ, ξ^2 , то удобно разложить результат такого умножения на какую-либо базисную функцию \mathcal{F}_n по тому же базису, например:

$$u\mathcal{F}_n(u) = \sum_i \|u\|_{i,n} \mathcal{F}_i(u) = \underbrace{\frac{n+2}{2n+1}}_{\|u\|_{n+1,n}} \mathcal{F}_{n+1}(u) + \underbrace{\frac{n-1}{2n+1}}_{\|u\|_{n-1,n}} \mathcal{F}_{n-1}(u)$$

$$\begin{aligned} u^2\mathcal{F}_n &= \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \mathcal{F}_{n+2} + \\ &+ \left[\frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{(n-1)(n+1)}{(2n+1)(2n-1)} \right] \mathcal{F}_n + \\ &+ \frac{(n-1)(n-2)}{(2n+1)(2n-1)} \mathcal{F}_{n-2} \end{aligned}$$

В температуре же фигурируют полиномы Лежандра, поэтому полезно знать:

$$u\partial_u \mathcal{F}_n = uP_n = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}$$

$$\partial_u P_n = \frac{n}{1-u^2} (P_{n-1} - uP_n) = \frac{n}{1-u^2} \frac{n+1}{2n+1} (P_{n-1} - P_{n+1}) = -\frac{n(n+1)}{1-u^2} \mathcal{F}_n$$

Нахождения общей функции тока

Поскольку функция тока равна нулю на оси по определению $\psi(u = \pm 1) = 0$, то она может быть разложена по полному набору \mathcal{F} , т.е. $\forall \psi = \sum_n \mathcal{F}_n(u) g_n(\xi)$.

Оператор E^2 действует на моном $\mathcal{F}_n g_n$ как

$$\hat{E}^2 \mathcal{F}_n g_n = \frac{\hat{\mathcal{X}} + \hat{\mathcal{F}}}{\xi^2 + u^2} (\mathcal{F}_n g_n) = \frac{1}{\xi^2 + u^2} \mathcal{F}_n \underbrace{(\hat{\mathcal{X}} g_n - n(n+1)g_n)}_{G_n}.$$

Заметим, что таким образом ядро оператора \hat{E}^2 есть $\{\mathcal{X}_n \mathcal{F}_n\}$.

Вычислим же действие квадрата этого оператора \hat{E}^4 :

$$\hat{E}^4 \mathcal{F}_n g_n = \hat{E}^2 \frac{1}{u^2 + \xi^2} \mathcal{F}_n G_n = \frac{1}{\xi^2 + u^2} (\hat{\mathcal{X}} + \hat{\mathcal{F}}) \frac{1}{u^2 + \xi^2} \mathcal{F}_n G_n.$$

Для дальнейшего упрощения необходимо «протащить» операторы, вычислив коммутатор

$$\left[\hat{\mathcal{F}}, \frac{1}{\xi^2 + u^2} \right] = (1 - u^2) \left(\frac{-2(\xi^2 + u^2) + 8u^2}{(\xi^2 + u^2)^3} + \frac{-4u}{(\xi^2 + u^2)^2} \partial_u \right),$$

а так же аналогичный $\left[\hat{\mathcal{X}}, \frac{1}{\xi^2 + u^2} \right]$. Тогда искомое выражение есть

$$\begin{aligned} (\xi^2 + u^2)^3 \hat{E}^4 \mathcal{F}_n g_n = & (6(\xi^2 - u^2) + 4 - 4((1 - u^2)u\partial_u + \\ & + (1 + \xi^2)\xi\partial_\xi) + (\xi^2 + u^2)(\hat{\mathcal{X}} - n(n+1))) \mathcal{F}_n G_n. \end{aligned}$$

Чтобы разложить полученное выражение по \mathcal{F}_m необходимо указать, как в этом представлении действует оператор $u(1 - u^2)\partial_u$:

$$\begin{aligned} u(1 - u^2)\partial_u \mathcal{F}_n = & -\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \mathcal{F}_{n+2} + \\ & + \left(-\frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{n(n+1)(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} \right) \mathcal{F}_n + \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n+1)(2n-1)} \mathcal{F}_{n-2}. \end{aligned}$$

Теперь перепишем наконец итоговое выражение:

$$(\xi^2 + u^2)^3 \hat{E}^4 \mathcal{F}_n g_n = \underline{\mathcal{F}_{n+2}} \hat{U} p_n G_n + \underline{\mathcal{F}_n} \hat{S}_n G_n + \underline{\mathcal{F}_{n-2}} \hat{D} w_n G_n, \text{ где}$$

$$\hat{U} p_n = \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+1)(2n+3)} (\hat{\mathcal{X}} - (n-2)(n-1))$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_n &= 6\xi^2 + 4 - 4\xi(1 + \xi^2)\partial_\xi + \xi^2(\hat{\mathcal{X}} - n(n+1)) + \\ &\quad + \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}(\hat{\mathcal{X}} - (n-2)(n-1)) + \\ &\quad + \frac{(n-1)(n+1)}{(2n+1)(2n-1)}(\hat{\mathcal{X}} - (n+2)(n+3)) \\ \hat{D}w_n &= \frac{(n-1)(n-2)}{(2n+1)(2n-1)}(\hat{\mathcal{X}} - (n+2)(n+3))\end{aligned}$$

Таким образом, при действии на моном появляются вклады выше по нумерации \mathcal{F}_{n+2} и ниже \mathcal{F}_{n-2} .

Положим, что $\psi_N^{(p)} = \mathcal{F}_N g_N + \mathcal{F}_{N-2} g_{N-2}$ ($N > 2$). Тогда для обращения в ноль вклада при \mathcal{F}_{N+2} необходимо, чтобы $\hat{U}p_n G_n = 0 \implies G_N \propto \mathcal{X}_{N-2}$. А для \mathcal{F}_N в таком случае получаем условие:

$$-\hat{U}p_{N-2} G_{N-2} = \hat{S}_N \mathcal{X}_{N-2} = \frac{4N(N+1)}{(2N-1)} \mathcal{X}_N,$$

т.е. $(\hat{\mathcal{X}} - (N-4)(N-3))G_{N-2} = -4(2N-3)\mathcal{X}_N \implies G_{N-2} = \text{⁴} - \mathcal{X}_N$. После этого, подставляя полученные G_N, G_{N-2} , можно убедиться, что вклад перед \mathcal{F}_{N-2} равен нулю, а так же $\hat{D}w_{N-2} G_{N-2} = 0$.

Итоговый ответ без учета вклада ядра \hat{E}^2 :

$$\psi_{N>2}^{(p)} = \mathcal{F}_N \mathcal{X}_{N-2} + \mathcal{F}_{N-2} \mathcal{X}_N.$$

Теперь рассмотрим отдельно ситуацию $N < 2$:

$N = 1$: В этом случае $\psi_1^{(p)} = \mathcal{F}_1 g_1$, при этом $\hat{D}w_1 = 0$, а для удовлетворения $\hat{U}p_1 G_1 = 0$ необходимо выполнение $\hat{\mathcal{X}}G_1 = 0$, в то же время $\hat{S}_1 G_1 = 0 \implies G_1 \propto \xi$, $(\hat{\mathcal{X}} - 2)g_1 = \xi$, что дает $g_1 \propto \xi$.

$N = 2$: Теперь $\psi_2^{(p)} = \mathcal{F}_2 g_2$, $\hat{D}w_2 = 0$, $\hat{\mathcal{X}}G_2 = 0$, $\hat{S}_2 G_2 = 0 \implies G_2 \propto 1$, $(\hat{\mathcal{X}} - 3)g_2 = 1$ т.е. $g_2 \propto 1$.

Заметим, что при этом выводе мы нигде не конкретизировали, каким типом Ξ ((1),(2) или (r))(см. раздел 1.1.1) мы пользовались для построения \mathcal{X} , так как каждая из них удовлетворяет требуемым соотношениям(1.2). Таким

⁴Решение однородного уравнения не интересует, т.к. оно просто соответствует «предыдущей» ψ_{N-2}

образом наиболее общий вид⁵ функции тока в координатах сплющенного сфероида представляется линейной комбинацией $\psi_{1,2}^{(p)}$, $\psi_N^{(p)(1,2)}$ и ядра \hat{E}^2 :

$$\begin{aligned} \psi = & c_1 \xi \mathcal{F}_1 + c_2 \mathcal{F}_2 + \\ & + \sum_{N>2} c_N^{(1)} (\mathcal{F}_N \mathcal{X}_{N-2}^{(1)} + \mathcal{F}_{N-2} \mathcal{X}_N^{(1)}) + c_N^{(2)} (\mathcal{F}_N \mathcal{X}_{N-2}^{(2)} + \mathcal{F}_{N-2} \mathcal{X}_N^{(2)}) + \\ & + \sum_{N \geq 1} c_{No}^{(1)} \mathcal{X}_N^{(1)} \mathcal{F}_N + c_{No}^{(2)} \mathcal{X}_N^{(2)} \mathcal{F}_N. \end{aligned}$$

Нас интересуют гладкие решения внутри эллипсоида, поэтому по общему правилу работы в координатах сплющенного сфероида, могут быть использованы только функции одинаковой четности по u и ξ , т.е.

$\{c_1, c_2, c_N^{(2)}, c_{No}^{(2)}\} = 0$. Тогда любая интересующая нас функция тока представима в виде $\psi = \sum_{N>2} c_N \psi_N$, где⁶

$$\boxed{\psi_N = \mathcal{F}_N \underbrace{(\mathcal{X}_{N-2} + c_{sN} \mathcal{X}_N)}_{S_N} + \mathcal{F}_{N-2} \underbrace{(\mathcal{X}_N + c_{dN} \mathcal{X}_{N-2})}_{D_N}}, \quad (1.5)$$

где константы c_{sN} , c_{dN} подбираются из условия непротекания через границу $\psi(\xi_0, u) = 0$:

$$c_{sN} = -\frac{\mathcal{X}_{N-2}(\xi_0)}{\mathcal{X}_N(\xi_0)}, \quad c_{dN} = -\frac{\mathcal{X}_N(\xi_0)}{\mathcal{X}_{N-2}(\xi_0)} = \frac{1}{c_{sN}}.$$

1.2.2 Удовлетворение условию Марангони

Условие Марангони отражает равенство тангенциальных сил на поверхности капли – вязкого трения и силы Марангони [25]:

$$\hat{\sigma}_{n\tau} = \partial_\tau \gamma$$

Выпишем компоненты тензора вязких напряжений в координатах сплю-

⁵Вообще существует ещё один такой же набор, в котором для определения $\mathcal{F}(u)$ могут использоваться функции Лежандра второго рода, однако они расходятся при $u = \pm 1$, т.е. физически предполагают особенность течения на всей оси z , что исключено в непатологических ситуациях.

⁶Здесь и далее вновь опускается индекс (1) у функций.

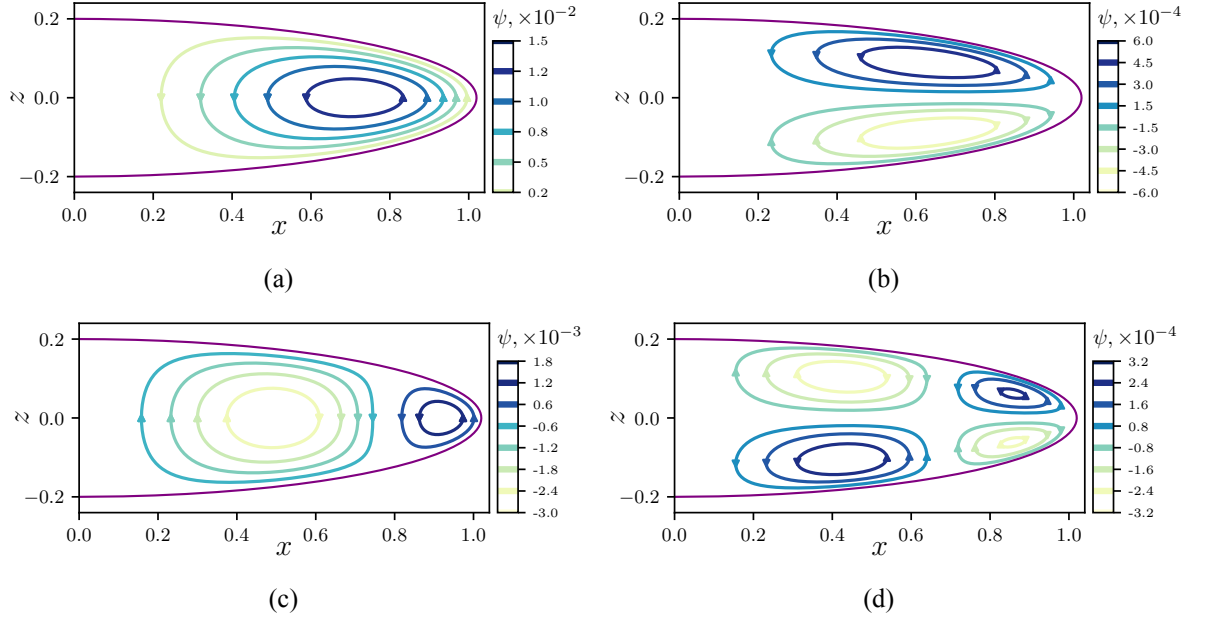


Рис. 4: Линии уровня функции тока (траектории жидких частиц) для первых четырёх базисных движений в эллипсоиде. ($\xi_0 = 0.2$)

щенного сфероида:

$$\begin{aligned}\sigma^{\xi\xi} &= \eta h_\xi^2 \left[\frac{2}{h_\xi^2} \partial_\xi \left(\frac{V_\xi}{h_\xi} \right) + \frac{1}{h_\xi^4} \left(\frac{V_\xi}{h_\xi} \right) \partial_\xi h_\xi^2 + \frac{1}{h_\xi^4} \left(\frac{V_u}{h_u} \right) \partial_u h_\xi^2 \right] \\ \sigma^{u\xi} &= \eta h_\xi h_u \left[\frac{1}{h_u^2} \partial_u \frac{V_\xi}{h_\xi} + \frac{1}{h_\xi^2} \partial_\xi \frac{V_u}{h_u} \right] \\ \sigma^{\varphi\xi} &= \eta h_\xi h_\varphi \left[\frac{1}{h_\varphi^2} \partial_\varphi \frac{V_\xi}{h_\xi} + \frac{1}{h_\xi^2} \partial_\xi \frac{V_\varphi}{h_\varphi} \right]\end{aligned}$$

В безразмерных переменных и с учетом условия на нормальную скорость на границе $v_\xi(\xi_0) = 0$, это равенство выглядит так:

$$\frac{h_u}{h_\xi} \partial_\xi \frac{-\partial_\xi \psi}{h_\xi h_\varphi h_u} = - \underbrace{\frac{\varsigma H^2 A}{\chi \eta}}_{Ma} \frac{\partial_u T}{h_u} \text{ for } \xi = \xi_0$$

или в расписанном и более удобном виде:

$$\left(\partial_\xi - \frac{(\xi_0^2 + u^2)}{2\xi_0} \partial_\xi^2 \right) \psi = \frac{(-Ma)}{2\xi_0 \sqrt{1 + \xi_0^2}} (\xi_0^2 + u^2)^{3/2} (1 - u^2) \partial_u T \text{ for } \xi = \xi_0 \quad (1.9)$$

Поскольку в правой части стоит множитель первого порядка по ε , то для

нахождения функции тока в первом порядке ψ_1 необходимо учесть в правой части только T_0 .

