

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”»**

Факультет физики

Тимошук Игорь Леонидович

**Топологические квантовые вычисления
и краевые состояния в топологических системах**

Магистерская диссертация

по направлению подготовки 03.04.02 Физика
образовательная программа «Физика»

Научный руководитель
д. ф.-м. н., член-корр. РАН
Ю. Махлин

Москва 2023

Аннотация

Использование краевых мод для проведения квантовых вычислений может стать одним из способов реализации квантовых компьютеров, топологически защищенных от внешних шумов. Для демонстрации возможности обработки квантовой информации с помощью краевых майорановских фермионов в данной работе в качестве примера описаны протоколы операций между двумя кубитами, взаимодействующими при помощи краевых состояний образца шестиугольной модели Китаева. Анализируя структуру и спектр краевых состояний, мы получаем способы записи состояния внешнего кубита в виде суперпозиции краевых майорановских мод. Мы описываем протоколы операции обмена двух кубитов и нетривиальной двухкубитной операции и находим зависимость точности операций от способа записи и параметров образца. Мы показываем, что воздействие различных шумов снижает точность квантовых операций, однако качественно не влияет на возможность их проведения.

Содержание

Аннотация	2
Введение	5
1 Краевые состояния в модели Китаева	8
2 Операции с майорановскими фермионами	17
2.1 Переход к майорановским фермионам	17
2.2 Операция SWAP	18
2.3 Точность операции SWAP	21
2.4 Нетривиальная двухкубитная операция	22
3 Численное моделирование краевых состояний	25
3.1 Поиск собственных состояний	25
3.2 Влияние углов	25
3.3 Образец с линейным спектром краевых состояний	28
3.4 Система с беспорядком	32
4 Взаимодействие края и внешнего кубита	35
4.1 Древовидная структура	35
4.2 Точечное подключение кубита	39
4.3 Волновой пакет произвольной формы	41
5 Шум и беспорядок	45
5.1 Влияние однородного беспорядка на передачу информации	45
5.2 δ -коррелированный беспорядок	47
5.2.1 Энергии вихрей для δ -коррелированного беспорядка	47
5.2.2 Влияние беспорядка на передачу информации	47
5.3 δ -коррелированный в пространстве $1/f$ шум	51
5.4 Однородный в пространстве шум	52
5.5 Оптимальная форма волнового пакета	53
6 Дополнительные эффекты в модели Китаева	58
6.1 Учет дополнительных взаимодействий	58

6.1.1	Фермионное представление возмущения	58
6.1.2	Оценка коэффициента	60
6.1.3	Взаимодействия через одного	63
6.1.4	Влияние на спектр	64
6.2	Влияние вакансий	66
	Заключение	68
	Список литературы	70

Введение

Топологически защищенные состояния могут использоваться для обработки квантовой информации [1, 2]. Были предложены различные реализации точечных (нульмерных) майорановских фермионов [3, 4, 5, 6, 7]. Элементарной логической операцией в топологическом квантовом компьютере является переплетение (braiding) неабелевых анионов. Эту операцию можно выполнять разными способами, в том числе с использованием краевых (одномерных) майорановских фермионов, для которых переплетение упрощается в силу их постоянного движения вдоль границы [8]. Предлагались различные способы детектирования нейтральных майорановских фермионов с помощью интерферометрии краевых состояний [9], исследовались способы передачи энергии между внешними спинами при помощи краевых состояний [10], применения спин-поляризованной туннельной микроскопии для воздействия на нейтральные краевые состояния в китайских материалах и двумерных квантовых магнитах [11] и оптические методы определения киральности [12].

В данной работе мы пробуем убедиться в возможности проведения квантовых операций с использованием краевых состояний и на примере шестиугольной модели Китаева показываем, что такие вычисления принципиально выполнимы. Для этого мы рассматриваем образец модели Китаева, с краем которого могут взаимодействовать два внешних кубита, и описываем протоколы двухкубитных операций с использованием краевых состояний. Важно отметить, что помимо возможности применения полученных результатов в области топологических квантовых вычислений, интересна сама возможность взаимодействия с краевыми состояниями. Данные способы воздействия на краевые моды, могут быть, в принципе, применены для

исследования любых топологических систем.

Экспериментальная реализация материалов, описываемых шестиугольной моделью Китаева является сложной и активно исследуемой проблемой. Нас интересует B -фаза модели Китаева в слабом магнитном поле [13]. Её можно экспериментально реализовать используя китаевские материалы [14] или сетки кубитов с правильно подобранными параметрами [15, 16, 17]. В каждом из подходов заметную роль играют эффекты шума и беспорядка. Последний особенно важен для квантовых структур, поскольку кубиты не могут созданы полностью идентичными, что приводит к флуктуации силы их взаимодействия.

