

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”»**

Факультет физики

Тимошук Игорь Леонидович

**Киральные краевые моды и двумерные структуры  
из сверхпроводниковых кубитов**

Выпускная квалификационная работа  
по направлению подготовки 03.03.02 Физика  
образовательная программа «Физика»

Научный руководитель  
д. ф.-м. н., член-корр. РАН  
Ю. Махлин

Москва 2021

## Аннотация

При проведении топологических квантовых вычислений важную роль играет операция переплетения нулевых мод. Одним из способов её реализации является использование краевых майорановских состояний, самостоятельно перемещающихся вдоль границы [1]. В данной работе исследовано поведение подобных краевых состояний в шестиугольной модели Китаева, описано их применение при проведении топологических квантовых операций и предложен способ экспериментальной реализации подобной структуры.

# Содержание

|  |    |
|--|----|
| Аннотация . . . . .  | 2  |
| Введение . . . . .   | 4  |
| 1 Граничные состояния в шестиугольной модели Китаева . . . . . | 6  |
| 1.1 Шестиугольная модель Китаева . . . . .                     | 6  |
| 1.2 Приложение внешнего поля . . . . .                         | 9  |
| 1.3 Граница типа zigzag . . . . .                              | 10 |
| 1.3.1 Решение в одномодовой области . . . . .                  | 14 |
| 1.3.2 Решение в двухмодовой области . . . . .                  | 16 |
| 1.3.3 Решение вблизи точек $q_x = \pm 2\pi/3$ . . . . .        | 18 |
| 1.4 Граница типа armchair . . . . .                            | 21 |
| 2 Операции с краевыми модами . . . . .                         | 28 |
| 2.1 Локальное магнитное поле . . . . .                         | 28 |
| 2.2 Подключение внешних кубитов . . . . .                      | 31 |
| 2.3 Проведение операции обмена . . . . .                       | 32 |
| 3 Сверхпроводниковая реализация модели Китаева . . . . .       | 34 |
| 3.1 Структура кубита . . . . .                                 | 35 |
| 3.2 Межкубитные взаимодействия . . . . .                       | 37 |
| Заключение . . . . .   | 39 |
| Список литературы . . . . .                                    | 40 |

## Введение

Квантовые вычисления являются одним из интересных направлений современной физики. Однако все реализации квантового компьютера подвержены воздействию внешних шумов, значительно ограничивающих время когерентности и, соответственно, время работы квантового компьютера. Использование топологически защищенных квантовых состояний предположительно может повысить устойчивость элементов квантового компьютера к внешним воздействиям и сделать его более пригодным для решения прикладных задач.

Основная операция над топологическими модами, брейдинг (braiding - переплетение), может быть автоматизирована, если в качестве состояний будут использоваться киральные краевые моды [1]. Данные возбуждения локализованы вблизи границы из-за наличия щели в объемном спектре и движутся вдоль края с постоянной групповой скоростью, что позволяет переставлять их в пространстве без применения дополнительных внешних воздействий.

Киральные краевые состояния возникают в шестиугольной модели Китаева при приложении внешнего магнитного поля [2]. Спектр возбуждений в невозмущенной модели Китаева может быть найден точно, что позволяет аналитически описать поведение краевых мод. Изначально модель была построена из теоретических соображений, однако есть первые эксперименты, подтверждающие существование твердых тел с подобными взаимодействиями [3]. Зависимость объемной щели в спектре от приложенного магнитного поля подтверждена экспериментально [4, 5]. Для проведения операций над краевыми модами можно также использовать структуру сверхпроводниковых кубитов, эффективно моделирующую взаимодействия в модели Ки-

таева [6, 7].

Целью данной работы является исследование краевых состояний в шестиугольной модели Китаева и описание возможного способа экспериментальной реализации квантовых операций с краевыми модами в структуре сверхпроводниковых кубитов. Первая часть данной работы содержит получение аналитического спектра и координатного представления краевых состояний. Во второй части проанализированы различные воздействия на границу решетки модели Китаева и описано проведение операции обмена между внешним кубитом и краевым состоянием. В третьей части описана структура кубитов, основанная на [6], позволяющая экспериментально получить шестиугольную модель Китаева с необходимыми параметрами взаимодействия.

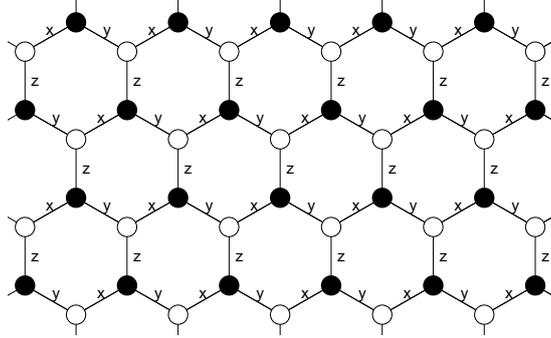


Рис. 1: Шестиугольная решетка модели Китаева

# 1 Граничные состояния в шестиугольной модели Китаева

В данном разделе описано получение спектра краевых состояний в шестиугольной модели Китаева. Исходные рассуждения повторяют вывод спектра возбуждений в В-фазе данной модели при наличии внешнего магнитного поля [2]. Затем рассмотрены два типа границ решетки - zigzag и armchair. Для них аналитически найдены спектры краевых мод и координатные распределения функций плотности вероятности краевых состояний.

## 1.1 Шестиугольная модель Китаева

Данная модель [2] была предложена как одна из точно решаемых двумерных спиновых систем. В узлах шестиугольной решетки (рис. 1) расположены спины  $1/2$ , взаимодействующие следующим образом:

$$\hat{H} = -J_x \sum_{x-links} \sigma_i^x \sigma_j^x - J_y \sum_{y-links} \sigma_i^y \sigma_j^y - J_z \sum_{z-links} \sigma_i^z \sigma_j^z. \quad (1)$$

Для анализа данного гамильтониана удобно перейти от спиновых операторов к Майорановским фермионам, используя преобразование

$$\sigma_j^x = ib_j^x c_j, \quad \sigma_j^y = ib_j^y c_j, \quad \sigma_j^z = ib_j^z c_j. \quad (2)$$

Данное преобразование сохраняет коммутационные соотношения матриц Паули, однако для соблюдения свойства  $\sigma_j^x \sigma_j^y \sigma_j^z = i$  на операторы  $b_j^x, b_j^y, b_j^z, c_j$  накладывается дополнительное условие

$$D_j = b_j^x b_j^y b_j^z c_j = 1. \quad (3)$$

Состояния, для которых оно выполняется, будем называть физическими.

В результате данного преобразования произведение двух матриц Паули переходит в  $-b_j^\alpha c_j b_k^\alpha c_k$ . Заметим, что оператор  $\hat{u}_{jk} = ib_j^\alpha b_k^\alpha$ , соответствующий взаимодействию вдоль одного ребра решетки, коммутирует с гамильтонианом, однако не сохраняет условие (3). Произведение  $W_p = \hat{u}_{jk} \hat{u}_{kl} \hat{u}_{lm} \hat{u}_{mn} \hat{u}_{ni} \hat{u}_{ij}$  этих операторов, соответствующих 6 ребрам, образующим один шестиугольник, коммутирует с гамильтонианом и переводит физические состояния только в физические [2].