Представим $\psi_1 = \sum_j c_j \psi_j$ ⁷

$$\begin{aligned} (\partial_\xi - \frac{1}{2\xi_0}(\xi_0^2 + u^2)\partial_\xi^2)\psi_1 &= \sum_j l_j(u)c_j = \sum_{i,j} \hat{O}_{ij}^{free} \mathcal{F}_i(u)c_j = \\ &= (-Ma) \frac{1}{2\xi_0 \sqrt{1 + \xi_0^2}} (\xi_0^2 + u^2)^{3/2} (1 - u^2) \frac{1}{2} = \underline{r(u)} \end{aligned}$$

Таким образом мы получили задачу о разложении заданной правой части по функциям $\{l_j\}$. Заметим, что поскольку в правой части есть иррациональность $(\xi_0^2 + u^2)^{3/2}$, а никакая функция из $\{l_j\}$ её не содержит, то решение с неизбежностью будет представлено в виде бесконечного ряда.

Поскольку на практике l_j сложным образом зависят от j , используются лишь конечномерные аппроксимации функции тока $\psi = \sum_j^{N_r} c_j \psi_j$. Однако в таком случае в точности требуемого равенства не достичь, и необходимо ввести меру «невыполненности» — норму отклонения от требуемого равенства. Обычно используют среднеквадратичное отклонение как квадрат нормы:

$$E[\{c_j\}] = \int \left(\sum_j c_j l_j(u) - r(u) \right)^2 \mu^*(du)$$

Поскольку ψ_j имеют компактное представление через \mathcal{F}_i , то самой подходящей кажется та, относительно которой они ортогональны $\mu^*(du) = \frac{du}{1-u^2}$:

$$F_{ik} = \int_{-1}^1 \mathcal{F}_i \mathcal{F}_k \frac{du}{1-u^2} = \delta_{ik} \frac{2}{i(i+1)(2i+1)} \quad (1.10)$$

Таким образом - наша цель - подобрать такой набор констант $\{c_j\}$, чтобы норма отклонения $E[\{c_j\}]$ была минимальна:

$$E = c_j c_m \underbrace{\int l_j l_m}_{\hat{M}_{jm}} - 2c_j \underbrace{\int l_j r}_{r_j} + \int r^2, \delta E = 0 \implies \hat{M}_{mj} c_j^{(opt)} = r_m \quad (1.11)$$

⁷Правильнее было бы писать c_{1j} , однако опустим в коэффициентах 1, указывающую на порядок теории возмущений.

Таким образом при использовании конечного числа функций N_r получаем задачу на обращение матрицы. Далее необходимо проверить сходимость - увеличивая число учтенных базисных функций, убедиться что ошибка стремится к нулю $E^{opt} \xrightarrow{N_r \rightarrow \infty} 0$, что продемонстрировано на рис. 5(a), а коэффициенты разложения к константам (см. рис. 5(b)).

Примеры конвективных движений показаны на рисунках 6 и 7. Заметим, что по мере увеличения сплюсненности движение становится приповерхностным.

Так как в левой части есть иррациональность, мы заранее понимаем, что придётся использовать существенное количество базисных функций для малых ξ_0 . Явное прямолинейное вычисление необходимых интегралов очень громоздко, трудоемко, а быстрые средства интегрирования плохи для быстро осциллирующих функций $n \gg 1$, то было проделано упрощение выражений такое, что никакие интегралы брать не пришлось, так как ответ для них либо был получен явно, либо с использованием рекуррентных формул, что на порядки сократило требуемое время вычислений. Это было достигнуто путём вычисления всех интегралов для базисных \mathcal{F}_i :

$$\hat{M}_{mj} = \hat{O}_{ij}^T F_{ik} \hat{O}_{km}, \quad r_j = R_i \hat{O}_{ij}$$

Единственная сложность - в вычислении $R_i = \int r(u) \mathcal{F}_i$ т.к. аналитически удастся взять лишь интеграл вида:

$$\int u^m \sqrt{(u^2 + \xi_0^2)}, \quad (1.12)$$

с помощью которого получаем результат для R_i , используя явное полиномиальное представление \mathcal{F} .

Этот интеграл берется с использованием замены переменных

$$\begin{aligned} \int u^m \sqrt{(u^2 + \xi_0^2)} du &= [u = \xi_0 \sinh(t)] = \xi_0^{m+2} \int \sinh^m(t) \cosh^2(t) dt = \\ &= \xi_0^{m+2} \underbrace{\int \sinh^m}_{I_m} + \xi_0^{m+2} \int \sinh^{m+2} \end{aligned}$$

и использованием рекуррентного соотношения:

$$m I_m = \cosh(t) \sinh(t)^{m-1} - (m-1) I_{m-2}.$$

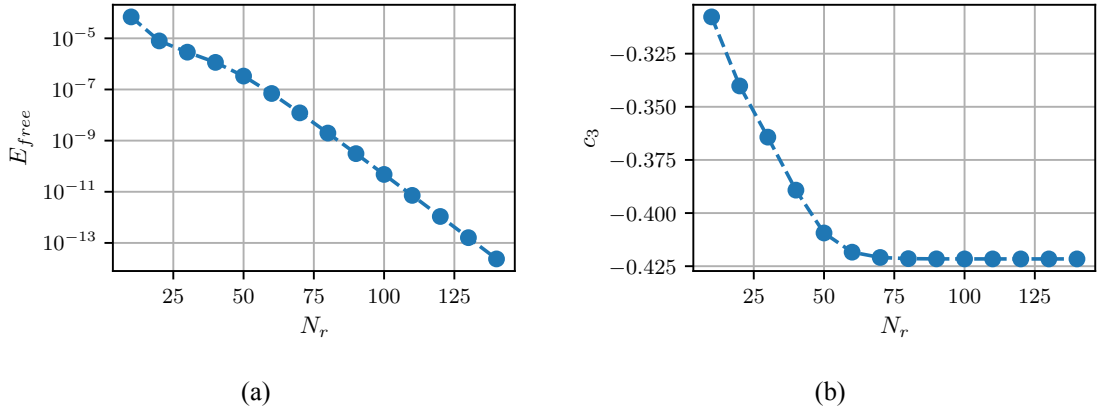


Рис. 5: Иллюстрация сходимости описанной процедуры: (a) Зависимость среднеквадратичной ошибки в условии Марангони от числа использованных базисных функций; (b) Сходимость коэффициента c_3 в разложении итоговой функции тока. ($\xi_0 = 0.1$, $Ma = 1$)

1.2.3 Модифицированная постановка с частичным прилипанием на границе

В предыдущей части мы рассмотрели теоретически идеализированную постановку, не задаваясь вопросом, где капли такой формы встречаются или как их получить. Однако на практике обычно уход от сферичности происходит под действием растягивающих напряжений на торцах. При этом в поле температуры этот растягивающий объект может вносить лишь малые поправки, например в силу своей толщины (микронная проволочка, СПСП). Поэтому полезно уметь находить как стационарное движение, так и порог неустойчивости для случая, когда какая-то часть поверхности ведет себя как твердая

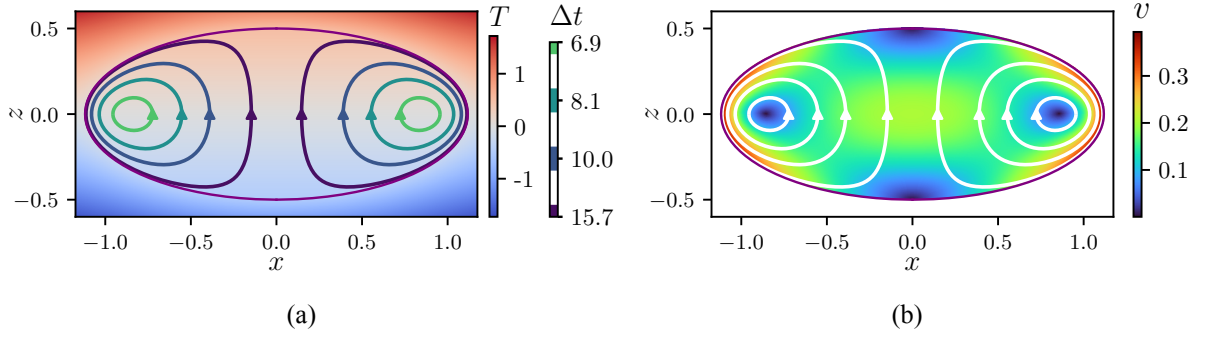


Рис. 6: Пример конвективного движения: (a) поле температуры и траектории жидких частиц с вычисленными периодами оборотов, время измеряется в cH/χ (Например для капли воды высотой $H = 1$ мм для получения времени в секундах необходимо умножить указанное безразмерное время на 17.5.); (b) поле локального модуля скорости. ($\xi_0 = 0.5$, $Ma = 1$, $\kappa = 0.2$)

пленка, т.ч. тангенциальная скорость жидкости на ней обращается в ноль, а на свободной части поверхности по-прежнему выполнено условие Марангони.

На свободной части поверхности таким образом должно быть выполнено равенство (1.9).

На другой части - условие прилипания:

$$v_\tau = v_u \sim \partial_\xi \psi = \sum_{i,j} \hat{O}_{ij}^{solid} c_j \mathcal{F}_i(u) = 0 \text{ for } \xi = \xi_0 \text{ for } u \in \text{solid part}$$

И хотя мы могли бы сперва собрать из полного базиса такие движение, которые прилипают в нужном месте, технически удобнее одновременно по мере увеличения базиса уменьшать ошибку как в условии Марангони, так и в условии прилипания, т.к. в конечном счете отклонение найденного решения от истинного отражают оба этих вклада.

Действовать будем как раньше - минимизировать среднеквадратичное отклонение.

Отдельно на свободной поверхности по аналогии с (1.11):

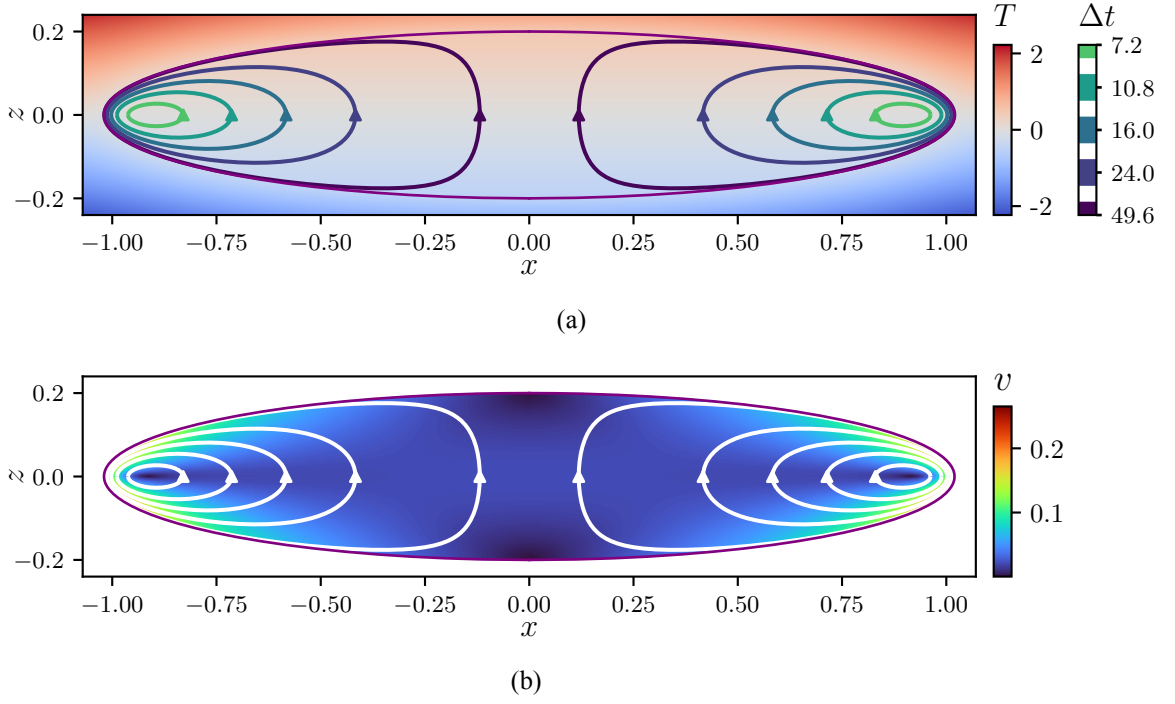


Рис. 7: Пример конвективного движения: (a) поле температуры и траектории жидких частиц с вычисленными периодами оборотов, время измеряется в cH/χ (Например для капли воды высотой $H = 1$ мм для получения времени в секундах необходимо умножить указанное безразмерное время на 7.); (b) поле локального модуля скорости. ($\xi_0 = 0.2$, $Ma = 1$, $\kappa = 0.2$)

$$\begin{aligned}
 E(\{c_j\})^{free} &= \int_{free} \frac{du}{1-u^2} \left[\sum_j l_j(u) c_j - r(u) \right]^2 = \\
 &= \sum_{mj} c_j c_m \underbrace{\int_{free} l_j l_m}_{\hat{M}_{jm}^f} - 2 \sum_j c_j \underbrace{\int_{free} l_j r}_{r_j} + \int_{free} r^2
 \end{aligned}$$

С использованием разложения по $\{\mathcal{F}_i\}$ ⁸:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_{mj}^f &= \hat{O}_{ij}^{fT} F_{ik}^f \hat{O}_{km}^f, \quad F_{ik}^f = \int_{free} \mathcal{F}_i \mathcal{F}_k, \\
 r_j &= R_i \hat{O}_{ij}^f, \quad R_i = \int_{free} r(u) \mathcal{F}_i
 \end{aligned}$$

⁸Сумма по повторяющимся индексам подразумевается

И для участка прилипания:

$$\begin{aligned}
 E(\{c_j\})^{solid} &= \int_{solid} \frac{du}{1-u^2} \left[\sum_j \partial_\xi \psi_j c_j \right]^2 = \int_{solid} \left(\sum_{ij} \hat{O}_{ij}^s c_j \mathcal{F}_i(u) \right)^2 = \\
 &= \sum_{jm} c_j c_m \underbrace{\sum_{ik} \hat{O}_{ij}^s \hat{F}_{ik}^s \hat{O}_{km}^s}_{\hat{M}_{jm}^s}
 \end{aligned}$$

Взвешенное суммарное отклонение и его минимум:

$$\begin{aligned}
 E &= \lambda E^{solid} + E^{free} = \lambda \langle c | \hat{M}^s | c \rangle + \langle c | \hat{M}^f | c \rangle - 2 \langle c | r \rangle + \int_{free} r^2, \\
 \delta E = 0 &\implies (\lambda \hat{M}^s + \hat{M}^s) |c\rangle = |r\rangle,
 \end{aligned}$$

где с помощью свободного параметра λ мы можем управлять относительной важностью условия прилипания и Марангони.

Сходимость описанной процедуры продемонстрирована на рис. 8.

Пример конвективного движения с кольцевым прилипанием изображен на рис. 9. Если капля достаточно сплюснутая, условия на торцах не влияют на движение в объеме. Это проиллюстрировано на рис. 10. Сравнение трех постановок приведено на рис. 11.