В работе описаны свойства краевых состояний в модели Китаева, способы проведения квантовых операций с использованием краевых состояний и влияние на их точность различных эффектов, присущих возможным физическим реализациям данных систем. Первая часть данной работы (раздел 1) содержит краткое описание модели Китаева, а также рассказывает о структуре и спектрах краевых состояний для границ типа zigzag и armchair с различными граничными условиями. В следующем разделе 2 описана операция SWAP для внешних двух кубитов, взаимодействующих с краем образца модели Китаева, и нетривиальная двухкубитная операция. Раздел 3 посвящен численному моделированию образца конечных размеров, позволившему изучить такие эффекты, как искажение пакета под действием нелинейности спектра и влияние углов образца на динамику краевых мод. Далее (Раздел 4) изложены способы взаимодействия внешнего кубита с краем модели Китаева, приводящие к записи состояния внешнего кубита на край образца в виде волнового пакета произвольной формы. Раздел 5 рассказывает о влиянии статического беспорядка и других типов шумов на динамику краевых мод, приводящем к снижению точности квантовых операций. Заключительный

раздел 6 описывает влияние дополнительных спиновых взаимодействий, а также эффекты, возникающие при наличии вакансий.

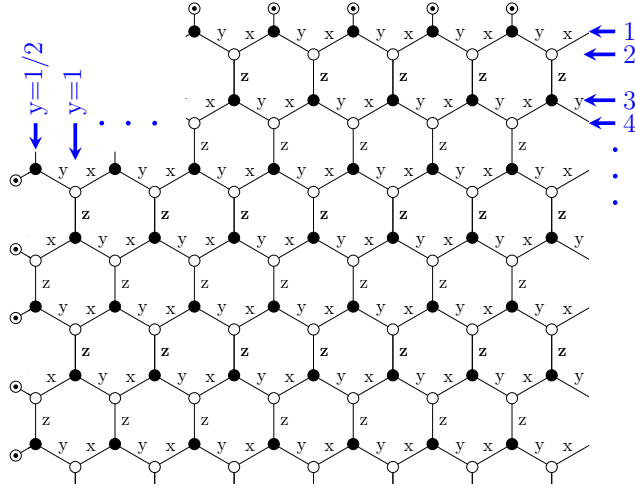


Рис. 1: Шестиугольная решетка модели Китаева. Индексы x , y , z обозначают 3 направления ребер. В результате фермионизации (2) каждому узлу соответствуют 4 фермиона c^i , b_x^i , b_y^i , b_z^i . Для края типа zigzag (верхняя граница решетки) обведенные кружками точки обозначают «свободные» b_z майорановские фермионы. Аналогично для края типа armchair (левая граница) обозначены «свободные» фермионы b_x и b_y . Стрелками показана нумерация рядов для каждой из границ.

1 Краевые состояния в модели Китаева

В данном разделе кратко описана шестиугольная модель Китаева, а также приведены основные свойства краевых состояний, изначально рассмотренные в моей бакалаврской работе, и дополненные в ходе дальнейших исследований.

Двумерная шестиугольная модель Китаева [13] была предложена как одна из точно решаемых двумерных спиновых систем. В узлах шестиугольной решетки (рис. 1) расположены спины $1/2$, взаимодействующие следующим образом:

$$\hat{H} = -J_x \sum_{x\text{-links}} \sigma_x^i \sigma_x^j - J_y \sum_{y\text{-links}} \sigma_y^i \sigma_y^j - J_z \sum_{z\text{-links}} \sigma_z^i \sigma_z^j. \quad (1)$$

Для анализа данного гамильтониана удобно перейти от спиновых операторов к Майорановским фермионам, используя преобразование

$$\sigma_x^j = ib_x^j c^j, \quad \sigma_y^j = ib_y^j c^j, \quad \sigma_z^j = ib_z^j c^j. \quad (2)$$

Данное преобразование сохраняет коммутационные соотношения матриц Паули, однако для соблюдения свойства $\sigma_x^j \sigma_y^j \sigma_z^j = i$ на операторы b_x^j, b_y^j, b_z^j, c^j накладывается дополнительное условие

$$D^j = b_x^j b_y^j b_z^j c^j = 1. \quad (3)$$

Состояния, для которых оно выполняется, будем называть физическими.

В результате данного преобразования произведение двух матриц Паули переходит в $-b_\alpha^j c^j b_\alpha^k c^k$. Заметим, что оператор $\hat{u}^{jk} = ib_\alpha^j b_\alpha^k$, соответствующий взаимодействию вдоль одного ребра решетки, коммутирует с гамильтонианом, однако не сохраняет условие (3). Произведение $W_p = \hat{u}^{jk} \hat{u}^{kl} \hat{u}^{lm} \hat{u}^{mn} \hat{u}^{ni} \hat{u}^{ij}$ этих операторов, соответствующих 6 ребрам, образующим один шестиугольник, коммутирует с гамильтонианом и переводит физические состояния только в физические [13]. Грани, для которых $W_p = -1$ будем называть содержащими вихри.