В основном состоянии все операторы  $\hat{u}_{jk}$  равны 1 (для случая  $J_x, J_y, J_z > 0$ ) [2]. Для получения спектра вблизи минимальной энергии рассматриваем состояния, в которых данные операторы равны 1. Тогда гамильтониан становится квадратичным по  $c_j$  и может быть записан в виде  $H = \frac{i}{4} \sum_{j,k} A_{jk} c_j c_k$ , где  $A_{jk}$  равны соответствующим константам связи (рис. 1). Трансляционная инвариантность позво-

ляет совершить переход в фурье-представление

$$a_{\mathbf{q},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_s e^{-i(\mathbf{q},\mathbf{r}_s)} c_{s\lambda}. \quad (4)$$

После преобразования гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q},\lambda,\mu} iA_{\lambda\mu}(\mathbf{q}) a_{-\mathbf{q},\lambda} a_{\mathbf{q},\mu},$$

$$iA_{\lambda\mu}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & if(\mathbf{q}) \\ -if(\mathbf{q})^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$f(\mathbf{q}) = 2 \left( J_x e^{i(\mathbf{q},\mathbf{n}_1)} + J_y e^{i(\mathbf{q},\mathbf{n}_2)} + J_z \right),$$

$$\mathbf{n}_1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \mathbf{n}_2 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  обозначают принадлежность узла, на котором действует оператор, к черной или белой подрешетке.

В результате диагонализации получается спектр возбуждений

$$\varepsilon(\mathbf{q}) = \pm 2 \left| J_x e^{i(\mathbf{q},\mathbf{n}_1)} + J_y e^{i(\mathbf{q},\mathbf{n}_2)} + J_z \right|. \quad (6)$$

Если для  $J_x, J_y, J_z$  выполняется неравенство треугольника, то существуют два возбуждения с нулевой энергией и соответствующие им волновые вектора противоположны и равны по модулю. Обозначим их как  $\pm\mathbf{q}^*$ .

## 1.2 Приложение внешнего поля

Теперь построим спектр для  $J_x = J_y = J_z = J$  при приложении слабого магнитного поля

$$V = - \sum_j \left( h_x \sigma_j^x + h_y \sigma_j^y + h_z \sigma_j^z \right), \quad h_x, h_y, h_z \ll J. \quad (7)$$

Первый и второй порядки теории возмущений качественно не влияют на спектр [2], поэтому остановимся на третьем порядке. Произведения матриц Паули вида  $\sigma_j^\alpha \sigma_k^\alpha \sigma_l^\beta$  всегда представимы в виде произведения возмущений первого и второго порядка и не влияют на спектр. Остаются слагаемые вида  $\sigma_j^x \sigma_k^y \sigma_l^z$ . Введем коэффициент  $\kappa$ , возникающий при суммировании по промежуточным состояниям, для которых  $\sigma_j^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) отлично от 0. Каждое из этих состояний имеет энергию  $\sim J$  [2], поэтому  $\kappa \sim -\frac{h_x h_y h_z}{J^2}$ . В таком случае

$$V^{(3)} = -\kappa \sum_{j,k,l} \sigma_j^x \sigma_k^y \sigma_l^z. \quad (8)$$

Это произведение не распадается на независимые слагаемые если  $i, j$  и  $k$  - это три узла, соединенные двумя ребрами или три узла вокруг четвертого. Второй случай соответствует 4-х частичному взаимодействию, и не влияет на спектр [2]. Мы рассматриваем только произведения первого типа. В фермионном представлении выражение (8) записывается как

$$\kappa \sigma_j^x \sigma_k^y \sigma_l^z = -i \kappa b_j^x c_j b_k^y c_k b_l^z c_l = i \kappa \hat{u}_{jl} \hat{u}_{kl} D_l c_k c_j = i \kappa c_k c_j. \quad (9)$$

Эти слагаемые соответствуют связям между соседними фермио-

нами одной подрешетки. Тогда при переходе в фурье-представление в гамильтониане появляются новые матричные элементы  $\Delta(\mathbf{q}) = 4\kappa (\sin(\mathbf{q}, \mathbf{n}_1) + \sin(\mathbf{q}, -\mathbf{n}_2) + \sin(\mathbf{q}, \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1))$ , возникающие из-за слагаемых вида (9)

$$iA_{\lambda\mu}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \Delta(\mathbf{q}) & if(\mathbf{q}) \\ -if(\mathbf{q})^* & -\Delta(\mathbf{q}) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

С учетом новых слагаемых спектр возбуждений вблизи  $\mathbf{q}^*$  принимает вид

$$\varepsilon(\mathbf{q}) = \pm \sqrt{3J^2\delta\mathbf{q}^2 + \Delta^2}, \quad \delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^*, \quad \Delta = 6\sqrt{3}\kappa. \quad (11)$$

### 1.3 Граница типа zigzag

Наличие щели в объемном спектре приводит к отсутствию объемных фермионов в основном состоянии системы. Однако из топологических соображений на границе должна существовать мода с нулевой энергией. Рассмотрим решетку модели Китаева, занимающую нижнюю полуплоскость, и имеющую границу при  $y = 0$  (рис. 2). Гамильтониан данной системы

$$H = \frac{i}{4} \sum_{j,k} \hat{A}_{j,k} c_j c_k + h_z \sum_j i b_j^z c_j + i\kappa \sum_{j,k} \hat{B}_{j,k} c_j c_k \quad (12)$$

содержит три слагаемых разного порядка малости.

Первое слагаемое аналогично невозмущенному гамильтониану модели Китаева (6), за исключением отсутствия z-связей у верхнего ряда узлов. Третье слагаемое соответствует вкладу (9) и имеет третий порядок малости по  $h$ . Второе слагаемое первого порядка малости по

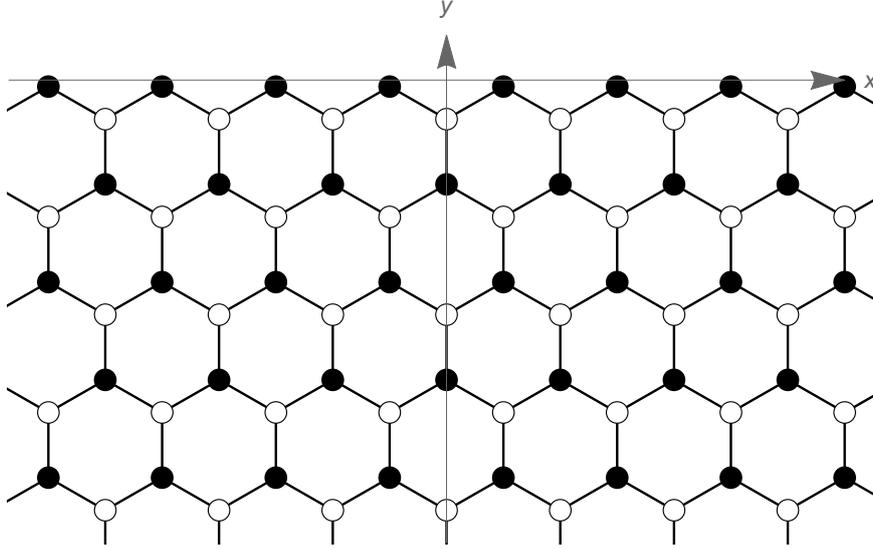


Рис. 2: Граница шестиугольной решетки типа zigzag

$h$  соответствует вкладу неспаренных  $\sigma^z$  операторов верхнего ряда.