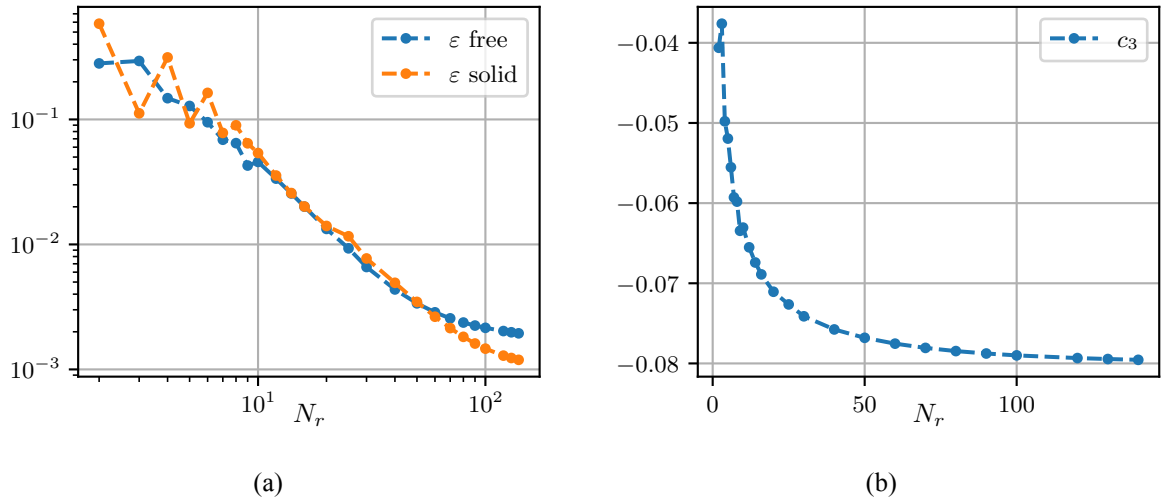


Рис. 8: Иллюстрация сходимости описанной процедуры: (a) Зависимость относительной ошибки ε в условиях Марангони и прилипания от числа использованных базисных функций; (b) Сходимость коэффициента c_3 в разложении итоговой функции тока. ($\xi_0 = 0.1$, $Ma = 1$, на нижней половине свободной поверхности — условие прилипания.)

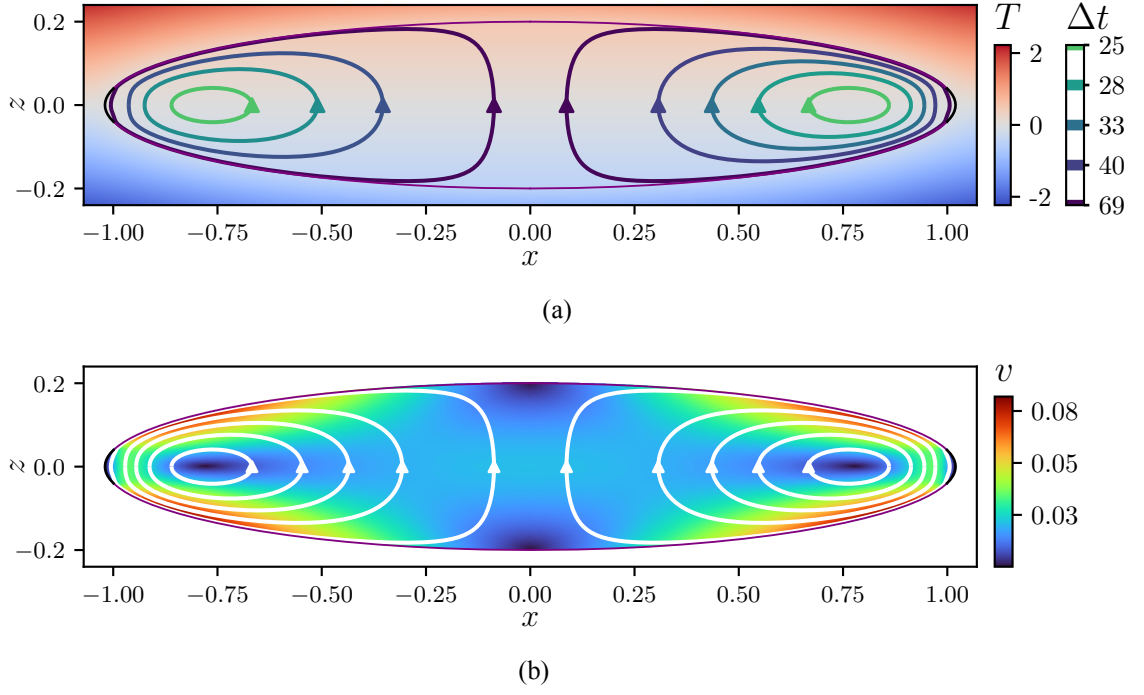


Рис. 9: Пример конвективного движения с кольцевым участком прилипания: (a) поле температуры и траектории жидких частиц с вычисленными периодами оборотов, время измеряется в cH/χ ; ($\xi_0 = 0.2$, $u_0 = 0.2$, $Ma = 1$, $\kappa = 0.2$) (b) поле локального модуля скорости. Черным цветом по бокам указана область прилипания. Интересно сравнивать со случаем полностью свободной поверхности (рис. 7).

1.3 Нахождение первой поправки в поле температуры

Для температуры внутри капли и в воздухе после упрощений получаем выражение

$$(\mathbf{v}, \nabla)T = \chi \nabla^2 T, \quad \nabla^2 T^{air} = 0$$

В первом порядке по ε внутри капли в безразмерных переменных имеем уравнение Лапласа с заданной правой частью

$$\nabla^2 T_1 = \frac{c}{H} (\mathbf{v}_1, \nabla) T_0 = \frac{1}{4\xi_0^2} v_{1z}. \quad (1.15)$$

Удобно это выражение расписать с использованием функции тока:

$$[\partial_\xi(1 + \xi^2)\partial_\xi + \partial_u(1 - u^2)\partial_u] T_1 = [\hat{\Xi} + \hat{P}] T_1 = \frac{1}{4\xi_0^2} [u\partial_u - \xi\partial_\xi] \psi_1 \quad (1.16)$$

Правая сторона в соответствии с (1.3), (1.4), (1.5) раскладывается в сумму

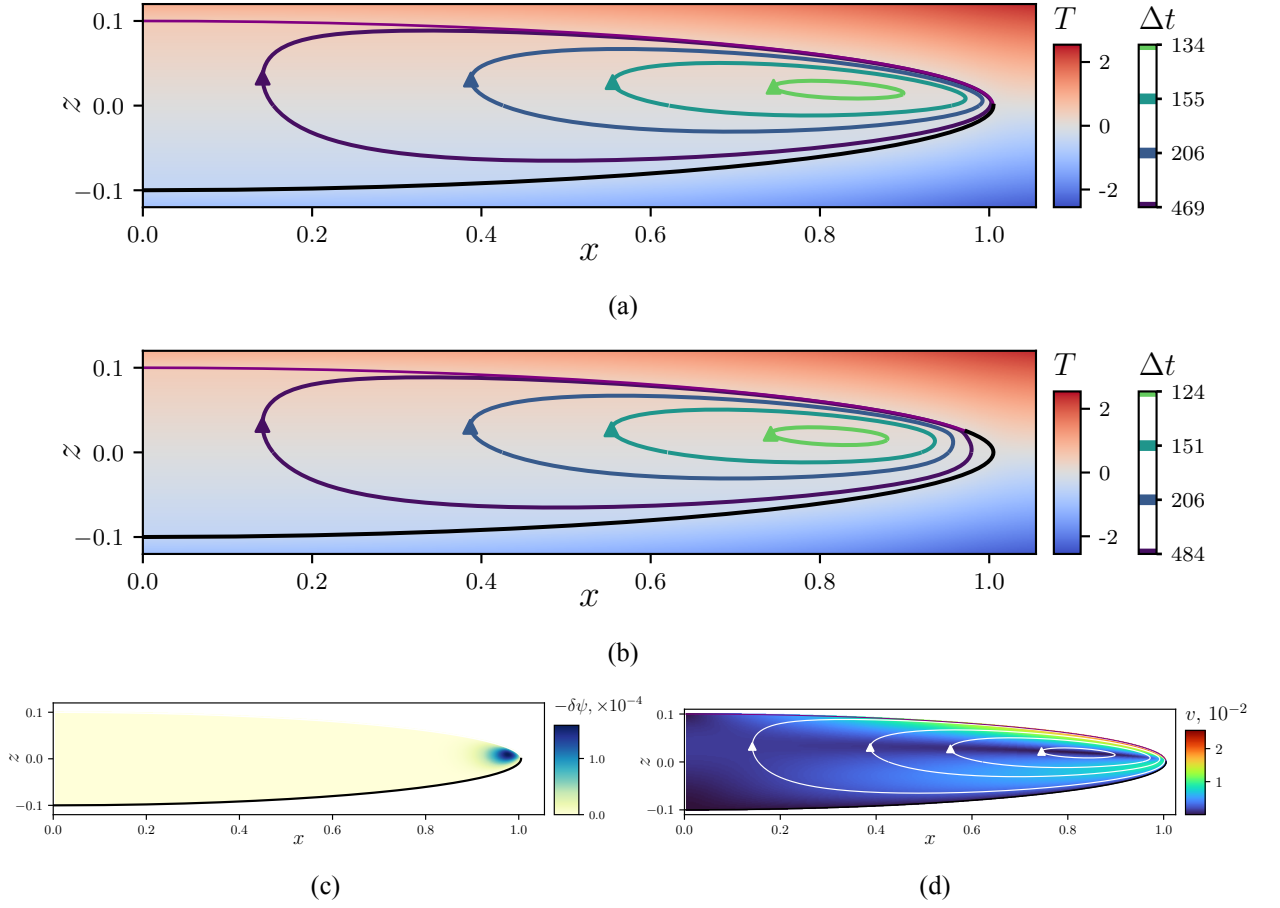


Рис. 10: Примеры стационарного движения: траектории движения жидких частиц(линии уровня функции тока) с временем обращения по ним (например для капли воды высотой $H = 1$ мм для получения времени в секундах необходимо умножить полученное безразмерное время на 35) и поле температур для случая прилипания на нижней половине (a) и прилипания до 1/4 высоты капли (b); Как видно, движения во внутренней области при этом совпадают, а отличия проявляются лишь у торцов (c). На (d) изображено поле модуля скорости для первого случая. ($\xi_0 = 0.1$, $Ma = 1$, $\kappa = 0.2$)

$\sum_{nm} \Lambda_{nm} \Xi_m(\xi) P_n(u)$. T_1 как снаружи, так и внутри капли может быть разложена по полиномам Лежандра, а значит, мы можем искать почленный отклик, представив решение в виде $T_1 = \sum_{mn} T_{mn}(\xi) P_n(u)$.

Частное решение внутри капли просто получается из (1.16) и свойств (1.2):

$$T_{mn}^{(p)} = \frac{\Lambda_{mn}}{m(m+1) - n(n+1)} \Xi_m$$

Остается подобрать константы в решении однородного уравнения

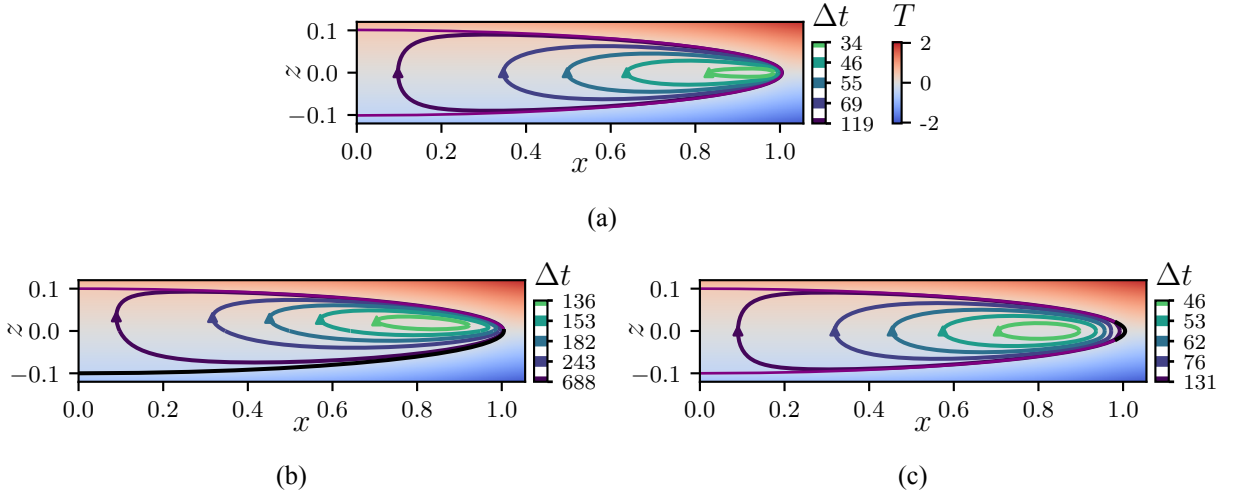


Рис. 11: Примеры конвективного движения: поле температуры и траектории с временами обращений по ним (например для капли воды высотой $H = 1$ мм для получения времени в секундах необходимо умножить полученное безразмерное время на 35) для полностью свободной поверхности (а), с прилипанием на нижней половине (б) и с кольцевым прилипанием (с). Из-за отсутствия силы марангони и условия прилипания на нижней поверхности в случае (б) характерное время в 5 раз больше, чем в случае полностью свободной поверхности. ($\xi_0 = 0.1$, $Ma = 1$, $\kappa = 0.2$)

($W_{nm}, W_{nm}^{(r)}$) так, чтобы были выполнены граничные условия.

$$\begin{cases} T_{mn}^{in} = T_{mn}^{(p)} + W_{nm} \Xi_n, \\ T_{mn}^{out} = W_{nm}^{(r)} \Xi_n^{(r)} \end{cases} \implies \begin{cases} T_{mn}^{(p)}(\xi_0) + W_{nm} \Xi_n(\xi_0) = W_{nm}^{(r)} \Xi_n^{(r)}(\xi_0), \\ \partial_\xi T_{mn}^{(p)}(\xi_0) + W_{nm} \partial_\xi \Xi_n(\xi_0) = \kappa W_{nm}^{(r)} \partial_\xi \Xi_n^{(r)}(\xi_0) \end{cases} \implies \left\{ W_{nm}^{(r)} = \frac{\frac{\partial_\xi T_{mn}^{(p)}}{\partial_\xi \Xi_n} - \frac{T_{mn}^{(p)}}{\Xi_n}}{\kappa \frac{\partial_\xi \Xi_n^{(r)}}{\partial_\xi \Xi_n} - \frac{\Xi_n^{(r)}}{\Xi_n}}, W_{mn} = -\frac{\kappa \frac{\Xi_n}{\Xi_n^{(r)}} - \frac{\partial_\xi \Xi_n}{\partial_\xi \Xi_n^{(r)}}}{\kappa \frac{\Xi_n}{T_{mn}^{(p)}} - \frac{\partial_\xi \Xi_n}{\partial_\xi T_{mn}^{(p)}}} \right\}$$

Технически полезно и удобно найти отклик на каждое из базисных движений $T_{1j} = T_1[\psi_j]$. Поскольку каждая ψ_j из (1.5) найденного набора функций тока имеет вклады $\mathcal{F}_N \mathcal{X}_N$ и $\mathcal{F}_N \mathcal{X}_{N-2} + \mathcal{F}_{N-2} \mathcal{X}_N$, достаточно разложить v_z от каждого из них.

$$[u \partial_u - \xi \partial_\xi] \mathcal{F}_N \mathcal{X}_N = \frac{P_{N-1} \Xi_{N+1} - P_{N+1} \Xi_{N-1}}{2N + 1}$$