В основном состоянии все операторы W_p равны 1 (для случая $J_x, J_y, J_z > 0$) [13]. Примером такой конфигурации является состояние, в котором все \hat{u}^{jk} равны 1, а все остальные безвихревые комбинации могут быть сведены к нему [13]. В этом секторе гамильтониан

квадратичен по c^j и может быть записан в виде $H = \frac{i}{4} \sum_{j,k} A^{jk} c^j c^k$, где A^{jk} равны соответствующим константам связи (рис. 1). Трансляционная инвариантность позволяет совершить переход в Фурье-представление

$$a_{\mathbf{q},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_s e^{-i(\mathbf{q},\mathbf{r}_s)} c_{s\lambda}, \quad (4)$$

где λ - индекс подрешетки, и получить спектр объемных мод

$$\varepsilon(\mathbf{q}) = \pm 2 \left| J_x e^{i(\mathbf{q},\mathbf{n}_1)} + J_y e^{i(\mathbf{q},\mathbf{n}_2)} + J_z \right|. \quad (5)$$

Если для констант J_x, J_y, J_z выполняется неравенство треугольника, то существуют два возбуждения с нулевой энергией. Соответствующие им волновые вектора противоположны и равны по модулю. Обозначим их как $\pm \mathbf{q}^*$. Исследования краевых мод для произвольных J_x, J_y, J_z , удовлетворяющих неравенству треугольника, производилось в [18].

Приложение магнитного поля приводит к возникновению объемной щели [13]. Рассмотрим его влияние для $J_x = J_y = J_z = J$.

$$V = - \sum_j (h_x \sigma_x^j + h_y \sigma_y^j + h_z \sigma_z^j), \quad h_x, h_y, h_z \ll J. \quad (6)$$

Первый и второй порядки теории возмущений не приводят к возникновению щели [13], поэтому остановимся на третьем порядке. Произведения матриц Паули вида $\sigma_\alpha^j \sigma_\alpha^k \sigma_\beta^l$ всегда представимы в виде произведения возмущений первого и второго порядка и не влияют на спектр. Остаются слагаемые вида $\sigma_x^j \sigma_y^k \sigma_z^l$. Введем коэффициент κ , возникающий при суммировании по промежуточным состояниям, для которых σ_α^j ($\alpha = x, y, z$) отлично от 0. Каждое из этих состояний

имеет энергию $\sim J$ [13], поэтому $\kappa \sim -\frac{h_x h_y h_z}{J^2}$. В таком случае

$$V^{(3)} = -\kappa \sum_{j,k,l} \sigma_x^j \sigma_y^k \sigma_z^l. \quad (7)$$

При переходе к фермионным обозначениям для ненулевых слагаемых данного возмущения получается выражение

$$\kappa \sigma_x^j \sigma_y^k \sigma_z^l = -i \kappa b_x^j c^j b_y^k c^k b_z^l c^l = i \kappa \hat{u}^{jl} \hat{u}^{kl} D^l c^k c^j = i \kappa c^k c^j. \quad (8)$$

Эти слагаемые соответствуют связям между соседними фермионами одной подрешетки. Гамильтониан подобной системы в Фурье-представлении имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q})_{\lambda\mu} c_{-\mathbf{q}\lambda} c_{\mathbf{q}\mu}, \quad (9)$$

$$A(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \Delta(\mathbf{q}) & i f(\mathbf{q}) \\ -i f(-\mathbf{q}) & -\Delta(\mathbf{q}) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$f(\mathbf{q}) = 2J (e^{i\mathbf{q}\mathbf{n}_1} + e^{i\mathbf{q}\mathbf{n}_2} + 1), \quad (11)$$

$$\Delta(\mathbf{q}) = 4\kappa [\sin(\mathbf{q}\mathbf{n}_1) + \sin(-\mathbf{q}\mathbf{n}_2) + \sin(\mathbf{q}(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1))], \quad (12)$$

$$\mathbf{n}_{1,2} = (\pm 1, \sqrt{3})/2. \quad (13)$$

Спектр возбуждений вблизи \mathbf{q}^* принимает вид

$$\varepsilon(\mathbf{q}) = \pm \sqrt{3J^2 \delta\mathbf{q}^2 + \Delta^2}, \quad \delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^*, \quad \Delta = 6\sqrt{3}\kappa. \quad (14)$$

Наличие щели в спектре приводит к отсутствию объемных фермионов в основном состоянии системы. Однако из топологических соображений на границе должна существовать мода с нулевой энергией.