Данная система трансляционно инвариантна вдоль оси  $x$ , что позволяет совершить преобразование Фурье по этой координате

$$\begin{aligned}
 c_{q_x,0} &= b_{q_x}^z = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_i e^{-iq_x x_i} b_i^z, \\
 c_{q_x,n} &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_i e^{-iq_x x_i} c_{i,n},
 \end{aligned} \tag{13}$$

где  $n$  - номер ряда узлов, указанный на (рис. 3),  $x_i$  - пространственная координата  $i$ -ого узла.

В результате данного преобразования происходит переход от фермионов, связанных с узлами решетки к фермионам, характеризующим ряды узлов. Каждое состояние системы задается набором чисел  $u_0, u_1, u_2, \dots$ , которые определяют коэффициенты разложения этого состояния по фермионам «рядов». В новом представлении гамильто-



импульсах  $q_x$  существует нулевая мода

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Исходя из вида гамильтониана (15) при  $r/s > 1$  существует еще одно локализованное на границе нулевое решение. В области  $2\pi/3 < q_x < 4\pi/3$  состояние

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \\ 0 \\ -2 \cos \frac{q_x}{2} C_2 \\ 0 \\ 4 \cos^2 \frac{q_x}{2} C_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (18)$$

является собственным вектором матрицы (15) с нулевым собственным значением. При этом модули его компонент затухают с увеличением номера ряда, которому они соответствуют.

В дальнейшем удобно отдельно рассматривать область импульсов с одной и с двумя граничными модами.





деляемую формулой  $\varepsilon^{(1)}(q_x) = \sum_k u_j V_{jk} u_k$ . Моде, имевшая в исходном гамильтониане (19) нулевую энергию, получает поправку к энергии

$$\varepsilon_1(q_x) = -\frac{h_z^2 \kappa}{J^2} \frac{\sin q_x + \operatorname{tg} \frac{q_x}{2}}{\cos^2 \frac{q_x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{h_z^2}{4J^2}}. \quad (23)$$

Волновой вектор  $q_x = 0$  соответствует краевой моде с нулевой добавкой к энергии. Таким образом существует нулевая краевая мода, имеющая групповую скорость

$$v_{gr} = \left. \frac{d\varepsilon_1(q_x)}{dq_x} \right|_{q_x=0} = -\frac{h_z^2 \kappa}{2J^2}. \quad (24)$$

Знак групповой скорости и, соответственно, направление движения краевой моды, зависит от знака  $\kappa \sim h_x h_y h_z$ .

### 1.3.2 Решение в двухмодовой области

Теперь перейдем к рассмотрению спектра в области  $2\pi/3 < q_x < 4\pi/3$ . Здесь основное состояние гамильтониана двукратно вырождено при  $h_z = 0$ . Добавление слагаемого

$$\hat{V} = 2ih_z (c_0 c_1 - c_1 c_0), \quad (25)$$

имеющего первый порядок малости по  $h_z$ , приводит к расщеплению уровней энергии состояний (17) и (18). Секулярное уравнение на поправки к энергиям уровней имеет вид

$$\hat{V} - \varepsilon(q_x) \cdot \hat{\mathbb{I}} = 2ih_z \sqrt{1 - 4 \cos^2 \frac{q_x}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon(q_x) & 0 \\ 0 & \varepsilon(q_x) \end{pmatrix} = 0. \quad (26)$$

Решением такого уравнения является спектр

$$\varepsilon_2(q_x) = \pm 2h_z \sqrt{1 - 4 \cos^2 \frac{q_x}{2}} \quad (27)$$

и правильные волновые функции нулевого приближения

$$U_1 = \frac{\sqrt{1 - 4 \cos^2 \frac{q_x}{2}} \psi_2 + i\psi_1}{\sqrt{2}}, \quad (28)$$

$$U_2 = \frac{\sqrt{1 - 4 \cos^2 \frac{q_x}{2}} \psi_2 - i\psi_1}{\sqrt{2}}.$$

Видно, что в данной области энергия краевой моды имеет порядок  $h_z$ . При волновых векторах вдали от точек  $\pm 2\pi/3$  энергия не обращается в 0, что подтверждает существование ровно одной краевой моды с нулевой энергией (случай вблизи точек  $\pm 2\pi/3$  рассмотрен далее).

Основываясь на результатах последних пунктов можно построить спектр краевых мод (рис. 4). Синим цветом изображен спектр в одномодовой области (23), оранжевым - спектр в двухмодовой области (27), а серым - спектр объемных состояний (11). Данный результат согласуется с качественным спектром, приведенным в статье Китаева [2], за исключением поведения вблизи точек  $q_x = \pm 2\pi/3$ . Следующий пункт посвящен описанию спектра краевых мод в этой области.

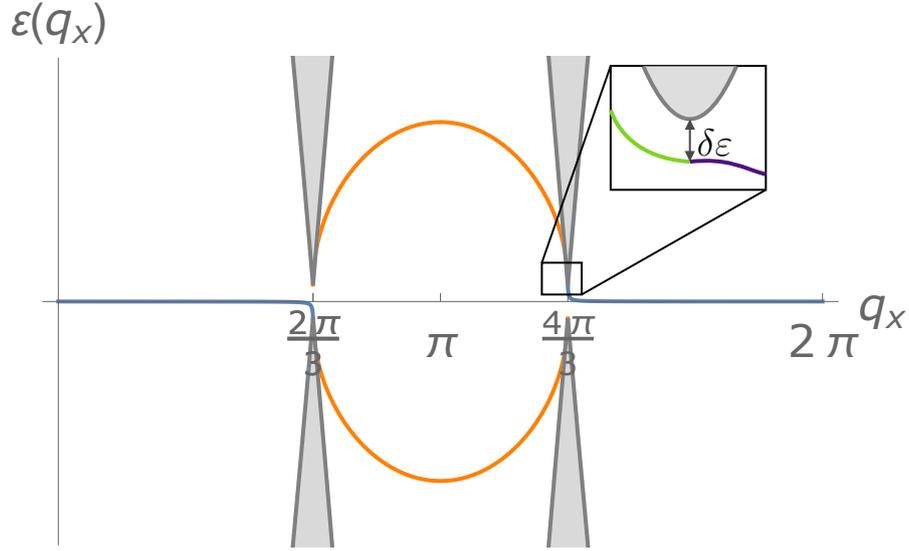


Рис. 4: Спектр краевых мод для границы типа zigzag

### 1.3.3 Решение вблизи точек $q_x = \pm 2\pi/3$

Данные рассуждения не влияют на основную цель анализа краевых мод - исследование низкоэнергетических краевых состояний, и приведены для более полного описания спектра.

При  $q_x \rightarrow \pm 2\pi/3$  спектр объемных мод имеет вид  $\varepsilon(q_y) = \pm \sqrt{3J^2 \delta q^2 + \Delta^2}$ , где  $\delta q = q_y - q_y^*$ ,  $q_y^*$  - волновой вектор, при котором энергия объемной моды принимает минимальное значение  $\Delta = 6\sqrt{3}\kappa$  согласно (11). Из соображений непрерывности ветвь спектра, соответствующая краевой моде, в точке  $q_x = 2\pi/3$  в верхней полуплоскости и точке  $q_x = 4\pi/3$  в нижней должна становиться частью объемного спектра, так как  $\varepsilon(q_x)$  непрерывен, а число краевых мод в этой области уменьшается на 1.

В двух оставшихся точках энергия краевой моды из области  $|q_x| <$

$2\pi/3$  (23) принимает то же значение  $\varepsilon(2\pi/3) = 6\sqrt{3}\kappa$ , что и объёмная мода. Из-за подобного совпадения по энергиям необходимо учитывать более высокие порядки теории возмущений, создающие расщепление между объёмными состояниями и граничной модой. Попробуем разными способами оценить данную поправку.