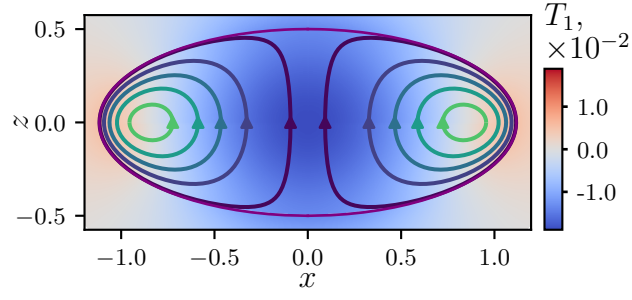


Рис. 12: Пример поправки в поле температуры первого порядка по ε ($\xi_0 = 0.5$, $Ma = 1$, $\kappa = 0.2$). В этом случае критерий применимости теории возмущений - малость T_1 по сравнению с T_0 , т.е. $Ma \ll 10^2$.

$$[u\partial_u - \xi\partial_\xi](\mathcal{F}_N \mathcal{X}_{N-2} + \mathcal{F}_{N-2} \mathcal{X}_N) = 2 \frac{P_{N+1} \Xi_{N-1} - \Xi_{N+1} P_{N-1}}{(2N-3)(2N+1)} -$$

$$- \frac{2N-1}{(2N+1)(2N-3)} (P_{N+1} \Xi_{N-3} - P_{N-3} \Xi_{N+1}) - 2 \frac{P_{N-1} \Xi_{N-3} - P_{N-3} \Xi_{N-1}}{(2N+1)(2N-3)}$$

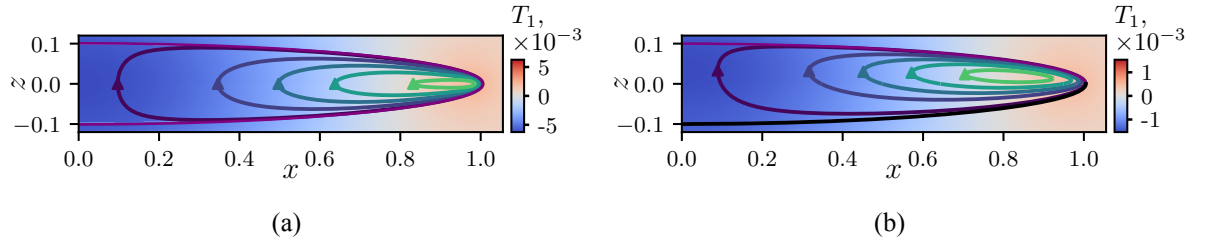


Рис. 13: Примеры поправки первого порядка в поле температуры: для свободной (a) поверхности и с прилипанием на нижней половине (b). ($\xi_0 = 0.1$, $Ma = 1$, $\kappa = 0.2$). Соответственно критерии применимости теории возмущения для описания движения суть $Ma \ll 2 \cdot 10^2$ и $Ma \ll 10^3$.

2 Исследование устойчивости стационарного движения

После того как мы нашли стационарное состояние в виде пары $(\psi = \psi_1 + \dots, T = T_0 + T_1 + \dots)$, мы можем задаться вопросом устойчивости данного решения при различных Ma . Для этой цели представим, что в нулевой момент времени состояние отличалось от найденного стационарного на малую величину⁹, т.ч. $(\psi_\Sigma, T_\Sigma = \psi + \psi_p(T), T + T_p(t))$ и постараемся проследить, как ведёт себя это отклонение в зависимости от времени.

Поскольку все коэффициенты в уравнениях тепло- и массопереноса в рамках линейной теории устойчивости не зависят от времени, то любое возмущение $(\psi_p(t), T_p(t))$ может быть разложено в сумму нормальных $(\psi_\lambda, T_\lambda \propto e^{\lambda t})$.

Тогда найденное стационарное состояние локально устойчиво, если $\forall \Re \lambda < 0$. Однако спектр возбуждений λ зависит от основного состояния, или более конкретно в нашем случае от Ma .

И если на малых Ma все λ_i имеют отрицательную действительную часть, то начиная с какого-то Ma появляются возмущения с положительными $\Re \lambda$. Границу устойчивости таким образом определяет такое начальное состояние (Ma_c) при котором впервые появляется возмущение (ψ_c, T_c) с $\Re \lambda = 0$.

⁹В этой работе рассматриваются только аксиально-симметричные возмущения как наиболее простые. В действительности же при некоторых значениях параметров наиболее опасными (и имеющие ниже порог) могут оказаться возмущения с ненулевым моментом, но что указывают как теоретические [26], так и экспериментальные [27] работы. Кроме того на данном этапе мы не учитываем возможную деформацию поверхности, считая γ большой.

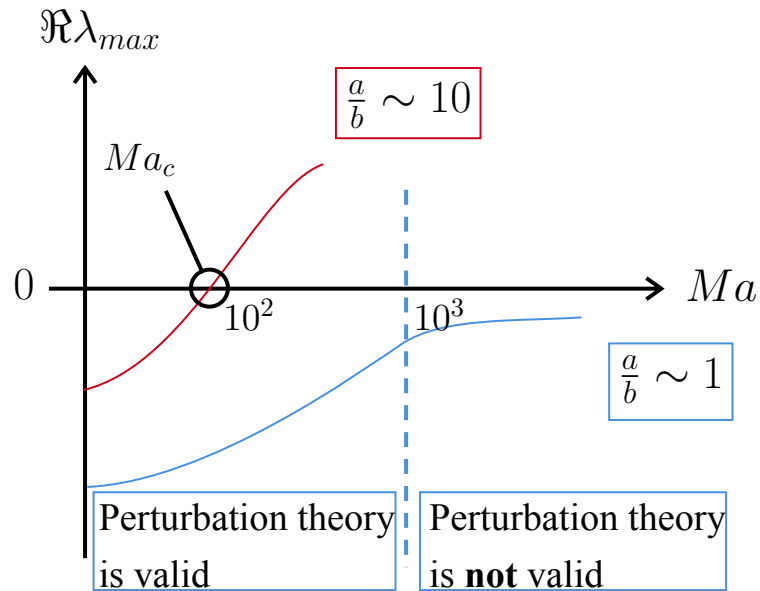


Рис. 14: Иллюстрация, поясняющая предполагаемый вид зависимости временного декремента от Ma . Отражены два сценария - сильно сплюснутая капля, для которой найденное критическое число Марангони входит в область применимости теории возмущений для нахождения основного стационарного состояния $Ma_c \ll Ma_n$; а так же слабо сплюснутая капля, для которой критическое число Марангони – точно не ниже границы.

Итак, мы должны взять уравнения движения, подставить туда $(\psi_\Sigma = \psi + \psi_c, T_\Sigma = T + T_c)$ и линеаризовать по (ψ_c, T_c) , при этом мы предполагаем, что мнимая часть λ так же равна нулю, исключая из рассмотрения возмущения осциляторного характера.

- уравнение на ψ итак было линейным $\hat{E}^4 \psi_c = 0$, т.ч. базис решений тот же
- для температуры полное уравнение $\nabla^2 T_\Sigma = \frac{c}{H} (\mathbf{v}_\Sigma, \nabla) T_\Sigma$, после линеаризации:

$$\begin{aligned} \nabla^2 T_c &= \frac{c}{H} \left((\mathbf{v}_c, \nabla) \underbrace{T}_{T_0+T_1+\dots} + (\underbrace{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}_1+\dots}, \nabla) T_c \right) = \\ &= \frac{c}{H} (\mathbf{v}_c, \nabla) T_0 + \frac{c}{H} ((\mathbf{v}_c, \nabla) T_1 + (\mathbf{v}_1, \nabla) T_c) + \dots \end{aligned}$$

Поскольку выписанный ряд предполагается быстро сходящимся, то для нахождения отклика $T_{cj} = T_c[\psi_j]$ можно не учитывать вклады с

$(\mathbf{v}_1, T_1 \dots)$, т.ч. уравнение в главном порядке по Ma совпадает с уравнением (1.15) для нахождения поправки в температуру первого порядка.

2.1 Полностью свободная поверхность

Остаётся подобрать такое Ma_c и $\{c_{cj}\}$, чтобы пара $(\psi_c = \sum_j c_{cj}\psi_j, T_c = \sum_j c_{cj}T_{cj})$ удовлетворяла граничному условию:

$$\frac{h_u}{h_\xi} \partial_\xi \frac{-\partial_\xi \psi_c}{h_\xi h_\varphi h_u} = -Ma_c \frac{\partial_u T_c}{h_u} \text{ for } \xi = \xi_0$$

Или более компактно:

$$\sum_j l_j(u) c_{cj} = Ma_c \sum_j r_j(u) c_{cj} \quad (2.1)$$

Полезный взгляд на эту проблему - общий операторный. Выражение в левой части можно воспринимать как линейное отображение набора коэффициентов $\{c_{cj}\}$ в некую функцию от u , т.е. как линейный оператор $\hat{L} : f(\mathbb{N}) \rightarrow L_2([-1,1], d\mu^*)$, ровно как и правая часть - некий линейный оператор \hat{R} . Тогда требуемое равенство –

$$\hat{L} |c\rangle = Ma_c \hat{R} |c\rangle$$

Таким образом эта задача является обобщением задачи на поиск собственных значений. Справа не просто число, а так же оператор — поиск вместо направления, в котором заданный оператор действует как умножение на число, направления, в котором пара операторов действует *одинаково* с точностью до мультипликативного множителя. Если это матрицы $n \times n$, то это Generalized Eigenvalue Problem, которая на данный момент уже хорошо изучена [28].

В целом мы потенциально могли бы обратить оператор в левой части, получив задачу на собственные значения, для этого надо было бы решить задачу о нахождении движения, индуцированного наведенной температурой от каждого из базисных движений,

однако этот путь слишком трудоемок.

Буквально с этим равенством работать не удобно, мы воспользуемся тем, что квадрат среднего отклонения от равенства равен нулю, если почти всюду отклонение ноль:

$$\sum_j l_j(u) c_{cj} = Ma_c \sum_j r_j(u) c_{cj} \Leftrightarrow \mathcal{L} = \int \left| \sum_j [l_j(u) - Ma_c r_j(u)] c_{cj} \right|^2 = 0$$

$$\mathcal{L} = \sum_{jm} c_{cm} c_{cj} \left[\underbrace{\int l_m l_j}_{\hat{M}_{jm}^{(0)}} - Ma_c \underbrace{\int l_j r_m + l_m r_j}_{\hat{M}_{jm}^{(1)}} + Ma_c^2 \underbrace{\int r_m r_j}_{\hat{M}_{jm}^{(2)}} \right] = 0 \quad (2.2)$$

Получается задача на нахождения вектора, на котором неотрицательно определённая квадратичная форма равна нулю.

$$\left(\hat{M}_0 - Ma_c \hat{M}_1 + Ma_c^2 \hat{M}_2 \right) |c_c\rangle = 0$$

Что является *квадратичной задачей собственных значений (КЗСЗ)*.

Стандартный метод решения - сведение к обобщенной задачи на собственные значения. [29]

$$\hat{A} - Ma_c \hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{M}_0 & 0 \\ 0 & \hat{I} \end{pmatrix} - Ma_c \begin{pmatrix} \hat{M}_1 & -\hat{M}_2 \\ \hat{I} & 0 \end{pmatrix}, |\mathcal{V}\rangle = \begin{pmatrix} |c_c\rangle \\ Ma_c |c_c\rangle \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(\hat{A} - Ma_c \hat{B}) |\mathcal{V}\rangle = 0$$

Как и раньше для технической реализации вычисления интегралов требуются некие упрощения. Требуемое равенство в принятом базисе есть:

$$O_{ij} c_j \mathcal{F}_i(u) = \frac{Ma}{2\xi_0 \sqrt{1 + \xi_0^2}} T_{ij} c_j (\xi_0^2 + u^2)^{3/2} \underbrace{[-(1 - u^2)] \partial_u P_i(u)}_{i(i+1)\mathcal{F}_i(u)} =$$

$$Ma (\xi_0^2 + u^2)^{3/2} \mathcal{F}_i(u) R_{ij} c_j,$$

где T_{ij} — коэффициент в разложении T_{cj} по полиномам Лежандра P_i . Тогда

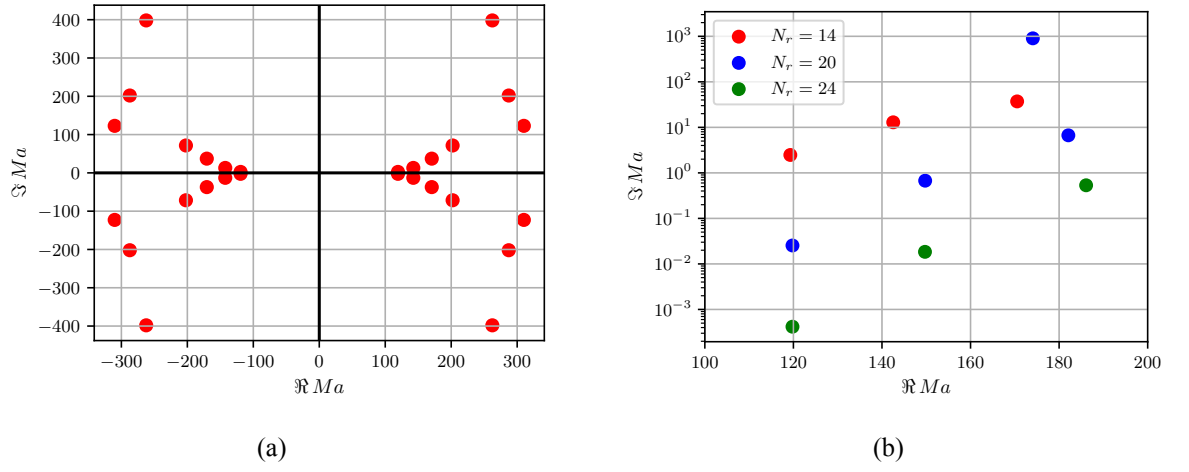


Рис. 15: Пример всего спектра (a) ($\xi_0 = 0.12$, количество использованных базисных движений $N_r = 14$). Мнимая часть возникает из-за конечного числа учтенных базисных функций и уменьшается по мере расширения базиса (b).