В моей бакалаврской работе были подробно исследованы свойства краевых стояний для границ типа zigzag и armchair (рис. 1) для различных типов магнитных полей на границе. Важно отметить, что на краю слабое магнитное поле (6) качественно меняет поведение системы. Так как у крайнего ряда спинов свободна z -связь, то в случае без магнитного поля b_z фермионы этих спинов не входят в гамильтониан (рис. 3) а, с. Однако при приложении магнитного поля в гамильтониане системы возникает слагаемое, содержащее эти операторы b_z , что значительно меняет структуру краевых состояний (рис. 3) b, d. Были рассмотрены два случая магнитного поля - однородное поле во всем образце и поле, однородное на всех узлах, кроме крайнего ряда, на котором $h_z = 0$, что исключает появление b_z -фермионов в гамильтониане.

Начнем рассуждения с рассмотрения границы типа zigzag с нулевым краевым полем. Спектр краевой моды удобно найти по теории возмущений по параметру κ . В невозмущенном гамильтониане существует краевое решение с нулевой энергией (рис. 3)а

$$\psi_{2i} = 0, \quad \psi_{2i+1} = C \left(-2 \cos \frac{q_x}{2} \right)^i, \quad 2\pi/3 < q_x < 4\pi/3. \quad (15)$$

Усреднив слагаемые гамильтониана $\sim \kappa$ по данному состоянию можно получить спектр подобной краевой моды (рис. 2)а

$$\varepsilon(q_x) = 12\kappa \sin q_x. \quad (16)$$

При наличии ненулевого краевого поля нулевое краевое решение также существует, однако теперь оно расположено в области $|q_x| <$

$2\pi/3$ (рис. 3)b

$$\psi_{2i} = C\psi_0 \frac{2J}{h_z} \cos \left(-2 \cos \frac{q_x}{2} \right)^{-i}. \quad (17)$$

Аналогично прошлому случаю можно получить спектр краевой моды (рис. 2)b

$$\varepsilon_0(q_x) = -\frac{h_z^2 \kappa}{J^2} \frac{\sin q_x + \tan \frac{q_x}{2}}{\cos^2 \frac{q_x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{h_z^2}{4J^2}}. \quad (18)$$

Для границы типа *armchair* нулевое состояние можно найти, приравняв спектр (14) нулю. Уравнение $\varepsilon(\mathbf{q}) = 0$ имеет только комплексные решения. В отличие от объемных состояний, краевые состояния могут описываться волновым вектором с мнимой частью, так как не обладают трансляционной инвариантностью, что позволяет получить решение с нулевой энергией (рис. 3)c

$$\psi(y) = \sin \frac{4\pi y}{3} e^{-|\Delta|y/\sqrt{3}J}, \quad \Delta = 6\sqrt{3}\kappa. \quad (19)$$

В данном случае уже нельзя устремить κ к 0 и получить спектр краевых мод аналогично границе типа *zigzag*, но существует способ аналитически найти групповую скорость. Рассмотрев гамильтониан при малом δq_x можно учесть слагаемые $\sim \delta q_x$ по теории возмущений и найти изменение энергии данного состояния $\delta\varepsilon$ в первом порядке. Тогда групповая скорость равна $v_g = \delta\varepsilon/\delta q_x$. Для случая с нулевым краевым полем (19) при усреднении приведет к групповой скорости

$$v_g = -\sqrt{3}J, \quad (20)$$

совпадающей с результатом численного моделирования спектра (рис. 2)c.

При $h_x = h_y = 0$ существует еще два решения с нулевой энергией. Поскольку в этом случае b_x и b_y фермионы крайнего ряда (рис. 1) не входят в гамильтониан, то энергия состояний, расположенных на них, равна 0. Анализ показывает, что для конечного краевого поля $h_x = h_y = h_b$ единственным решением с нулевой энергией остается состояние с волновой функцией (рис. 3)d

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_b - \frac{2h_b}{\sqrt{3}J} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin \frac{4\pi y - 2\pi}{3} e^{-|\Delta|y/\sqrt{3}J}, \quad (21)$$

где первое слагаемое определяет амплитуду на b_x и b_y фермионах. Анализ гамильтониана при малом δq_x позволяет получить групповую скорость

$$v_g = -\sqrt{3}J \frac{2h_b^2}{2h_b^2 + \sqrt{3}|\Delta|J}. \quad (22)$$

Данное значение также совпадает с полученным численно спектром (рис. 2)d.

Сохраняя структуру модели Китаева внешние кубиты к ней можно подключить только к крайнему ряду фермионов, отмеченному \rightarrow на (рис. 3). Видно, что наибольшая амплитуда на данном ряду соответствует случаю а, что делает его наиболее удобным для проведения операций с краем. Также отсутствие b_z фермионов в данном гамильтониане упрощает взаимодействие края и внешнего кубита, что облегчает вычисления в разделах 2 и 4. Дальнейшие рассуждения приведены для края типа zigzag с нулевой компонентой поля h_z на крайнем ряду узлов.