Заметим, что при самых малых  $\delta q$  энергии объёмных мод  $\varepsilon(q) = \pm\sqrt{3J^2\delta q^2 + \Delta^2}$  становятся одного порядка с энергией граничной моды. Это верно для импульсов, отличающихся на  $\sim \kappa/J$  от импульса граничной моды. При  $\kappa/J \ll |\delta q_x| \ll h_z/J$  полученный по теории возмущений спектр (23) остается верным в главном порядке, поэтому при приближении к точке перехода энергия моды всё ещё принимает значения, близкие к  $\Delta$ . В этой области энергия краевой моды отличается от  $\Delta$  на  $\delta\varepsilon$ ,  $\kappa^2 \ll \delta\varepsilon \ll \Delta$  (рис. 4). Например при  $|\delta q_x|$ , близком к  $\kappa/J$ , возникающая щель  $\delta\varepsilon \sim \Delta\kappa/h_z \sim h_z^5/J^4$ . Так как при  $|\delta q_x| < \kappa/J$  нет причин для резкого изменения энергии краевой моды, то и при  $q_x = 2\pi/3$  стоит ожидать  $\delta\varepsilon$  того же порядка.

Для следующей оценки будем считать, что краевое состояние при  $q_x = 2\pi/3$  экспоненциально затухает в объём с некоторой глубиной проникновения  $l$  и имеет некоторую энергию  $\epsilon = \Delta - \delta\varepsilon$ . При этом, исходя из предыдущей оценки, ожидаем, что  $\delta\varepsilon$  мало по сравнению с  $\Delta$ . В объёме спектр вблизи минимума имеет вид  $\varepsilon(\delta q) = \sqrt{3J^2\delta q^2 + \Delta^2}$ . Тогда мнимая часть волнового вектора краевой моды  $\delta q = \frac{\pm i}{\sqrt{3}J}\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}$ , а глубина проникновения данного состояния  $l = \sqrt{\frac{3J^2}{\Delta^2 - \epsilon^2}} \approx \sqrt{\frac{3J^2}{2\delta\varepsilon\Delta}}$ .

Для получения локализованной на границе моды домножим на  $A \cdot e^{-y_i/l}$  коэффициенты разложения краевой моды (20) по операторам  $c_i$  (13).  $A$  определяется из условия нормировки. Исходя из вида

гамильтониана (15) крайний ряд  $c_0$  должен входить с коэффициентом в  $A \cdot e^{-y_0/l} \cdot h/J$ . Условие нормировки для  $A$ :

$$A^2 \left( \frac{J^2}{h^2} + \int_0^\infty dy e^{-2y/l} \right) = 1, \quad (29)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{J^2}{h^2} + \frac{l}{2}}} \approx \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

И состояние имеет вид

$$\psi_{2\pi/3} = \sqrt{\frac{2}{l}} \begin{pmatrix} \frac{J}{h} \\ 0 \\ e^{-1/l} \\ 0 \\ -e^{-2/l} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Вычислим энергию данной краевой моды по теории возмущений способом, аналогичным получению спектра (23). Будем считать, что она равна усреднению возмущения (22) по состоянию (30). Тогда все ряды, за исключением  $c_0$ , дают вклад в энергию состояния  $\Delta$ , а  $c_0$  имеет нулевую энергию. В этом случае энергия такой моды

$$\epsilon = \Delta \left( 1 - \frac{J^2 A^2}{h^2} \right) = \Delta \left( 1 - \frac{2J^2}{h^2} \sqrt{\frac{2\delta\epsilon\Delta}{3J^2}} \right). \quad (31)$$

Откуда получается выражение

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &= \Delta - \epsilon = \Delta \frac{2J^2}{h^2} \sqrt{\frac{2\delta\varepsilon\Delta}{3J^2}} \\ \delta\varepsilon &= \frac{8J^2\Delta^3}{3h^4} \sim \frac{h^5}{J^4}.\end{aligned}\tag{32}$$

Видно, что полученная формула дает ответ того же порядка, что и экстраполяция формулы (23), описанная выше. Данная оценка работает в области  $\delta q_x \sim \kappa/J$ , так как при больших отклонениях нарушается вид объемного спектра (11).

Приведенные рассуждения позволяют аналитически описать поведение краевых состояний для границы типа zigzag. Нулевая краевая мода имеет глубину проникновения порядка размера ячейки решетки, что позволяет моделировать поведение данные состояния используя небольшое число рядов решетки модели Китаева.

## 1.4 Граница типа armchair

Теперь рассмотрим второй тип границы шестиугольной решетки (рис. 5). Для данного края опять имеется трансляционная инвариантность вдоль границы структуры, что позволяет перейти в Фурье представление способом, аналогичным (13). В этом случае, однако, необходимо помнить, что в каждом горизонтальном ряду имеется два типа

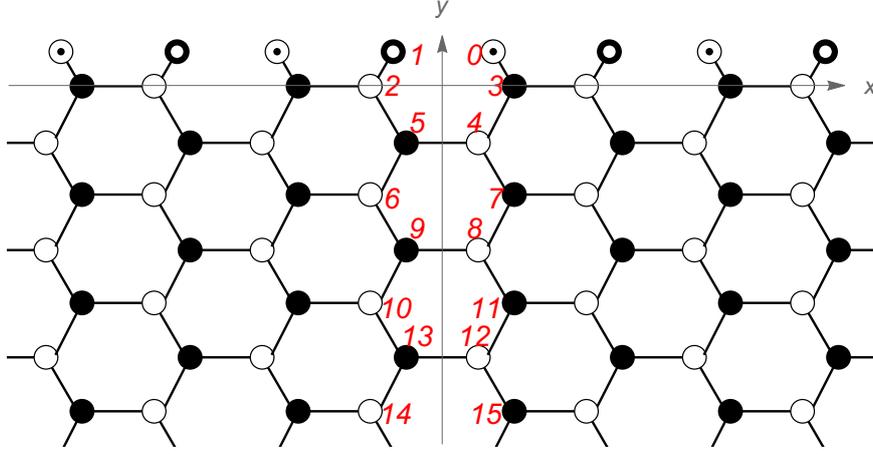


Рис. 5: Граница шестиугольной решетки типа armchair

узлов, поэтому преобразование имеет вид

$$\begin{aligned}
 c_{q_x,0} &= b_{q_x,w}^x = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_i e^{-iq_x x_i} b_{i,w}^x, \\
 c_{q_x,1} &= b_{q_x,b}^y = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_i e^{-iq_x x_i} b_{i,b}^y, \\
 c_{q_x,2k} &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_i e^{-iq_x x_i} c_{i,w,n}, \\
 c_{q_x,2k+1} &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_i e^{-iq_x x_i} c_{i,b,n}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь индексы  $w$  и  $b$  обозначают принадлежность к белой и черной подрешеткам, а индексы  $2k$  и  $2k+1$  соответствуют рядам подрешеток (рис. 5).