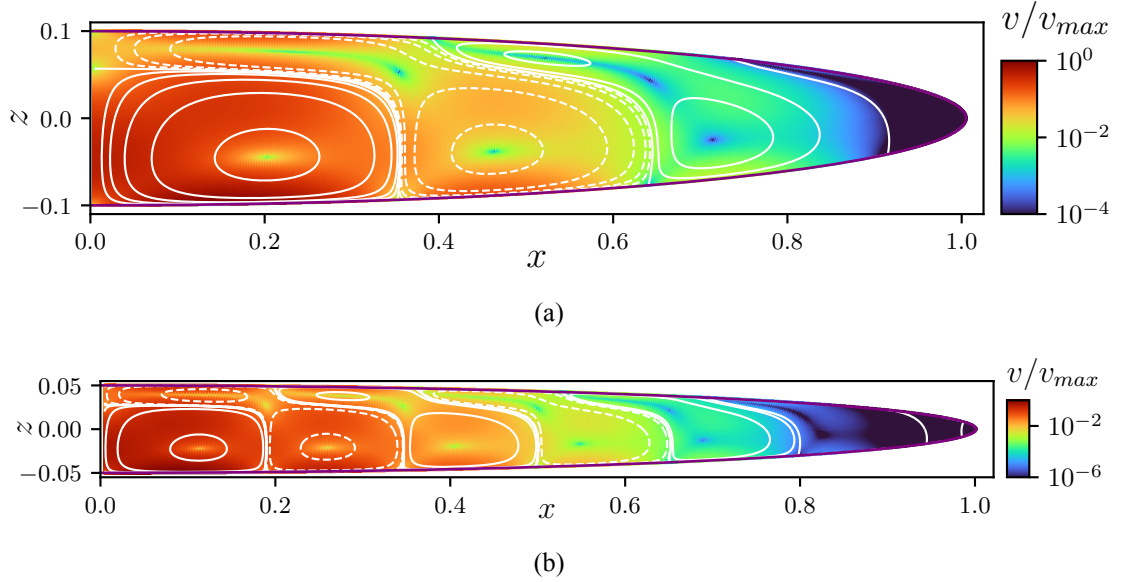


Рис. 16: Поле модуля скорости критического движения и линии тока для $\xi_0 = 0.1$ ($Ma_c \approx 107$) (a) и $\xi_0 = 0.05$ ($Ma_c \approx 101$) (b) при $\kappa = 0.1$. Логарифмическая раскраска использована для демонстрации того факта, что по мере удаления от центра возмущение затухает.

матрицы суть

$$\begin{cases} \hat{M}_0 = \hat{O}^T F \hat{O} \\ \hat{M}_1 = \hat{R}^T F_{3/2} \hat{O} + \hat{O}^T F_{3/2} \hat{R} \\ \hat{M}_2 = \hat{R}^T F_3 \hat{R} \end{cases},$$

где $\|F_{3/2}\|_{i,k} = \int \mathcal{F}_i \mathcal{F}_k (u^2 + \xi_0^2)^{3/2}$ вычисляется с помощью найденных в (1.12) первообразных, а

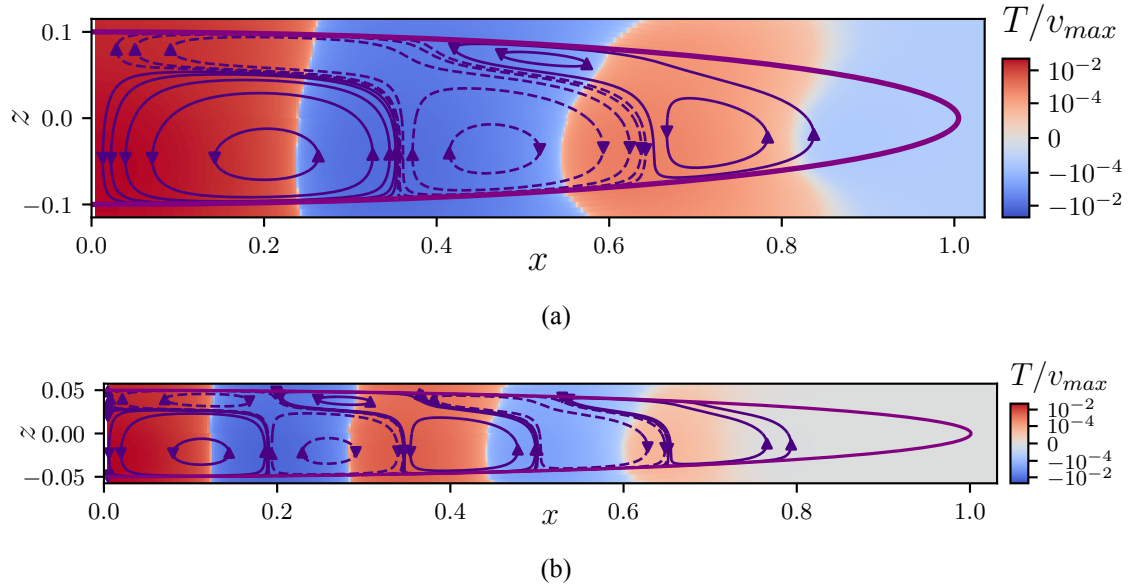


Рис. 17: Поле температуры и линии тока критического движения для $\xi_0 = 0.1$ ($Ma_c \approx 107$) (a) и $\xi_0 = 0.05$ ($Ma_c \approx 101$) (b) при $\kappa = 0.1$.

$$\|F_3\|_{i,k} = \int_{-1}^1 \|(\xi_0^2 + u^2)^3\|_{m,i} \mathcal{F}_m \mathcal{F}_k \frac{du}{1-u^2} = \|(\xi_0^2 + u^2)^3\|_{m,i} F_{km}.$$

Пример получаемых $\{Ma_c\}$ изображен на рис. 15(a). А сами критические моды на рисунках 16 и 17. Заметим, что в углы критические моды практически не затекают. По мере увеличения сплюснутости капли, в критическом движении всё больше вихрей. Фазовая диаграмма изображена на рис. 18. Заметим, что получаемое в пределе $\xi_0 \rightarrow 0, \kappa \rightarrow 0$ значение критического $Ma_c \approx 88$ согласуется с результатом для плоского слоя, рассмотренного в работе [30] при числе Био равным нулю (адиабатические границы).¹⁰ Соответствующее плоскому слою аксиально-симметричное движение отображено на рис. 20.

¹⁰Прямое сравнение при других значениях κ затруднено тем, что в случае плоского слоя нет понятия «вдали» от слоя, т.ч. используют феноменологическую константу теплообмена, считая постоянной её, а не отношение теплопроводностей.

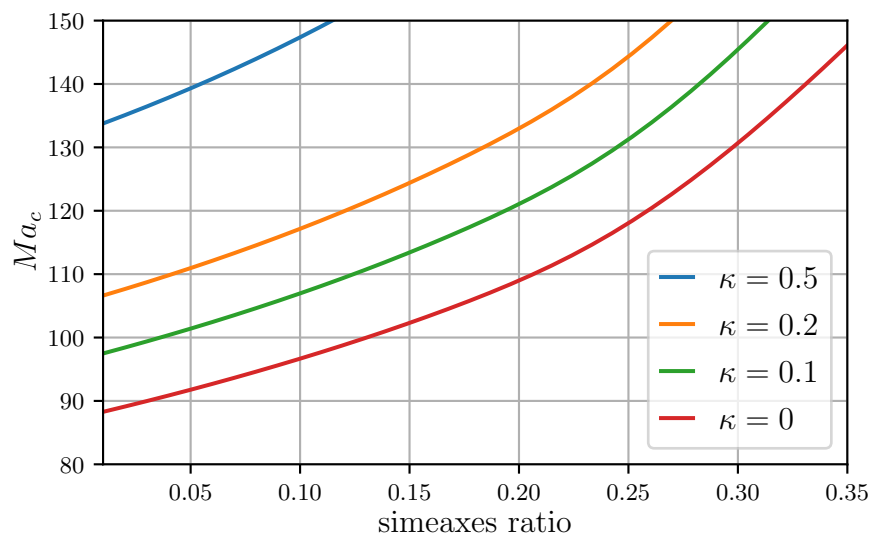


Рис. 18: Критические кривые для различных отношений теплопроводностей капли и воздуха.

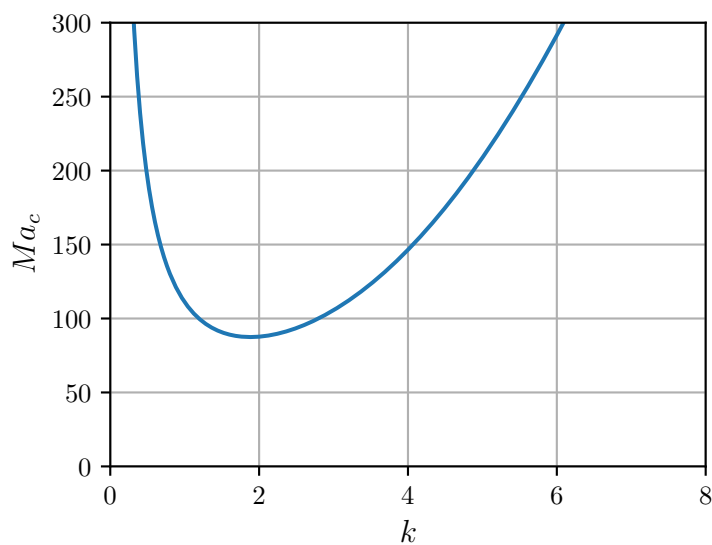


Рис. 19: Нейтральная кривая для плоского слоя. Случай адиабатических границ (число Био равно нулю $b = 0$). Рассмотрен в [30].

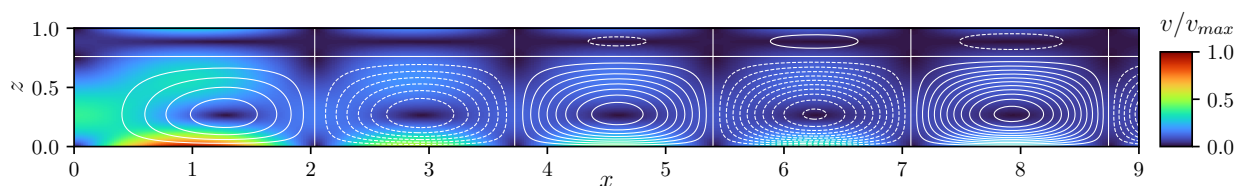


Рис. 20: Аксиально-симметричное критическое движение для случая плоского слоя. ($Ma_c \approx 87.5, k_c \approx 1.9$)

2.2 Случай прилипания на нижней половине

Как мы увидим далее, критические моды не затекают в угол, поэтому не уменьшая общности рассмотрим только ситуацию с ровно половиной свободной поверхности.

2.2.1 Выделение базиса

Сперва необходимо явно найти базис движений, «прилипающих» ровно на половине поверхности, т.е.

$$\partial_\xi \psi(\xi = \xi_0) = 0 \text{ at } u \in (-1, 0)$$

Рассмотрим тангенциальную скорость для какой-нибудь (l -ой) нечетной функции тока

$v_u^{odd}(u) \sim \partial_\xi \psi^{odd}(\xi = \xi_0)$ - она так же нечетна как функция u . Если бы мы смогли из четных функций ψ_j^{even} собрать такую, что тангенциальная скорость $v_u^{even} = v_u^{odd}(|u|)$ равна симметризованной скорости для выбранной нечетной функции, тогда их сумма обеспечивает равенство нулю v_u при $u < 0$ (см. рис. 21).

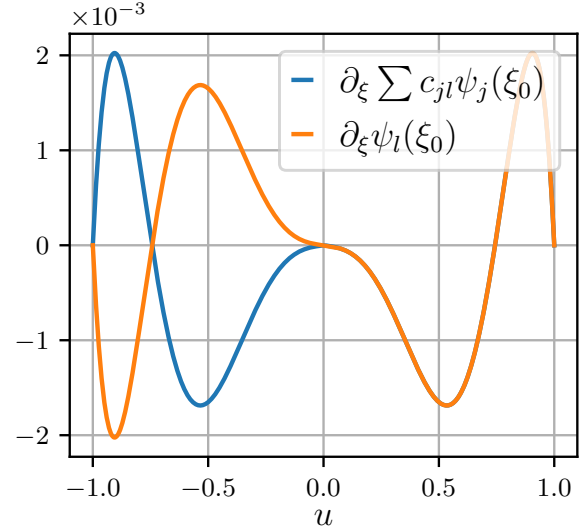


Рис. 21: Пример подбора симметричного движения для $l = 1, \xi_0 = 0.1$. В положительной области тангенциальные скорости совпадают, а в отрицательной отличаются знаком, тогда сумма таких движений в отрицательной области обладает нулевой тангенциальной скоростью.

$$\partial_\xi \psi_l^{odd}(\xi = \xi_0, |u|) = \sum_{j \text{ even}} c_{jl} \partial_\xi \psi_j^{odd}(\xi = \xi_0, u) \implies$$

$$\partial_\xi \left[\psi_l^{odd} + \underbrace{\sum_{j \text{ even}} c_{jl} \psi_j}_{\psi_l^{solid}} \right] (\xi = \xi_0) = 0 \text{ for } u < 0$$

Легко понять, что перебирая теперь все нечетные ψ мы сгенерируем весь базис движений с непрерывной на границе скоростью.

Поскольку в используемом базисе $\partial_\xi \psi_l(|u|) = \sum_i \hat{O}_{i,l}^{solid} \mathcal{F}_i(|u|)$, то для практической реализации необходимо научиться раскладывать симметризованную функцию $\mathcal{F}_i(|u|) = k_{im} \mathcal{F}_m$ по четным, это легко проделать, учитывая ортогональность(1.10) базисных функций

$$k_{im} = \frac{\int \mathcal{F}_i(|u|) \mathcal{F}_m}{\int \mathcal{F}_m^2} = P_i(P_{m+1} - P_{m-1}) \Big|_{u=0} \frac{m(m+1)}{i(i+1) - m(m+1)}$$

После чего для нахождения соответствующих коэффициентов в разложении по четным функциям необходимо обратить матрицу:

$$\sum_{j \text{ even}} \hat{O}_{m,j}^{solid} c_{jl} = \sum_i k_{im} \hat{O}_{i,l}^{solid} \implies \hat{O}^{solid} |c\rangle_l = \hat{k}^T \hat{O}^{solid} |\delta(l)\rangle$$

Что производится явно(рекуррентно) т.к. матрица $\hat{O}_{m,j}^{solid}$ является нижнетреугольной по построению(1.5).