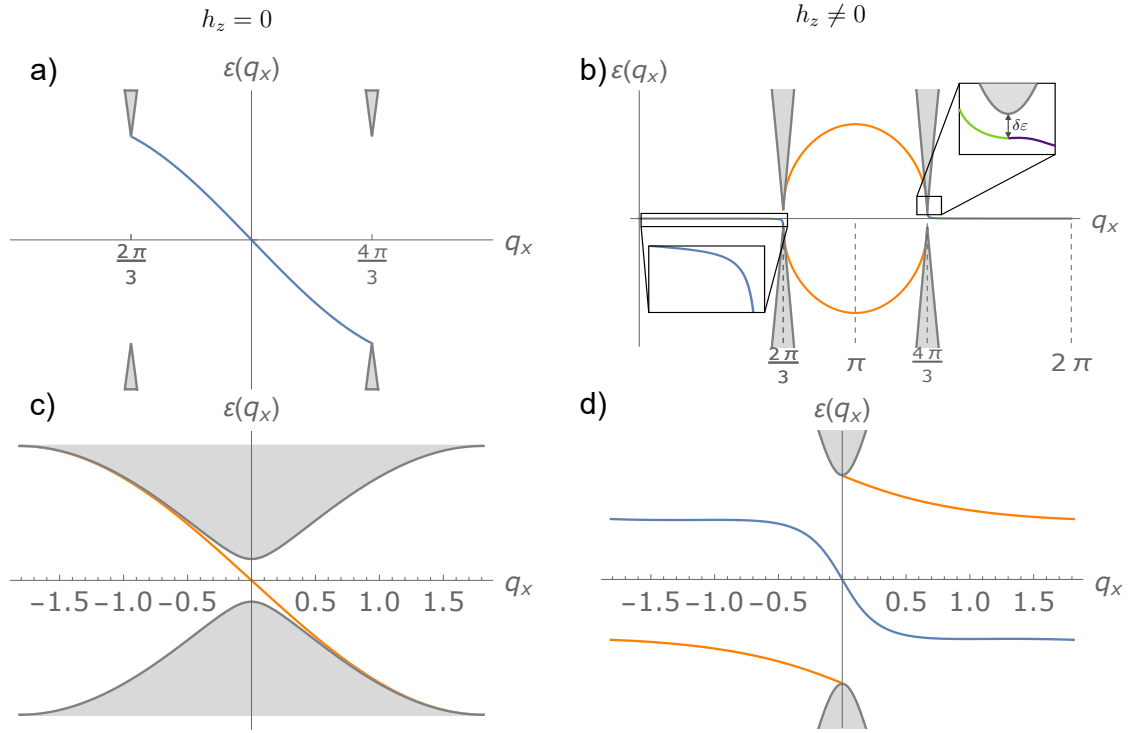


Рис. 2: Спектры краевых состояний в шестиугольной модели Китаева для двух направлений границы и различных значений краевого магнитного поля. Край типа зигзаг с (а) нулевой компонентой поля h_z на первом ряду узлов и с (b) однородным полем. Два минимума объемного спектра соответствуют $q_x^* = \pm 2\pi/3$. Найденный численно спектр краевых состояний для края типа armchair (c) для нулевых компонент поля h_x и h_y и для однородного поля (d). В случае границы armchair оба минимума объемного спектра соответствуют $q_x^* = 0$, а ширина зоны Бриллюэна равна $2\pi/\sqrt{3}$.