В этом представлении гамильтониан записывается следующим



существуют две краевые моды с нулевой энергией

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Посмотрим, как изменяются энергии данных состояний при учете слагаемых порядка  $\hbar$ . Первый порядок теории возмущений не создает поправок к энергии граничных мод (36), так как не содержит матричных элементов между состояниями  $V_1$  и  $V_2$ . Второй порядок теории возмущений содержит суммирование по объемным модам с энергиями  $\sim J$ , поэтому возникающие поправки имеют порядок  $\sim \hbar^2/J$ . При анализе собственных векторов матрицы (34) получается, что для решетки типа `armchair` не существует локализованных на границе решений, подобных (20). Локализованные на границе решения возникают только при учете слагаемых порядка  $\kappa$ , однако в этом случае Гамильтониан становится слишком сложным для поиска точных решений.

Можно построить приблизительный вид спектра краевых состояний, используя следующие соображения. Оба объемных состояния с минимальной энергией (11) в данном случае достигаются при  $q_x = 0$ . Аналогично рассуждениям, приведенным для `zigzag`, одна из ветвей спектра краевой моды вблизи этой точки может становиться частью объемного спектра (рис. 6). Гамильтониан (34) симметричен относи-

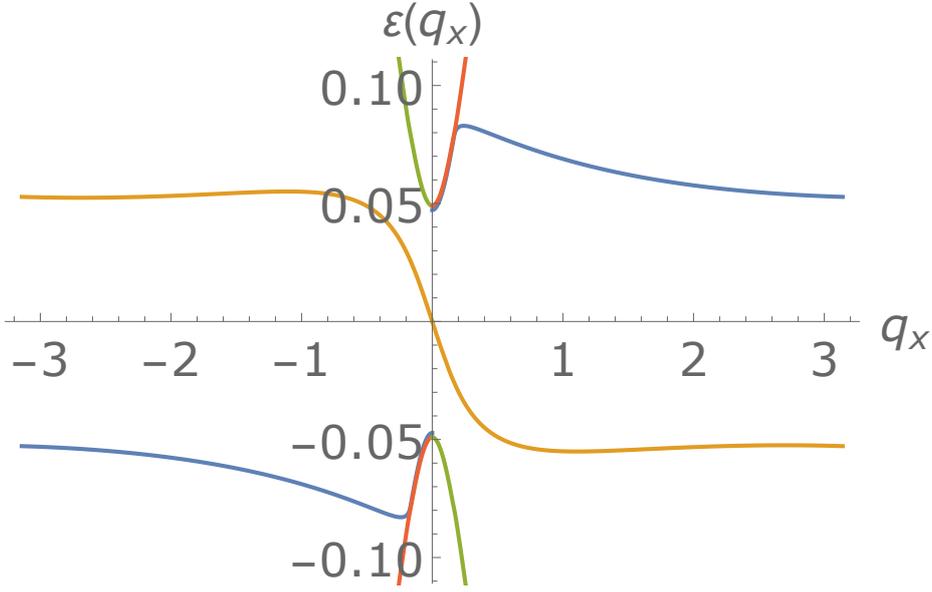


Рис. 6: Численный спектр краевой моды для границы типа armchair при  $h = 0.3$ ,  $\kappa = 0.027$ ,  $J = 1$

тельно точки  $q_x = 0$ . Из топологических соображений должно существовать одно граничное состояние, и, соответственно, оно должно быть единственным при данном  $q_x$ . В силу симметрии относительно  $q_x = 0$  нулевой моде могут соответствовать всего два  $q_x$ :  $q_x = 0$  и  $q_x = \pi$ . Однако при всех  $q_x$  за исключением узкого участка вблизи  $q_x = 0$  существуют две краевые моды. Следовательно для нулевой краевой моды  $q_x = 0$ .

Попробуем получить групповую скорость нулевой моды. Для этого найдем нулевое решение для  $q_x = 0$ , а затем в первом порядке теории возмущений получим поправку к энергии при малом  $q_x$ . Объемный спектр моды (11) позволяет получить условие на волновой вектор подобного состояния  $\delta q_y = \pm i \frac{\Delta}{\sqrt{3}J}$ . Так как решение должно убывать при  $y \rightarrow -\infty$ , то  $\delta q_y = -\frac{i}{\sqrt{3}} \frac{\Delta}{J}$ . При данном направлении осей необходимо поменять местами компоненты  $q_x$  и  $q_y$  вектора  $\mathbf{q}^*$ .

Тогда, согласно (6),  $q_y^* = \pi \pm \frac{\pi}{3}$ . Уравнение на нулевую собственную моду в объеме можно записать как

$$\begin{pmatrix} \Delta & if(\mathbf{q}^*) \\ -if(\mathbf{q}^*)^* & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_w \\ \alpha_b \end{pmatrix} \left( e^{\frac{2\pi i}{3}y} + \lambda e^{-\frac{2\pi i}{3}y} \right) e^{\frac{\Delta y}{\sqrt{3}J}} = 0. \quad (37)$$

В данном случае  $f(\mathbf{q}^* + \delta q_y \mathbf{e}_y) = i\Delta$ , то есть  $\alpha_w = \alpha_b$ .

Коэффициент  $\lambda$  можно получить, используя граничное условие при  $y = 0$ . Отсутствие узлов решетки при  $y > 0$  требует равенства 0 моды на рядах, находящихся выше, чем ряды 2 и 3 (нумерация рядов указана на (рис. 5)). Для этих узлов  $y = \sqrt{3}/2$ , откуда волновая функция имеет вид

$$\psi_0 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{2\pi}{3}(y - \sqrt{3}/2)\right) e^{\frac{\Delta y}{\sqrt{3}J}}. \quad (38)$$

Таким образом коэффициенты рядов 0 и 1 равны 0.

Отличие оператора (34) от гамильтониана полной плоскости, с учетом показанного выше граничного условия, проявляется в отсутствии слагаемых порядка  $\kappa$  у рядов 2 и 3. При  $q_x = 0$  эти слагаемые для белых и черных узлов имеют одинаковые модули и разные знаки, поэтому их суммарный вклад в энергию состояния равен 0. Попробуем оценить влияние этого отличия от непрерывной плоскости на групповую скорость по теории возмущений. Глубина проникновения краевого состояния  $\sim J/\kappa$ , поэтому коэффициенты данного разложения в крайних рядах  $\sim \kappa/J$ . Отсюда матричный элемент возмущения, затрагивающего лишь крайний ряд, будет мал как  $\kappa^2/J^2$ . Это позволяет не учитывать граничные эффекты при вычислении групповой скорости краевой моды.

Определим  $A$  из условия нормировки. Так как  $\Delta \ll J$ , то при усреднении  $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}y\right)$  можно заменить на  $1/2$ . В результате  $A = \sqrt{2\sqrt{3}\frac{J}{\Delta}}$ .

Теперь найдем возмущение, возникающее при малом  $q_x$ . Функцию  $f(\mathbf{q}^*)$  можно разложить как

$$\begin{aligned} 2J \left( \exp\left(\frac{i\sqrt{3}q_x}{2} + \frac{iq_y}{2}\right) + \exp\left(\frac{i\sqrt{3}q_x}{2} - \frac{iq_y}{2}\right) + 1 \right) &\approx \\ &\approx 2J \left( -2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \left( 1 + \frac{i\sqrt{3}q_x}{2} \right) + 1 \right). \end{aligned} \quad (39)$$

То есть искомое разложение  $f(\mathbf{q}^* + \delta q_x \mathbf{e}_x) = iJ\sqrt{3}\delta q_x$ . В этом случае групповая скорость

$$v_g = \frac{1}{\delta q_x} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -J\sqrt{3}\delta q_x \\ -J\sqrt{3}\delta q_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -J\sqrt{3}. \quad (40)$$

Вклад, возникающий из разложения  $\Delta(\mathbf{q})$ , равен 0, так как матричные элементы сокращают друг друга.