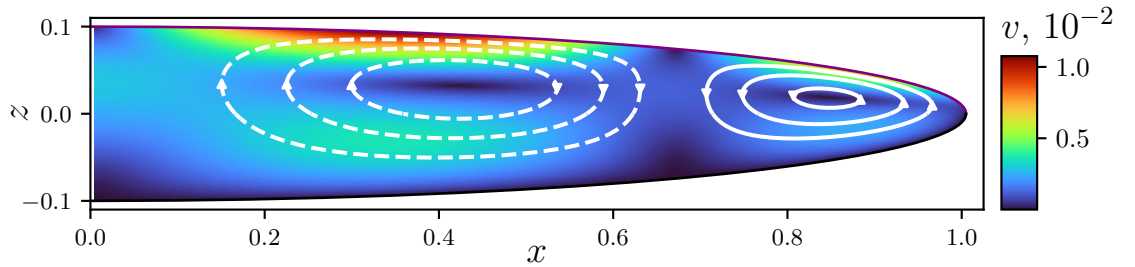


Рис. 22: Пример $l = 1$ -го «прилипшего» базисного движения. Цветом передан локальный модуль скорости. ($\xi_0 = 0.1$)

2.2.2 Нахождение критических параметров

Теперь для нахождения критических возмущений необходимо удовлетворить условию Марангони на свободной поверхности(2.1). Действие в том же духе приведет нас к (2.2), где интегралы берутся только по свободной части поверхности ($u \in (0, 1)$). Удобно считать соответствующие матрицы в старом (не прилипающем базисе), а уже после совершать преобразование базиса:

$$\hat{O}_{jm} c_j c_m = \hat{O}_{jm} \hat{B}_{j\tilde{j}} \hat{B}_{m\tilde{m}} c_{\tilde{j}} c_{\tilde{m}} = \langle \tilde{c} | \hat{B}^T \hat{O} \hat{B} | \tilde{c} \rangle,$$

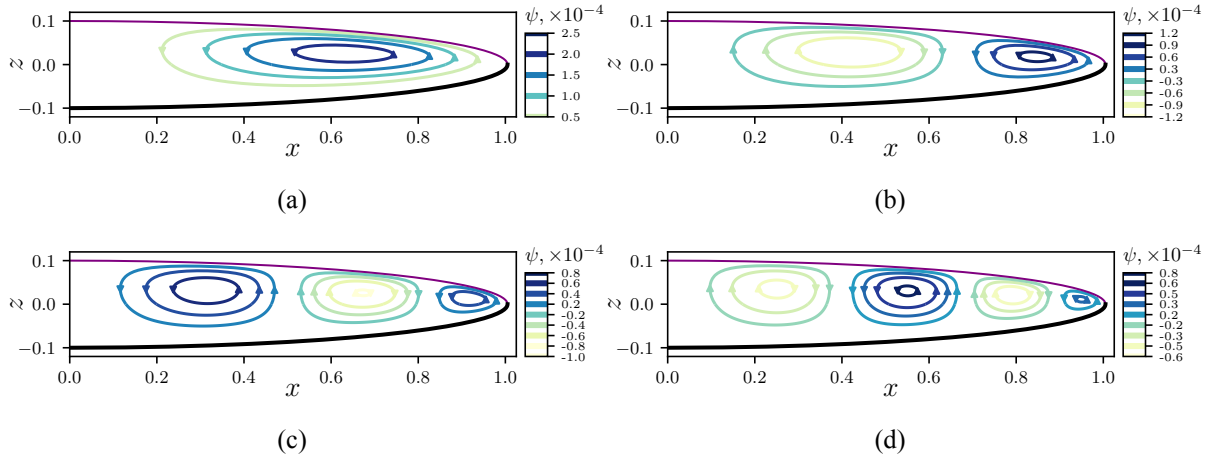


Рис. 23: Линии уровня функции тока (траектории жидких частиц) для первых четырёх базисных движений с условием прилипания на нижней половине. ($\xi_0 = 0.1$)

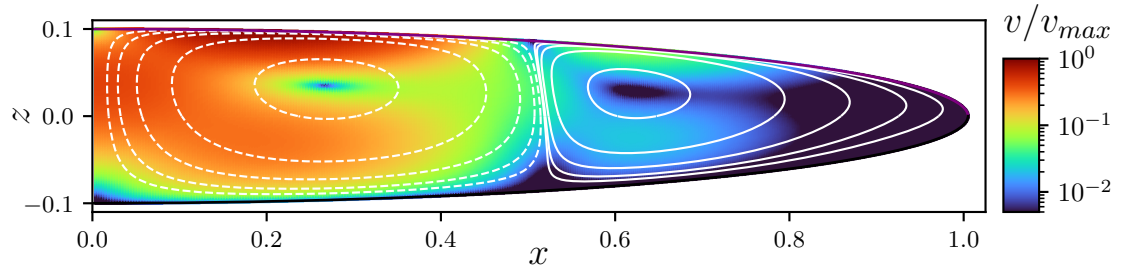
где $B_{j,\tilde{j}}$ - матрица перехода к новому базису, т.е. коэффициент в разложении \tilde{j} прилипающей базисной функции перед j не прилипающей.

При этом вычисление интегралов с иррациональностями ничем не отличается от случая полной свободной поверхности, т.к. нами были найдены аналитически первообразные, а значение интегралов

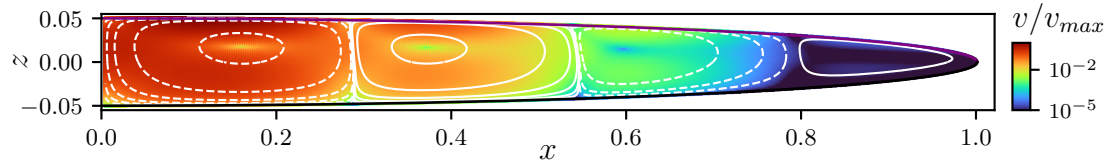
$$F_{ik}^{free} = \int_0^1 \frac{du}{1-u^2} \mathcal{F}_i \mathcal{F}_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \|\mathcal{F}_i\|^2 & \text{if } i = k, \\ \frac{P_i \mathcal{F}_k - \mathcal{F}_i P_k}{i(i+1) - k(k+1)} \Big|_{u=0} & \text{else.} \end{cases}$$

Заметим, что в этом случае при подогреве сверху система устойчива, а неустойчивость возникает только при подогреве снизу (со стороны поверхности с прилипанием) [2], математически это означает наличие только отрицательных Ma_c в соответствии с нашей процедурой обезразмеривания ($A_{in} < 0$). Это отличает рассматриваемую ситуацию от полностью свободной поверхности, где верх и низ эквивалентны.

Примеры критических движений изображены на рисунках 24 и 25. Фазовая диаграмма приведена на рис. 26, предел плоской адиабатически изолированной капли согласуется с известным результатом ($Ma_c \approx 50$) Пирсона [5].

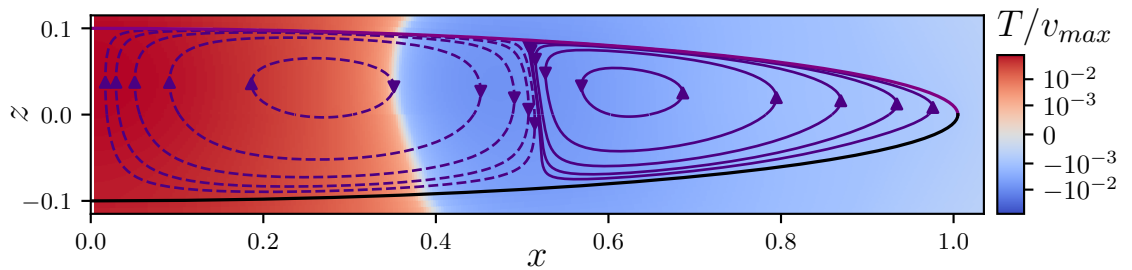


(a)

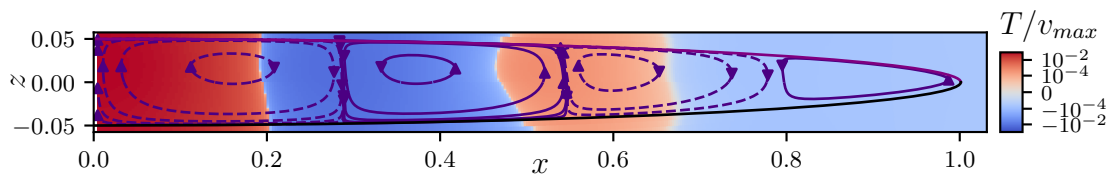


(b)

Рис. 24: Поле модуля скорости критического движения и линии тока для $\xi_0 = 0.1$ ($Ma_c \approx -81$) (a) и $\xi_0 = 0.05$ ($Ma_c \approx -76$) (b) при $\kappa = 0.2$. Логарифмическая раскраска использована для демонстрации того факта, что по мере удаления от центра возмущение затухает.



(a)



(b)

Рис. 25: Поле температуры и линии тока критического движения для $\xi_0 = 0.1$ ($Ma_c \approx -81$) (a) и $\xi_0 = 0.05$ ($Ma_c \approx -76$) (b) при $\kappa = 0.2$.

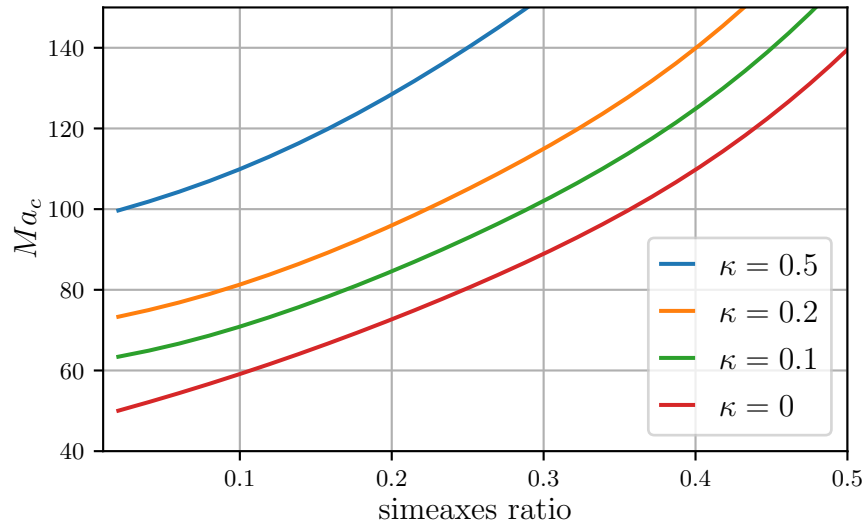


Рис. 26: Фазовая диаграмма для случая поверхности с прилипанием на нижней половине для различных отношений теплопроводности окружающего воздуха и капли.

2.3 Обсуждение результатов

Как видно из полученных кривых неустойчивости, с увеличением сферичности критическое Марангони увеличивается в обеих постановках. Интересно заметить, что хотя и причина неустойчивости в наличии свободной поверхности, порог неустойчивости для полностью свободной поверхности оказывается выше, чем для покрытой на половину (см. рис 27).

Необходимо вспомнить, что полученные критические числа Марангони найдены без учета стационарного конвективного движения, считая, что это вносит лишь поправку. Чтобы понять границу применимости такого подхода, можно построить сумму начального поля температуры и первой поправки при критическом градиенте, т.ч. если это сумма мало отличается от равномерного градиента (по крайней мере в области интенсивного критического движения), то рассуждения самосогласованны и поправку в критическое число Марангони от стационарной конвекции можно учесть по теории возмущения, если же отличие существенны — неустойчивость если и возникает, то уже в существенно нелинейной области. Из соответствующих построений (см. рис. 28) можно сделать вывод о значимой разнице между двумя постановками. Для случая с частичным прилипанием уже для соотношения сторон $\sim 1/10$ капля достаточно плоская, чтобы начальное конвективное движения

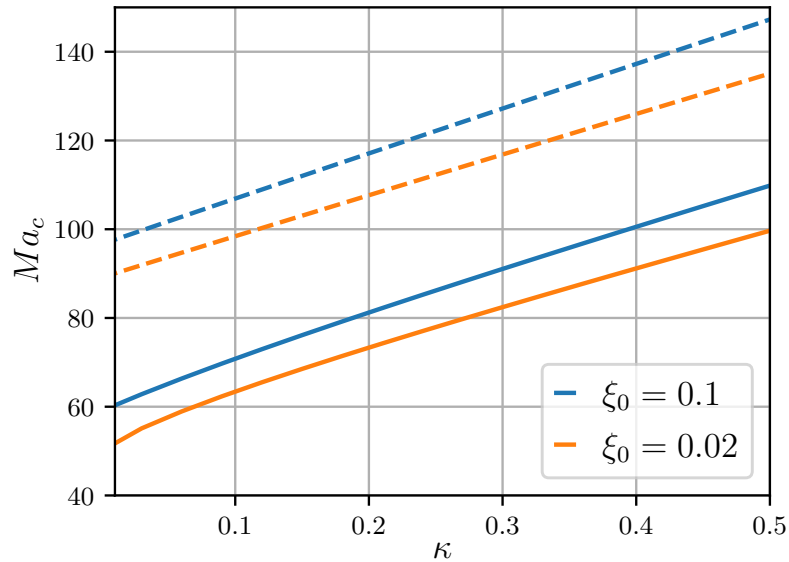


Рис. 27: Зависимость критического числа Марангони от отношения теплопроводностей воздуха и капли. Сплошной линией показан случай с условием прилипания на половине поверхности, пунктирной — полностью свободной.

мало влияло на устойчивость. Что же касается случая полностью свободной границы, лишь при соотношении сторон $\sim 1/50$ возможно такое рассмотрение¹¹.

Таким образом полностью свободная поверхность оказывается более устойчивой, а неустойчивость проявляется в существенно нелинейной области для соотношения сторон больше $1/50$.

¹¹Соответствующий график не приведен в силу его сильной вытянутости.

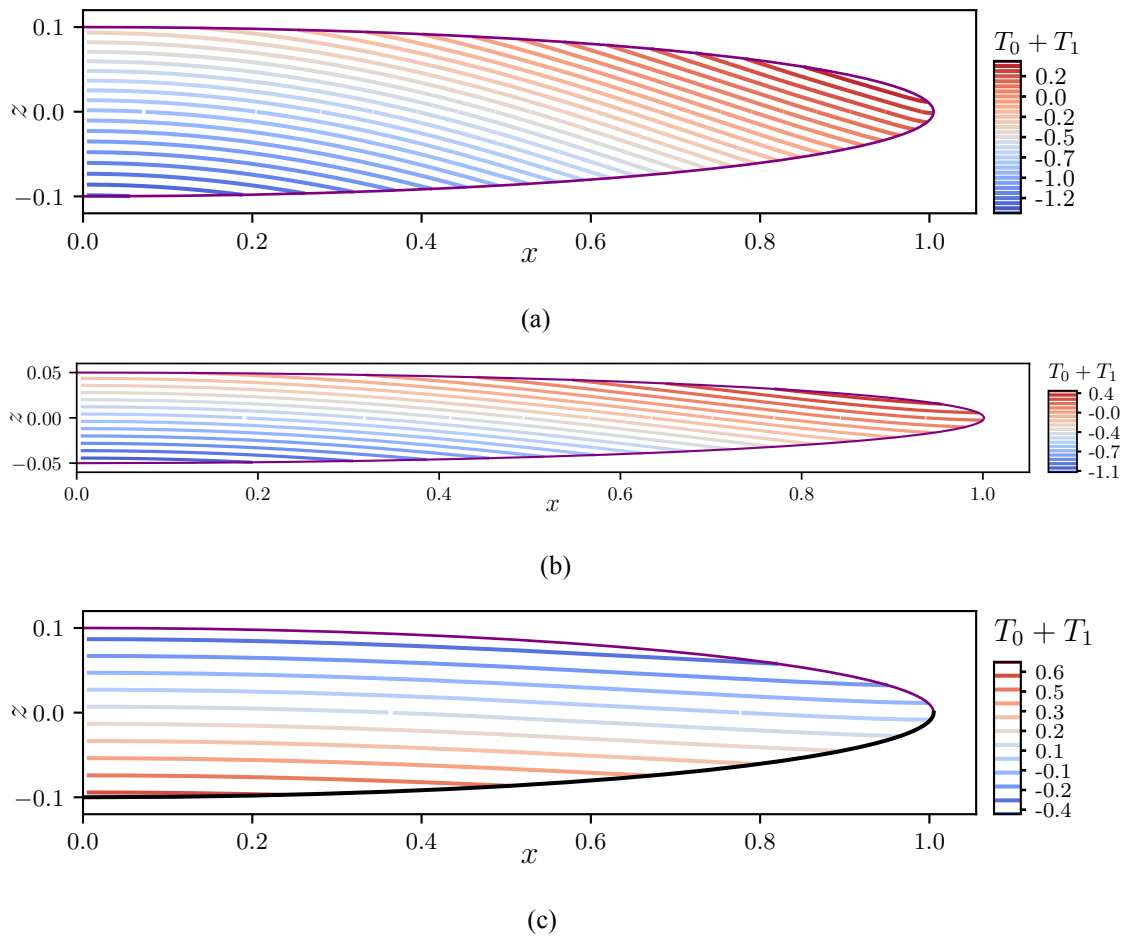


Рис. 28: Линии уровня поля температуры (равномерного градиента и первой поправки при критическом Марангони $T_0 + T_1$). Случаи полностью свободной поверхности (a) $\xi_0 = 0.1$, $Ma_c \approx 107$, (b) $\xi_0 = 0.05$, $Ma_c \approx 101$ и с прилипанием на нижней половине (c) $\xi_0 = 0.1$, $Ma_c \approx -70$. ($\kappa = 0.1$)

Заключение

В работе решены задачи о термокапиллярной конвекции и неустойчивости в эллипсоидальных каплях со свободной поверхностью. Основные результаты ВКР заключаются в следующем:

1. Найдена полная система функций, описывающая произвольное аксиально-симметричное течение в геометриях сплющенного и вытянутого сфероидов.
2. Найдена стационарная конвекция, индуцированная вариацией температуры вдоль поверхности капли. При этом исследованы различные постановки, подразумевающие возможность условия прилипания на части свободной поверхности. Показано, что изменение условий на поверхности вблизи торцов влияет лишь на течение жидкости в малой области.
3. Для различных полуосей эллипсоида найдена граница применимости построенной теории.
4. Экспериментально подтверждена возможность наблюдения стационарного конвективного движения в каплях на кольце.
5. Исследована устойчивость основного температурного мотива относительно аксиально симметричных возмущений: найдены критические числа Марангони, построены соответствующие моды и приведены фазовые кривые для различных значений полуосей эллипсоида и отношений коэффициентов теплопроводности жидкости и окружающего воздуха. Полученные результаты в пределе сильно сплюснутой капли согласуются с исследованными ранее критическими значениями для плоского слоя. Показано, что в случае полностью свободной поверхности уже для соотношения полуосей $1/10$ критическое число Марангони расположено в нелинейной области. Случай же с прилипанием отличается тем, что при нагреве со стороны свободной поверхности конвективное течение оказывается устойчивым, а неустойчивость возникает лишь при нагреве с другой стороны, при этом критические Марангони находятся в области линейного отклика. Для реалистичных параметров

вещества пленки смектика критические Марангони не достижимы, т.к. эта фаза существует в узком температурном диапазоне, а требуемый перепад температур $\sim 10K$.