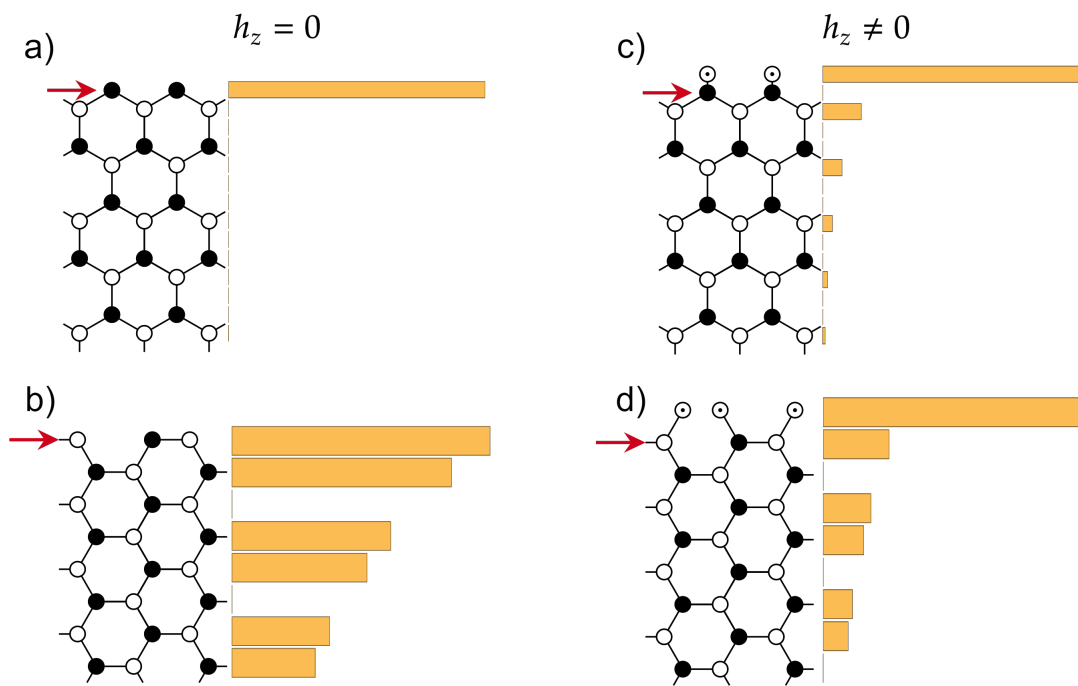


Рис. 3: Качественное поведение амплитуды краевого состояния с нулевой энергией. Изображения а, б - граница типа zigzag для $h_z = 0$ и $h_z \neq 0$ на крайнем ряду узлов. с, d - граница типа armchair с нулевыми и ненулевыми компонентами поля на крайнем ряду узлов. Красной стрелкой отмечен ряд, доступный для подключения внешних кубитов.

2 Операции с майорановскими фермионами

Краевые состояния в топологических системах неоднократно рассматривались в контексте проведения квантовых вычислений [8, 19, 20]. В данном разделе мы опишем протокол проведения двухкубитных операций между внешними кубитами с использованием краевых состояний, что покажет возможность выполнения произвольных квантовых вычислений [21, 22, 23] в данной структуре.

2.1 Переход к майорановским фермионам

Для описания квантовых операций с использованием майорановских фермионов можно интерпретировать обычные одно и двух-кубитные операции на как эволюцию фермионных операторов.

Операцией обмена операторов γ^1 и γ^2 , соответствующих майорановским фермионам, называется операция

$$\begin{aligned} U^\dagger \gamma^1 U &= \gamma^2, \\ U^\dagger \gamma^2 U &= -\gamma^1. \end{aligned} \tag{23}$$

Можно показать, что действие гамильтониана $H = ig\gamma^1\gamma^2$, $g \in \mathbb{R}$ в течении времени $t = \pi/(4g)$ приводит к такому преобразованию. Заметим, что гамильтониан спина $1/2$ в фермионном представлении (2) имеет как раз такой вид (рис. 4)

$$H_{h_\alpha} = h_\alpha \sigma_\alpha = ih_\alpha b_\alpha c. \tag{24}$$

Гамильтониан взаимодействия z -компонент двух спинов на фер-

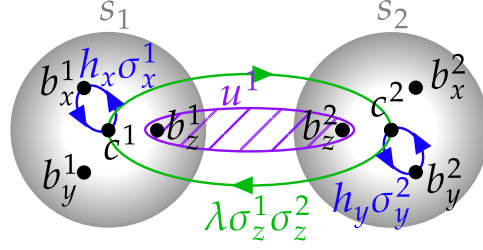


Рис. 4: Схема проведения одно- и двухкубитных операций для спинов s_1 и s_2 на фермионном языке. Каждому спину соответствует 4 майорановских фермиона. Обмен фермионов различных спинов (26) происходит при включении zz -взаимодействия (зеленые стрелки), в то время как обмен фермионов одного спина (синие стрелки) происходит под действием магнитного поля (24).

мионном языке имеет вид

$$H_\lambda = -\lambda \sigma_z^1 \sigma_z^2 = \lambda b_z^1 c^1 b_z^2 c^2 = \lambda (i b_z^1 b_z^2) i c^1 c^2. \quad (25)$$

Введем $\hat{u}^{12} = i b_z^1 b_z^2$, коммутирующий с H_λ . Эволюция за время $\pi / (4\lambda)$ приводит к

$$\begin{aligned} U_{H_\lambda}^\dagger c^1 U_{H_\lambda} &= \hat{u}^{12} c^2, \\ U_{H_\lambda}^\dagger c^2 U_{H_\lambda} &= -\hat{u}^{12} c^1. \end{aligned} \quad (26)$$

Данная операция помимо перестановки фермионов также добавляет дополнительный множитель \hat{u}^{12} к каждому из них.