Полученные результаты позволяют сделать некоторые оценки о поведении краевой моды для границы типа *armchair*. Состояния с энергией, близкой к нулю, обладают большой глубиной проникновения, что затрудняет экспериментальную реализацию подобных состояний на структуре сверхпроводниковых кубитов. Глубина проникновения уменьшает силу взаимодействия с внешними кубитами 2.2, а большая скорость движения моды затрудняет проведение операции обмена 2.3. Дальнейшие рассуждения приведены для границы типа *zigzag*. Экспериментально реализовать край только одного типа можно, например, в треугольном или шестиугольном образце.

## 2 Операции с краевыми модами

Для проведения экспериментов с краевыми модами необходимо изложить способ переплетения двух мод и обмена краевой моды с внешним кубитом. В данном разделе приведены способы проведения подобных операций для наиболее низкоэнергетических мод границы типа zigzag. В качестве возможных управляемых воздействий на границу рассмотрены приложение магнитного поля к одному или нескольким спином решетки и регулируемое взаимодействие между спином решетки и внешним кубитом.

Краевой модой в данном разделе называется волновой пакет, являющийся суммой нескольких собственных мод

$$\Psi = \sum_{q_x} f(q_x) \psi_{q_x}. \quad (41)$$

При этом  $f(q_x)$  выбрано так, что в координатном пространстве  $\Psi$  локализовано на участке длины  $S$ , но при этом в импульсном пространстве  $f(q_x)$  отлично от 0 только в области, где спектр краевых мод (23) можно считать линейным. При выполнении данных условий волновой пакет  $\Psi$  перемещается вдоль края с групповой скоростью (24).

### 2.1 Локальное магнитное поле

Для начала рассмотрим наиболее простой тип возмущения. В дополнение к постоянным эффективным полям  $h_x, h_y, h_z$  приложим к одному из спинов крайнего ряда поле  $h$ , направленное вдоль оси  $z$ . Подобное возмущение можно записать через локальные фермионы

(2) в виде

$$V = h\sigma_j^z = ihb_j^z c_{1,j}. \quad (42)$$

Используя трансляционную инвариантность невозмущенной системы вдоль границы можно перейти в Фурье представление (13). После преобразования данное возмущение имеет вид

$$V = ih \frac{1}{L} \sum_{q_x, k_x} e^{iq_x r_j} b_{q_x}^z e^{ik_x r_j} c_{1, k_x}. \quad (43)$$

Положим  $r_j = 0$  и посмотрим на поправки к энергиям краевых состояний  $\psi_{q_x}$  (20), возникающие из

$$V = ih \frac{1}{L} \sum_{q_x, k_x} b_{q_x}^z c_{1, k_x} \quad (44)$$

Действие оператора  $c_{1, k_x}$  на любое состояние  $\psi_{q_x}$  дает 0, поэтому в первом порядке теории возмущений поправок к энергии не возникает. Второй порядок теории возмущений в координатном представлении имеет вид

$$V^{(2)} = h^2 b_j^z \sum_l \frac{\alpha_l}{\varepsilon_l} b_j^z, \quad (45)$$

где  $\alpha_l$  - коэффициенты разложения оператора  $c_{1, k_x}$  по объемным состояниям, а  $\varepsilon_l$  - энергии объемных состояний. Так как  $b_j^{z^2} = 1$ , то данное возмущение добавляет постоянную величину к гамильтониану, то есть не влияет на поведение краевых состояний системы.

Данный эффект можно интерпретировать используя аналогию с рассеянием на примеси. Здесь рассматривается одномерная система (край) с локальной неоднородностью. Налетающая частица (краевая мода) может рассеяться и перейти в другое состояние с той же энер-

гией. Однако из-за киральности существует лишь одно граничное состояние, поэтому подобная неоднородность не вызывает переходов, а лишь приводит к набегу фазы при её преодолении.

Теперь рассмотрим случай, когда подобные возбуждения приложены к соседним узлам на краю решетки

$$V = h\sigma_j^z + g\sigma_{j+1}^z = ihb_j^z c_{1,j} + igb_{j+1}^z c_{1,j+1}. \quad (46)$$

Первый порядок теории возмущений остается равным 0. Во втором порядке остаются слагаемые вида (45), а также возникают перекрестные члены

$$hg \sum_l \frac{\alpha_l}{\varepsilon_l} \sum_{q_x} \left[ e^{iq_x(r_j - r_{j+1})} b_{q_x}^z b_{-q_x}^z - e^{iq_x(r_{j+1} - r_j)} b_{q_x}^z b_{-q_x}^z \right].$$

При малых  $q_x$ . это возмущение имеет вид  $v'_g \sum_{q_x} q_x b_{q_x}^z b_{-q_x}^z$ , то есть локально изменяет групповую скорость краевых мод.

При приложении подобного поля на большем участке границы изменение групповой скорости можно получить с использованием формулы (24). Если участок достаточно длинный, то на удалении от его границ поведение системы описывается гамильтонианом (14) с измененными  $\kappa$  и  $h_z$ . В таком случае и групповая скорость (24) изменяется в данной области, что позволяет управлять движением краевой моды вдоль границы, регулируя компоненты внешнего поля  $h_x, h_y, h_z$ .

## 2.2 Подключение внешних кубитов

Теперь рассмотрим взаимодействие одного из краевых спинов решетки с внешней двухуровневой системой. Введем коэффициенты связи  $\lambda_i$ , так, что взаимодействие описывается возмущением

$$V = \sum_{i=x,y,z} \lambda_i \sigma_{ext}^i \sigma_{0,j}^i = c_{ext} \sum_{i=x,y,z} \lambda_i b_{ext}^i b_j^i c_{1,j}. \quad (47)$$

Оператор  $c_1$  все также даст 0 и влияние возмущения будет возникать только во втором порядке. Аналогично описанному выше случаю подобное воздействие не будет приводить к изменению спектра краевых состояний.

Если же подключить внешний кубит к спину из второго ряда (рис. 3), то возмущение будет содержать оператор рождения краевого состояния (20) с коэффициентом  $\frac{h_z}{2J}$ . Тогда, исключая изменения групповой скорости и сдвиги по энергии, слагаемое будет иметь вид

$$\sim \lambda c_{ext} \frac{h_z}{J} \psi_j. \quad (48)$$

Где  $\psi_j = 1/\sqrt{L} \sum_{q_x} e^{-iq_x x_j} \psi_{q_x}$ . Подключив кубит к нескольким последовательным узлам, можно устроить взаимодействие

$$\sim \lambda c_{ext} \frac{h_z}{J} \sum_j \tilde{f}(x_j) \psi_j. \quad (49)$$

Выбрав  $\tilde{f}(x_j)$  так, что  $\sum_j \tilde{f}(x_j) \psi_j = \sum_{q_x} f(q_x) \psi_{q_x} = \Psi$ , можно получить взаимодействие

$$\sim \lambda c_{ext} \frac{h_z}{J} \Psi. \quad (50)$$

Подобное слагаемое будет приводить к обмену операторов  $c_{ext}$  и  $\Psi$ , как показано в пункте 2.3.