Перспективы дальнейшей разработки темы:

- Учет нелинейности в описании стационарной конвекции для описания системы при больших градиентах температуры и исследования её устойчивости в случае полностью свободной поверхности.
- Исследование устойчивости относительно не аксиально-симметричных возмущений.
- Исследование закритической области — нахождение картины ячеек.
- Модернизация схемы эксперимента для наблюдения конвекции и закритических движений в сплюснутых каплях.

Список использованных источников и литературы

- [1] C. Marangoni, *Sull'espansione delle gocce d'un liquido galleggianti sulla superficie di altro liquido* (Fratelli Fusi, 1865).
- [2] Г. Гершуни и Ж. Е.М., *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости* (Наука, 1972).
- [3] Г. Гершуни, Е. Жуховицкий и А. Непомнящий, *Устойчивость конвективных течений* (Наука, 1989).
- [4] M. J. BLOCK, «Surface Tension as the Cause of Bénard Cells and Surface Deformation in a Liquid Film», [Nature](#) **178**, 650 (1956).
- [5] J. R. A. Pearson, «On convection cells induced by surface tension», [Journal of Fluid Mechanics](#) **4**, 489 (1958).
- [6] H. Bénard, «Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. - Méthodes optiques d'observation et d'enregistrement», [Journal de Physique Théorique et Appliquée](#) **10**, 254 (1901).
- [7] L. Rayleigh, « LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side », [The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science](#) **32**, 529 (1916).
- [8] H. C. Kuhlmann, *Thermocapillary convection in models of crystal growth*, т. 152 (1999).
- [9] A. Karbalaei, R. Kumar и H. Cho, «Thermocapillarity in Microfluidics—A Review», [Micromachines](#) **7**, 13 (2016).
- [10] D. Pettit, *Science off the Sphere: Episode 3: Thin film physics*, март 2012.
- [11] H. Kawamura, K. Nishino, S. Matsumoto и I. Ueno, «Space Experiment of Marangoni Convection on International Space Station», в [2010 14th International Heat Transfer Conference, Volume 8](#) (январь. 2010), с. 343—362.
- [12] P. G. Grodzka и T. C. Bannister, «Heat Flow and Convection Demonstration Experiments Aboard Apollo 14», [Science](#) **176**, 506 (1972).

- [13] J. Thomson, « XLII. On certain curious motions observable at the surfaces of wine and other alcoholic liquors », [The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science](#) **10**, 330 (1855).
- [14] H. J. Maris, G. M. Seidel и F. I. B. Williams, «Experiments with supercooled liquid hydrogen», [Physical Review B](#) **36**, 6799 (1987).
- [15] N. Shankar и R. Shankar Subramanian, «The stokes motion of a gas bubble due to interfacial tension gradients at low to moderate Marangoni numbers», [Journal of Colloid and Interface Science](#) **123**, 512 (1988).
- [16] G. Birkhoff, *Hydrodynamics: A Study in Logic, Fact, and Similitude*, Princeton Legacy Library (Princeton University Press, 1960).
- [17] D. Tam, V. von Arnim, G. H. McKinley и A. E. Hosoi, «Marangoni convection in droplets on superhydrophobic surfaces», [Journal of Fluid Mechanics](#) **624**, 101 (2009).
- [18] S. H. Davis, «Thermocapillary Instabilities.», [Annual Review of Fluid Mechanics](#) **19**, 403 (1987).
- [19] В. К. Андреев и В. Б. Бекежанова, «Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор)», Прикладная механика и техническая физика **54**, 3 (2013).
- [20] M. F. Schatz и G. P. Neitzel, «Experiments on thermocapillary instabilities», [Annual Review of Fluid Mechanics](#) **33**, 93 (2001).
- [21] G. Whyman и E. Bormashenko, «Oblate spheroid model for calculation of the shape and contact angles of heavy droplets», [Journal of Colloid and Interface Science](#) **331**, 174 (2009).
- [22] H. Schüring и R. Stannarius, «Isotropic droplets in thin free standing smectic films», [Langmuir](#) **18**, 9735 (2002).
- [23] Н. Лебедев, *Сборник задач по математической физике* (1955).
- [24] J. Happel и H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media*, Mechanics of Fluids and Transport Processes (Springer Netherlands, 1983).
- [25] Л. Ландау и Е. Лифшиц, *Гидродинамика: Гидродинамика т. 6* (Наука, 1988).

- [26] S. Rosenblat, S. H. Davis и G. M. Homsy, «Nonlinear Marangoni convection in bounded layers. Part 1. Circular cylindrical containers», [Journal of Fluid Mechanics](#) **120**, 91 (1982).
- [27] J. L. Zhu, W. Y. Shi и L. Feng, «Bénard-Marangoni instability in sessile droplet evaporating at constant contact angle mode on heated substrate», [International Journal of Heat and Mass Transfer](#) **134**, 784 (2019).
- [28] G. H. Golub и C. F. Van Loan, *Matrix Computations (Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences, 3)*, 4-е изд. (Johns Hopkins University Press, 2013).
- [29] F. Tisseur и K. Meerbergen, «The Quadratic Eigenvalue Problem», [SIAM Review](#) **43**, 235 (2001).
- [30] E. S. Pikina, B. I. Ostrovskii и S. A. Pikin, «Benard–Marangoni convection within isotropic droplets in overheated free standing smectic films», [European Physical Journal E](#) **44**, 10 . 1140 / epje / s10189 – 021 – 00082–1 (2021).

Вытянутый сфероид

Аналогичную процедуру построения общего движения можно проделать и в случае вытянутого сфероида.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\sqrt{\zeta^2 - 1}\sqrt{1 - u^2} \cos \varphi \\ c\sqrt{\zeta^2 - 1}\sqrt{1 - u^2} \sin \varphi \\ c\zeta u \end{pmatrix}$$

Масштабные факторы:

$$h_\zeta = c\sqrt{\frac{-u^2 + \zeta^2}{\zeta^2 - 1}}$$

$$h_u = c\sqrt{\frac{u^2 - \zeta^2}{u^2 - 1}}$$

$$h_\varphi = c\sqrt{\zeta^2 - 1}\sqrt{1 - u^2}$$

Оператор \hat{E}^2 в этих координатах:

$$\hat{E}^2 = \frac{(1 - u^2) \partial_u^2 + (\zeta^2 - 1) \partial_\zeta^2}{\zeta^2 - u^2}$$

Его ядро выражается через функции $\mathcal{F}(1.3)$, где для индекса (2) используются не полиномы Лежандра, а функции Лежандра второго рода.

Общее стационарное движение:

$$\begin{aligned} \psi = & c_1 \zeta \mathcal{F}_1(u) + c_2 \mathcal{F}_2(u) + \\ & + \sum_{N>2} c_N^{(1)} (\mathcal{F}_N(u) \mathcal{F}_{N-2}^{(1)}(\zeta) + \mathcal{F}_{N-2}(u) \mathcal{F}_N^{(1)}(\zeta)) + \\ & + \sum_{N>2} c_N^{(2)} (\mathcal{F}_N(u) \mathcal{F}_{N-2}^{(2)}(\zeta) + \mathcal{F}_{N-2}(u) \mathcal{F}_N^{(2)}(\zeta)) + \\ & + \sum_{N \geq 1} c_{No}^{(1)} \mathcal{F}_N^{(1)}(u) \mathcal{F}_N(\zeta) + c_{No}^{(2)} \mathcal{F}_N^{(2)}(\zeta) \mathcal{F}_N(u). \end{aligned}$$

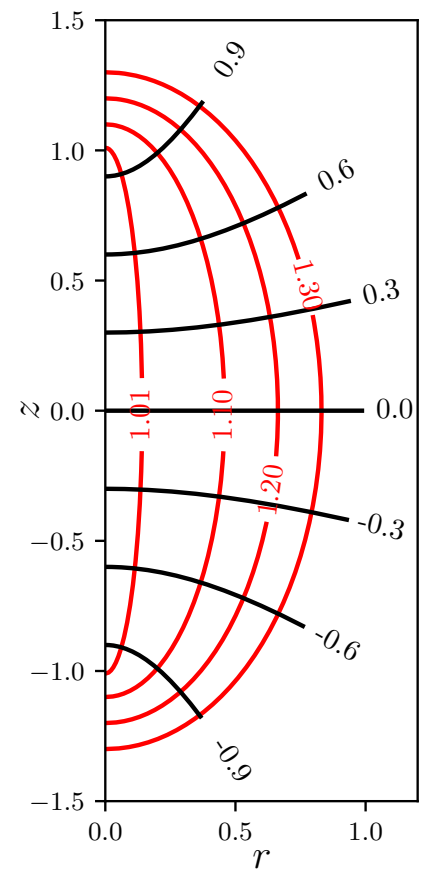


Рис. 29: Координаты вытянутого сфероида в меридиональной плоскости. Линии уровня ζ (красным) и u (черным).

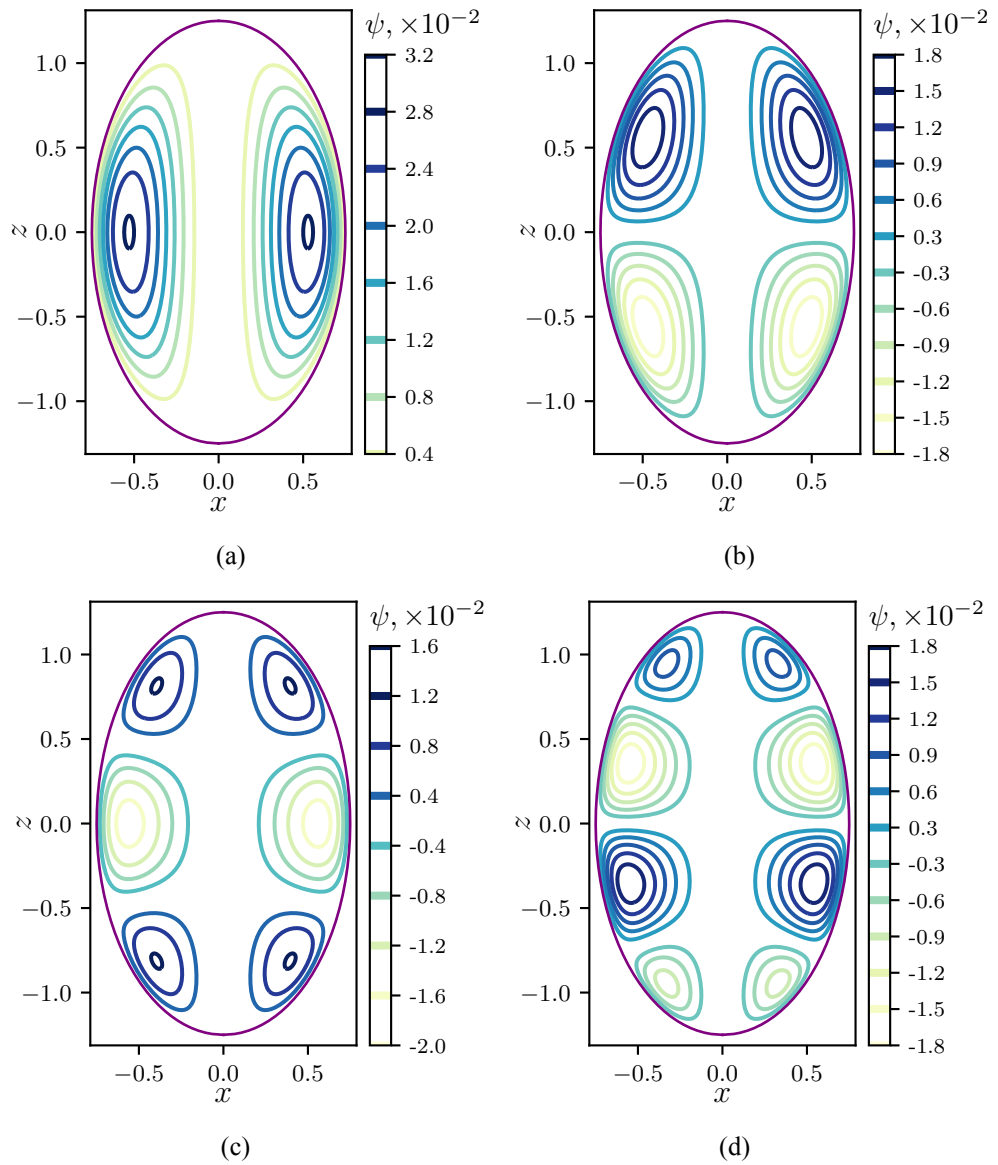


Рис. 30: Линии уровня функции тока (траектории жидких частиц) для первых четырёх базисных движений в вытянутом сфероиде. ($\zeta_0 = 1.25$).

Экспериментальная установка

Для практической реализации первой схемы (рис. 1) была проделана работа по приготовлению системы и проверки возможности наблюдения в ней термокапиллярной конвекции.

В качестве остова используется тонкая, проволока согнутая в кольцо с «лапками»(см. рис. 32).

Заметим, что равновесная форма капли в такой конфигурации - двояковыпуклая линза, однако в двух предельных случаях она хорошо приближается эллипсоидом: почти сферическая и сильно сплюснутая (см. рис. 31). Именно сильно сплюснутые капли интересны для изучения неустойчивости в них. Происходящее при этом на торцах не должно ощутимо влиять на движение во внутренней области (см. рис. 11 и 10).