2.2 Операция SWAP

Рассмотрим способ проведения операции обмена между двумя кубитами при помощи краевых состояний. Считаем, что между внешним кубитом и спином крайнего ряда шестиугольной решетки существует управляемое $\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_z$ -взаимодействие, а краевой спин связан x - и y -связями со следующим рядом узлов модели Китаева.

Включение данного взаимодействия (25) на заданное время приводит обмену c -фермионов (26) краевого спина и внешнего кубита (рис. 5). После выключения взаимодействия записанный на край c -фермион начнет движение вдоль границы образца с групповой скоростью v_g и через некоторое время достигнет кубита s_2 .

Включением взаимодействия между вторым кубитом и спином края можно произвести повторный обмен, после которого на месте фермиона c^2 окажется фермион $-u^1u^2c^1$ (или $u^1u^2c^1$, если включаемое взаимодействие будет иметь другой знак). После этого оказавшийся на границе фермион u^2c^2 переместится вдоль края до первого кубита, где его можно передать на первый кубит. В результате

$$c^1 \mapsto u^1u^2c^2, \quad c^2 \mapsto -u^1u^2c^1. \quad (27)$$

c -фермионы на внешних кубитах в ходе данной перестановки домножились на оператор u^1u^2 , зависящий от фермионов образца модели Китаева b_z^{e1} и b_z^{e1} , что привело к запутыванию внешних кубитов и края. Результат подобной операции будет зависеть от начального состояния образца, что нежелательно для двухкубитной операции.

Комбинация трех таких операции с приложением локальных магнитных полей к внешним кубитам позволит устранить данную запутанность. После обмена c -фермионов включение локальных магнитных полей h_x на внешних кубитах поставит на место c -фермионов b_x -фермионы. Передав их аналогично c -фермионам, можно повторить эту операцию и для b_y -фермионов, что позволит получить состояние, изображенное на рис. 5b. Оно примечательно тем, что не смотря на запутанность фермионных операторов, четные комбинации операторов на внешних кубитах не будут зависеть от состояния края, так как $(\hat{u}^i)^2 = 1$. В результате подобного обмена физические

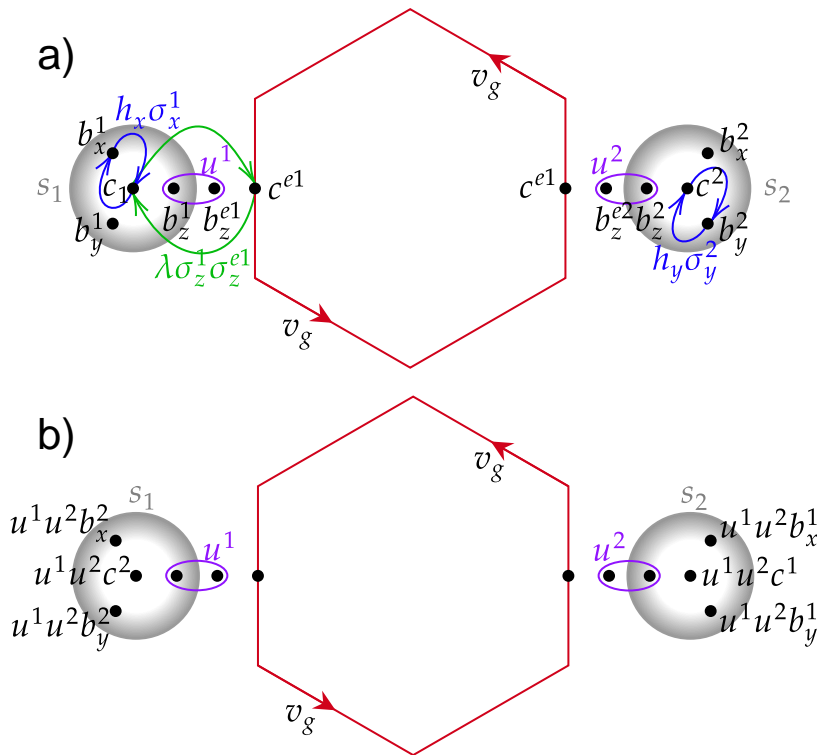


Рис. 5: Два внешних кубита s_1 и s_2 подключаемые к краю. Квантовые состояния кубитов s_1 и s_2 можно обменивать, выполнив череду локальных фермионных обменов. а) - начальное состояние системы и результат включения различных взаимодействий (рис. 4), б) - конечное состояние системы после проведения обмена.