## 2.3 Проведение операции обмена

Рассмотрим теперь, как слагаемые вида (50) приводят к обмену майорановских операторов. Операцией обмена операторов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  называется преобразование  $U$ , такое, что

$$\begin{aligned} U^\dagger \gamma_1 U &= \gamma_2, \\ U^\dagger \gamma_2 U &= -\gamma_1. \end{aligned} \quad (51)$$

Покажем, что эволюция под действием гамильтониана  $H = \alpha \gamma_1 \gamma_2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  в течение некоторого времени  $t$  приводит именно к такому обмену. Перепишем оператор эволюции в виде

$$U_H = \exp(-iHt) = \exp(-i\alpha \gamma_1 \gamma_2 t) = \cos(\alpha t) - \sin(\alpha t) \gamma_1 \gamma_2. \quad (52)$$

Проверим его действие на операторы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$\begin{aligned} U_H^\dagger \gamma_1 U_H &= \cos^2(\alpha t) \gamma_1 + \sin(\alpha t) \cos(\alpha t) [\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1 - \gamma_1^2 \gamma_2] - \\ &- \sin^2(\alpha t) \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^2 \gamma_2 = [\cos^2(\alpha t) - \sin^2(\alpha t)] \gamma_1 - 2 \sin(\alpha t) \cos(\alpha t) \gamma_2, \end{aligned} \quad (53)$$

$$U_H^\dagger \gamma_2 U_H = [\cos^2(\alpha t) - \sin^2(\alpha t)] \gamma_2 + 2 \sin(\alpha t) \cos(\alpha t) \gamma_1. \quad (54)$$

При  $t = -\pi/4\alpha$  для  $U_H$  верны свойства (51), то есть он является оператором обмена.

Таким образом, взаимодействие кубита с несколькими спинами границы (50) в течение определенного промежутка времени приводит к обмену состояний  $c_{ext}$  и  $\Psi$ . При этом краевая мода  $\Psi$  постоянно

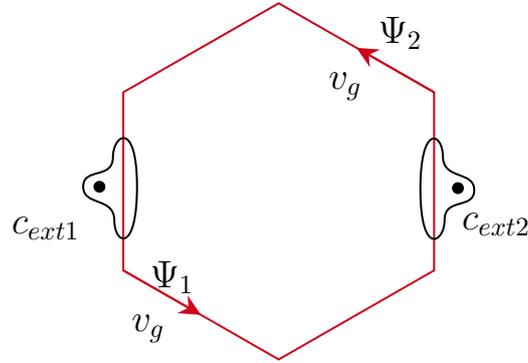


Рис. 7: Переплетение двух кубитов

перемещается вдоль границы решетки со скоростью  $v_g$  (24), однако, если сила взаимодействия достаточно велика, то смещение состояния за время обмена будет пренебрежимо мало. Так как в групповая скорость имеет порядок малости  $\sim h^5/J^4$ , то в большинстве случаев подобное приближение будет верным.

Описанные операции позволяют перенести состояние с внешнего кубита на нулевую моду на границе модели Китаева. Затем можно произвести автоматическое переплетение данного состояния  $\Psi_1$  с другим состоянием  $\Psi_2$ , бегущим по этой же границе (рис. 7). За некоторое время моды  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  поменяются местами в пространстве, двигаясь вдоль границы, и таким образом совершат переплетение аналогично [1]. При этом можно регулировать скорость движения краевых мод, прикладывая эффективное магнитное поле 2.1. После проведения подобной операции можно взаимодействием (50) перенести краевое состояние на внешний кубит для проведения измерений.

### 3 Сверхпроводниковая реализация модели Китаева

На данный момент обнаружено несколько веществ, в которых экспериментально реализуется модель Китаева [3]. Однако создание регулируемого взаимодействия с внешними кубитами, необходимого для генерации краевых мод, требует операций с отдельными спинами решетки. Для экспериментальной реализации подобных взаимодействий можно использовать структуру сверхпроводниковых кубитов [7, 6].

Для моделирования структуры, использованной в данной работе, можно использовать модель, описанную в статье [6]. Правильным выбором параметров приведенной схемы можно реализовать В-фазу модели Китаева, в которой будет выполняться неравенство треугольника для констант взаимодействия  $J_x, J_y, J_z$ . Согласно (6) в этом случае при отсутствии магнитного поля существует вырожденная фермионная мода, что позволяет применять рассуждения, описанные в первой и второй частях данной работы.

В данную структуру необходимо внести два уточнения для соответствия приведенным ранее вычислениям. Во-первых, в указанной реализации  $J_y < 0$ . Знак констант взаимодействия не влияет на невозмущенный спектр (так как может изменен выбором собственных состояний  $\hat{u}_{jk}$ ), но значительно изменяет вклад магнитного поля, зависящий от  $\hat{u}_{jk}\hat{u}_{kl}$  (9). Во-вторых, в приведенной в [6] модели могут быть отличны от нуля только компоненты эффективного магнитного поля  $h_x$  и  $h_z$ . Для создания структуры с щелью в объемном спектре все три компоненты поля должны быть отличны от 0 (11). Данный

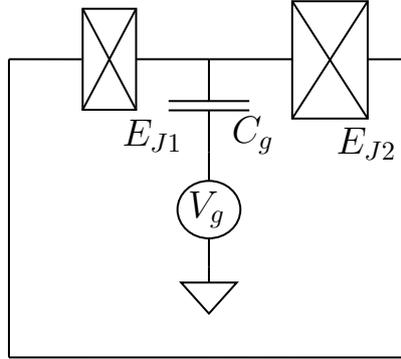


Рис. 8: Зарядовый кубит

раздел будет посвящен описанию структуры, позволяющей моделировать эффективное взаимодействие с положительной константой  $J_y$  и добавляющей третью компоненту магнитного поля  $h_z$ .

### 3.1 Структура кубита

Для моделирования двухуровневой системы можно использовать сверхпроводниковый зарядовый кубит [8]. Этот сверхпроводящий виток с током (рис. 8), содержащий два джозефсоновских контакта, описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = 4E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_{J1} \cos(\Psi_1 - \Psi_2) - E_{J2} \cos(\Psi_2 - \Psi_1 + \Phi_{ext}), \quad (55)$$

где  $E_C = 2e^2/C_g$ ,  $n_g = C_g V_g / 2e$ , а  $C_g, V_g, E_{J1}$  и  $E_{J2}$  обозначены на (рис. 8). Первое слагаемое соответствует зарядовой энергии конденсатора, а второе и третье - энергиям Джозефсоновских контактов.

Комбинируя последние слагаемые можно получить выражение

$$\begin{aligned} \hat{H} = 4E_C (\hat{n} - n_g)^2 - (E_{J1} + E_{J2}) \cos(\Psi_2 - \Psi_1) \cos\left(\frac{\Phi_{ext}}{2}\right) - \\ - (E_{J2} - E_{J1}) \sin(\Psi_2 - \Psi_1) \sin\left(\frac{\Phi_{ext}}{2}\right). \end{aligned} \quad (56)$$

Для зарядового кубита  $E_C \gg E_{J1}, E_{J2}$  и основной вклад в энергию определяется первым слагаемым (56). В таком случае наиболее низкоэнергетические состояния - это собственные состояния оператора  $\hat{n}$  соответствующие наличию или отсутствию дополнительной куперовской пары между джозефсоновскими контактами. Выберем эти два состояния в качестве состояний эффективного спина  $|\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\rangle$ . В таком случае оператором  $\sigma_z$  в этом базисе будет оператор

$$\sigma^z = 2\hat{n} - 1. \quad (57)$$

Разность фаз между двумя джозефсоновскими контактами  $\hat{\varphi} = \Psi_2 - \Psi_1$  является сопряженной переменной для  $\hat{n}$  [9]. Токи, текущие с разных сторон от контактов, пропорциональны  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ . Эти токи эффективно «добавляют» и «убирают» электронные пары таким образом, что

$$\begin{aligned} \sigma^x &= 2 \cos \varphi, \\ \sigma^y &= -2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (58)$$