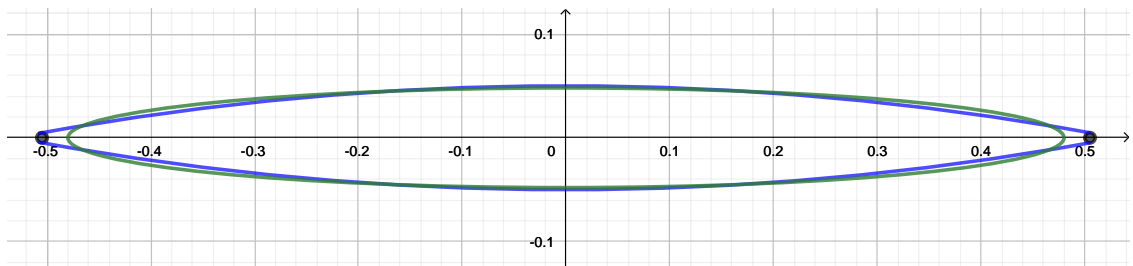


Рис. 31: Равновесная форма сильно сплюснутой капли (голубым), размещенной на кольцевом остове и её аппроксимация эллипсоидом(зелёным).

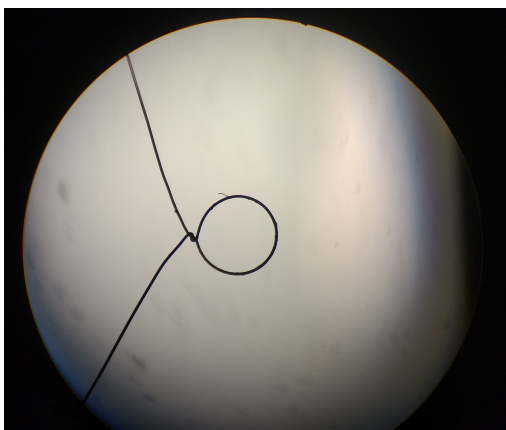


Рис. 32: Остов капли, подготовленный из серебряной проволоки $d = 7\mu$



Рис. 33: Трейсеры в капле.

Для индикации и исследования самого движения используется излучение от рассеянного источника и камера с большим (10 см) рабочим расстоянием и 10-кратным увеличением. Изображение с камеры поступает на экран компьютера. Для получения линий тока или частоты обращения жидкой частицы используются различные трейсеры – микро-частицы ($D \sim 1 \text{ мкм}$), помещенные (используется ультразвуковая ванна) в силиконовое масло вязкости 5 сСт.

Для обеспечения равномерного градиента были использованы два массивных алюминиевых цилиндра ($d = 15 \text{ мм}$), закреплённые соосно с помощью внеосевого держателя из текстолита. Верхний стержень (для избежания рэлееской конвекции в воздухе) нагревается от намотанной нихромовой проволоки, через которую пропускается ток. Разность температур в зазоре измеряется с помощью двух встречных термопар (медь-константан) и вольтметра, подключенного к медным концам.

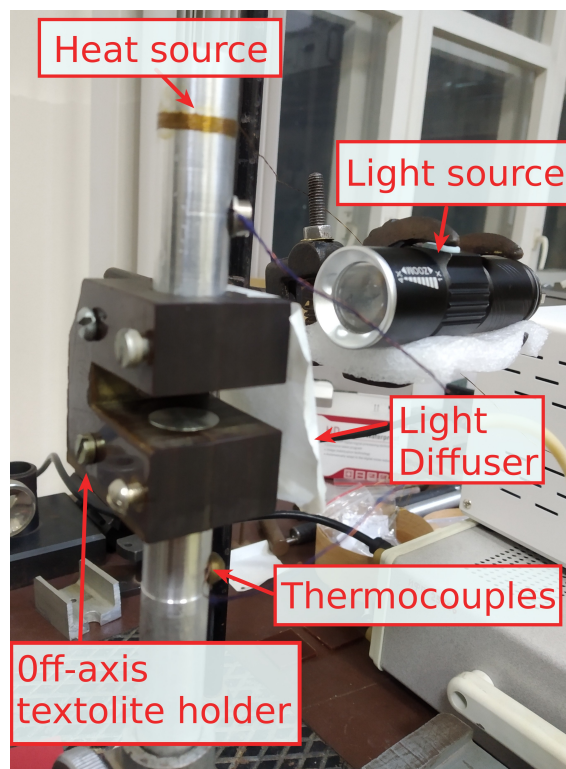


Рис. 34: Схема конструкции создания и контроля градиента температуры. Капля на остове размещается на стеклянные полоски-рельсы на торце нижнего цилиндра.

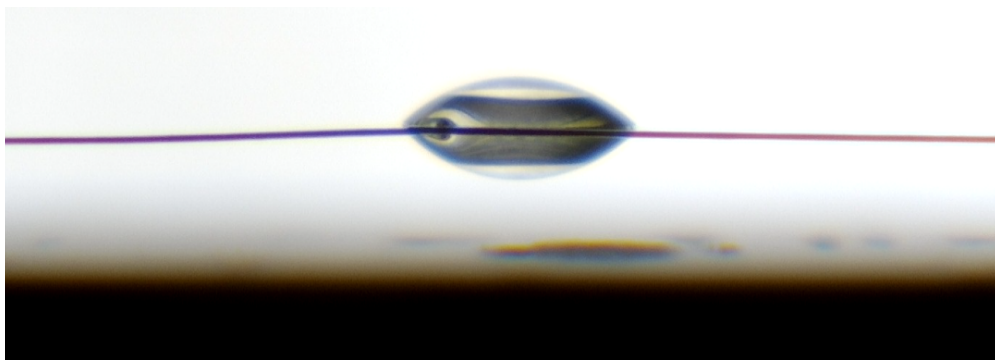


Рис. 35: Изображение капли. (Размещена ближе к поверхности цилиндра с целью демонстрации плоско-параллельности.) Темная часть возникает из-за геометрии и явления полного внутреннего отражения (см. рис 36).

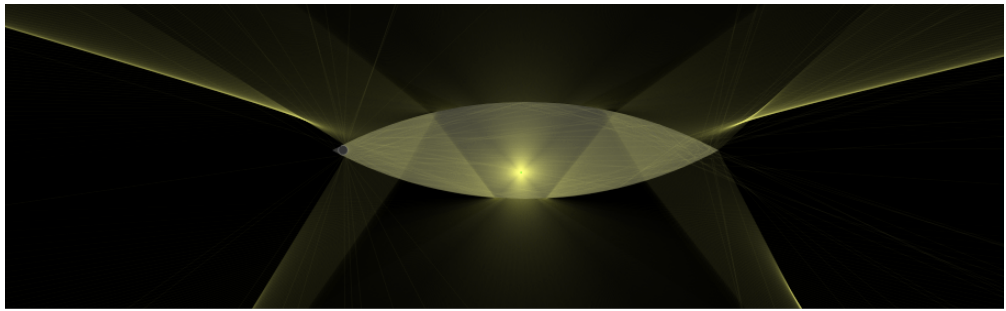


Рис. 36: Моделирование распространения лучей от источника в центральной плоскости капли. В горизонтальном направлении лучи в основном выходят в конечный угол, почти не выходя за изображенную каустику. Именно этот эффект в сплюснутых каплях обуславливает темную область и препятствует наблюдению конвекции. (Построено с помощью <https://ricktu288.github.io/ray-optics>.)

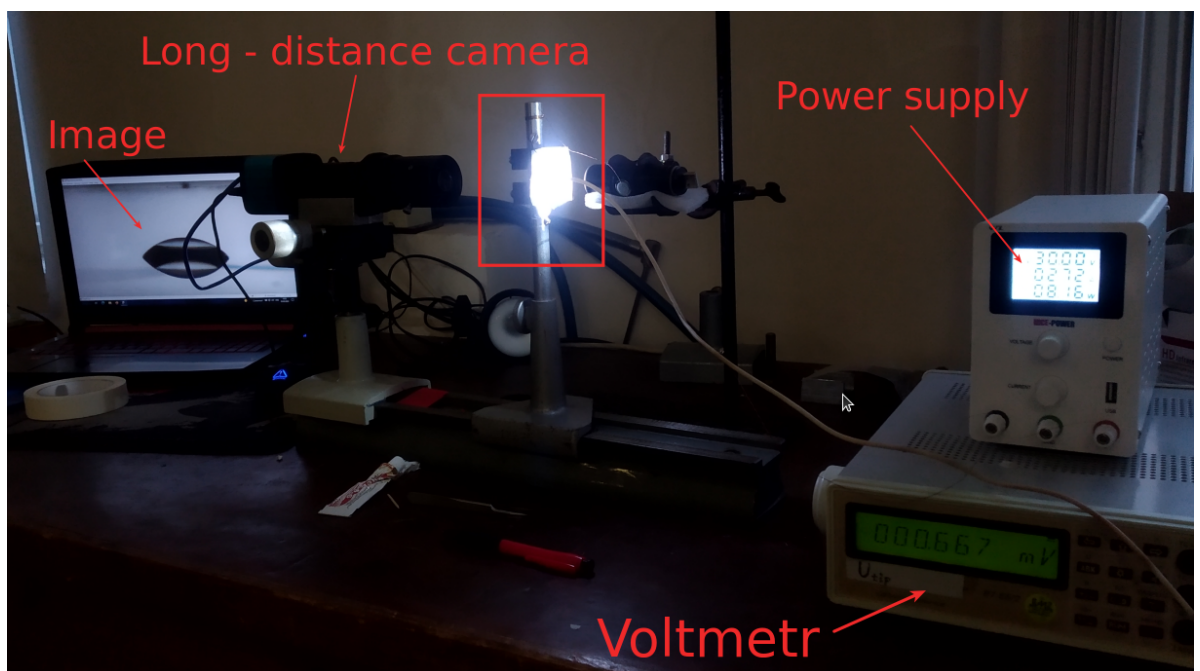


Рис. 37: Общий вид экспериментальной установки.

Описанная экспериментальная установка позволяет наблюдать конвекцию в достаточно выпуклых каплях. Для этого производится следующая процедура:

1. Записывается видео с частотой 30 fps длительностью, заведомо покрывающей несколько характерных периодов обращения трейсеров.

2. Из видео получаем набор кадров–изображений в формате RGB и конвертируем в черно-белую палитру, т.ч. кадр представляется как набор пикселей с некоторым числом в каждом из них.
3. Для каждого пикселя находится среднее по времени (по всем доступным кадрам) значение.
4. При пролете трейсера через какую-то точку происходит резкое изменение цвета в этой точке, поэтому для нахождения треков вычисляется карта событий — максимальное(по времени) отклонение значения в данном пикселе от среднего (см. рис 38(b)). Кроме этого для наглядности строится карта с наложением кадров (см. рис. 38(a)), т.е. в каждом пикселе вычисляется не амплитуда максимального отклонения от среднего, а само значение цвета в этот момент.
5. Для разных точек на найденных треках строится временная зависимость амплитуды отклонения от среднего.38(c) При стационарном течении точки на одном треке должны иметь одинаковый период появления трейсера.

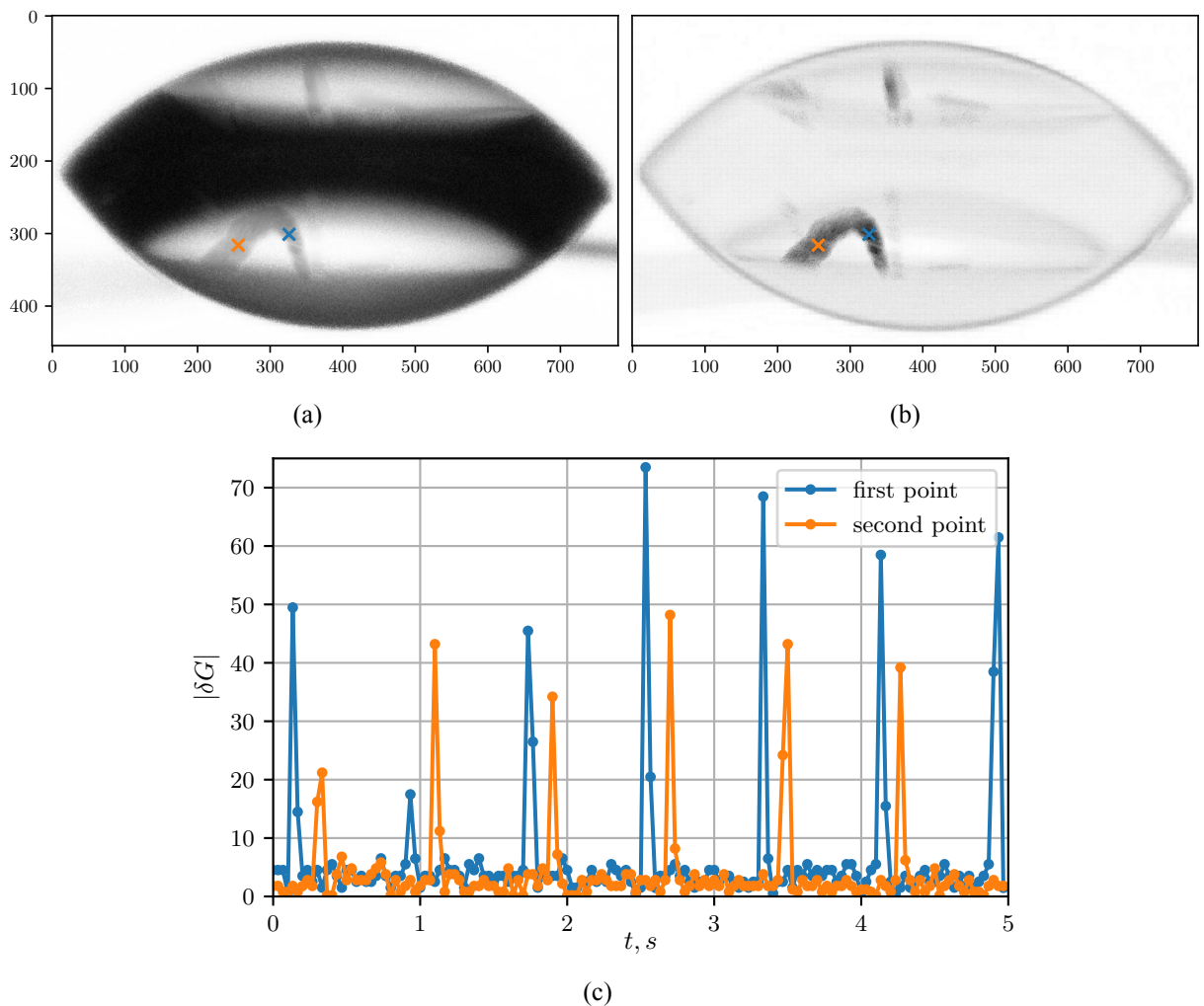


Рис. 38: Пример обработки экспериментальных данных. (a) — результат наложения кадров, (b) — карта событий (цветом передана амплитуда максимального отклонения сигнала в пикселе от среднего). Крестиками изображены точки, для которых на рис. (c) построена временная зависимость отклонения значения в пикселе от среднего. Можно заметить, что появление трейсера в этих точках действительно периодически $\Delta t \approx 0.8$ с и скоррелировано, т.е. движение жидкости регулярно и стационарно. (Съёмка в данном случае выполнена под некоторым углом к горизонту для лучшей контрастности, изображение трека сильно искажено из-за формы капли. $Ma \approx 50$, размер капли 0.45×1 (мм).)