Для создания эффективного магнитного поля  $h_y$  должно выполняться условие  $E_{J2} \neq E_{J1}$ , что является основным отличием от структуры из [6]. В нашем случае эффективные магнитные поля,

действующие на спин имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 h_z &= E_c \left( n_g - \frac{1}{2} \right), \\
 h_x &= -\frac{(E_{J1} + E_{J2})}{2} \cos \left( \frac{\Phi_{ext}}{2} \right), \\
 h_y &= \frac{(E_{J2} - E_{J1})}{2} \sin \left( \frac{\Phi_{ext}}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{59}$$

## 3.2 Межкубитные взаимодействия

Для реализации шестиугольной модели Китаева требуется устроить взаимодействия трех типов между описанными выше кубитами. Из формул (58) и (57) видно, что взаимодействия  $\sigma_i^x \sigma_j^x$  и  $\sigma_i^y \sigma_j^y$  пропорциональны токам, текущим в сверхпроводящих витках [6], а взаимодействие  $\sigma_i^z \sigma_j^z$  зависит от заряда на участке между контактами. Наиболее простым способом реализации первых двух взаимодействий является прямое индукционное взаимодействие соответствующих токов соседних кубитов (рис. 9). Зарядовое взаимодействие можно реализовать, соединив кубиты конденсаторами.

Энергия, возникающая в результате индукционного взаимодействия токов соседних кубитов, имеет вид  $-MI_1I_2$ . В этом случае константы связи  $J_x$  и  $J_y$  выражаются через параметры структуры

$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{1}{4} M_1 \frac{(E_{J1} + E_{J2})^2}{\Phi_0^2} \sin^2 \left( \frac{\Phi_{ext}}{2} \right), \\
 J_y &= \frac{1}{4} M_2 \frac{(E_{J2} - E_{J1})^2}{\Phi_0^2} \cos^2 \left( \frac{\Phi_{ext}}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{60}$$

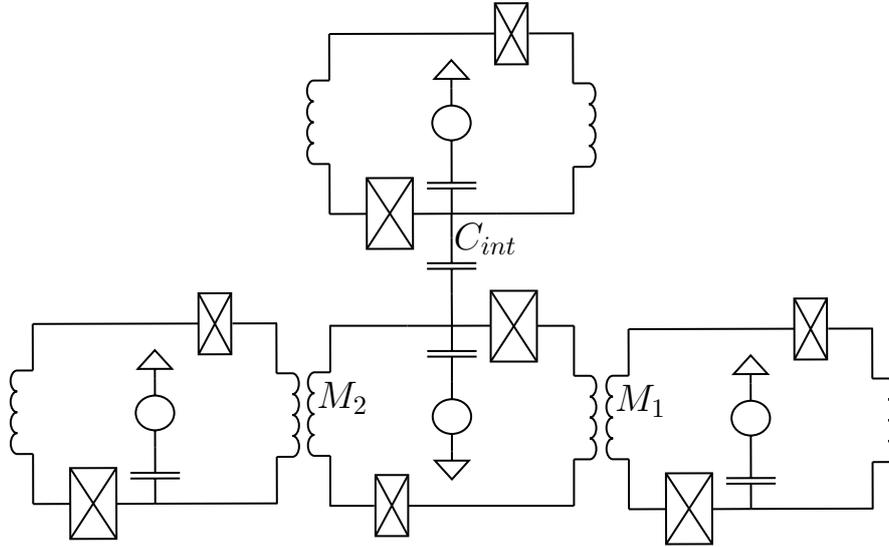


Рис. 9: Структура кубитов, моделирующая модель Китаева

Соединение кубитов конденсатором порождает связь

$$J_z = \frac{4e^2}{C_{int}}. \quad (61)$$

Где  $M_1$ ,  $M_2$  и  $C_{int}$  обозначены на (рис. 9).

Правильным выбором параметров кубитов можно создать структуру, обладающую тем же гамильтонианом, что и шестиугольная модель Китаева с внешним магнитным полем (12). Для реализации управляемых взаимодействий (47) можно использовать спаривание кубитов через общий  $LC$ -контур с изменяемой частотой [10].

Приведенные рассуждения показывают возможный способ экспериментальной реализации описанных моделей с использованием сверхпроводниковых кубитов.

## Заключение

В данной работе исследовано поведение краевых мод в модели Китаева для двух типов границы - zigzag и armchair, показано проведение операции переплетения полученных состояний и предложен способ экспериментальной реализации описанной структуры. Полученные результаты могут быть использованы для экспериментального наблюдения киральных краевых состояний и могут использоваться в топологических квантовых вычислениях.

Целью дальнейшего исследования может стать изучение влияния различных внешних шумов, неоднородностей структуры и ограниченности размеров образца на поведение краевых мод. Эти результаты позволят теоретически оценить время когерентности краевых мод и необходимые параметры структуры сверхпроводниковых кубитов, позволяющих экспериментально реализовать подобную модель.

## Список литературы

- [1] Biao Lian, Xiao-Qi Sun, Abolhassan Vaezi, Xiao-Liang Qi, and Shou-Cheng Zhang. Topological quantum computation based on chiral Majorana fermions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(43):10938–10942, 2018.
- [2] Alexei Kitaev. Anyons in an exactly solved model and beyond. *Annals of Physics*, 321(1):2 – 111, 2006. January Special Issue.
- [3] Simon Trebst. Kitaev Materials. *arXiv:1701.07056*, 2017.
- [4] Y. Kasahara, T. Ohnishi, Y. Mizukami, O. Tanaka, Sixiao Ma, K. Sugii, N. Kurita, H. Tanaka, J. Nasu, Y. Motome, T. Shibauchi, and Y. Matsuda. Majorana quantization and half-integer thermal quantum Hall effect in a Kitaev spin liquid. *Nature*, 559(7713):227–231, Jul 2018.
- [5] O. Tanaka, Y. Mizukami, R. Harasawa, K. Hashimoto, N. Kurita, H. Tanaka, S. Fujimoto, Y. Matsuda, E. G. Moon, and T. Shibauchi. Thermodynamic evidence for field-angle dependent Majorana gap in a Kitaev spin liquid. *arXiv:2007.06757*, 2020.
- [6] J. Q. You, Xiao-Feng Shi, Xuedong Hu, and Franco Nori. Quantum emulation of a spin system with topologically protected ground states using superconducting quantum circuits. *Phys. Rev. B*, 81:014505, Jan 2010.
- [7] Mahdi Sameti and Michael J. Hartmann. Floquet engineering in superconducting circuits: From arbitrary spin-spin interactions to the Kitaev honeycomb model. *Phys. Rev. A*, 99:012333, Jan 2019.

- [8] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, and J. S. Tsai. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box. *Nature*, 398(6730):786–788, Apr 1999.
- [9] Jens Koch, Terri M. Yu, Jay Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, Alexandre Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box. *Phys. Rev. A*, 76:042319, Oct 2007.
- [10] Alexandre Blais, Arne L. Grimsmo, S. M. Girvin, and Andreas Wallraff. Circuit Quantum Electrodynamics. *arXiv:2005.12667*, 2020.