операторы претерпят преобразования

$$\begin{aligned}
\sigma_x^1 &\longleftrightarrow \sigma_x^2, \\
\sigma_y^1 &\longleftrightarrow \sigma_y^2, \\
D^1 \sigma_z^1 &\longleftrightarrow D^2 \sigma_z^1,
\end{aligned} \tag{28}$$

где $D^j = b_x^j b_y^j b_z^j c^j$. Для физических состояний $D^1 = D^2 = 1$, соответственно в физическом пространстве состояний подобное преобразование приведет к перестановке состояний первого и второго кубитов.

В реальной системе передача фермиона будет происходить неидеально, и на втором кубите окажется линейная комбинация исходного фермиона и краевых состояний

$$c^1 \mapsto P u^1 u^2 c^2 + \sqrt{1 - P^2} d^{\text{ed}}. \tag{29}$$

Коэффициент P определяет точность проведения данной квантовой операции. Он зависит от способов записи и чтения, уменьшается из-за искажений волнового пакета во время движения а также из-за наличия беспорядка в системе. Он будет исследоваться в последующих разделах.

2.3 Точность операции SWAP

Используя выражение (29) для передачи c -фермиона и аналогичных преобразований для b^x и b^y можно получить, что оператор $\sigma_\alpha^1 = i b_\alpha^1 c^1$ преобразовывается как

$$\sigma_\alpha^1 \mapsto P^2 \sigma_\alpha^2 + iP \sqrt{1 - P^2} u^1 u^2 (c^2 d^{\text{ed}1} + b_\alpha^2 d^{\text{ed}2}) + i(1 - P^2) d^{\text{ed}1} d^{\text{ed}2}. \tag{30}$$

При $P = 1$ происходит идеальный обмен. Для произвольной матрицы ρ операция (30) приводит к преобразованию

$$\rho \mapsto \frac{1}{2} + P^2 \left(\rho - \frac{1}{2} \right). \quad (31)$$

В данном случае точность операции можно определить как Uhlmann-Josza fidelity [24, 25, 26] для смешанных состояний или A-fidelity [27, 26] $F(\rho, \rho') = (\text{Tr} \sqrt{\rho \rho'})^2$, поскольку начальное и конечное состояния коммутируют. После усреднения по всем возможным состояниям образца [28] каждое из определений к выражению

$$F = \frac{1 + P^2}{2}. \quad (32)$$

Далее в качестве точности будет рассматриваться P^2 .

2.4 Нетривиальная двухкубитная операция

Операция SWAP не является двухкубитной операцией, поэтому полезно рассмотреть еще один пример взаимодействия внешних спинов при помощи края. Ниже описана квантовая операция, эквивалентная прямому включению $\lambda \sigma_z \sigma_z$ взаимодействия между внешними кубитами на время $t = \pi/4\lambda$.

При проведении операции перестановки c -фермионов внешних кубитов с помощью края (26), они умножаются на оператор $\hat{u}^1 \hat{u}^2 = -b_z^1 b_z^{e1} b_z^2 b_z^{e2}$. При этом если для начального состояния образца выполняется условие $ib_z^{e1} b_z^{e2} = 1$, то

$$c^1 \mapsto ib_z^1 b_z^2 c^2, \quad c^2 \mapsto -ib_z^1 b_z^2 c^1. \quad (33)$$

К этому же результату приведет прямое включение взаимодействия $\lambda\sigma_z^1\sigma_z^2$ на время $t = \pi/4\lambda$, что является нетривиальной двухкубитной квантовой операцией. Её можно представить в виде суперпозиции операции управляемое-Z и однокубитных операций.

После выполнения данного обмена

$$ib_z^{e1}b_z^{e2} = ib_z^1b_z^{e1}c^{e1} \cdot b_z^2b_z^{e2}c^2 \cdot c^1c^{e1}b_z^{e1} \cdot c^2 \cdot b_z^1b_z^{e1}c^1 \cdot b_z^2 = ib_z^{e1}b_z^{e2} \quad (34)$$

и подготовленное заранее состояние $ib_z^{e1}b_z^{e2}$ сохраняется.

Теперь опишем способ получения состояние края, для которого $ib_z^{e1}b_z^{e2} = 1$. Если включить магнитное поле на внешнем кубите $ih^z b_z^{e1}c^{e1}$, то фермион b_z^{e1} будет играть роль c^1 фермиона на «внешнем кубите». Подготовим начальное состояние левого внешнего спина в некотором фиксированном состоянии. Затем произведем обмен операторов b_x^1 и b_z^{2e} тем же образом, которым раньше проводился обмен c -фермионов. Тогда $b_z^{2e} \mapsto \hat{u}^1 b_x^1$. После этого запишем на край оператор b_y^1 и проведем его обмен с оператором b_z^{e1} : $b_z^{e1} \mapsto \hat{u}^1 b_y^1$. В результате

$$b_z^{e1}b_z^{e2} \mapsto (\hat{u}^1)^2 b_x^1 b_y^1 = b_x^1 b_y^1 = \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_y^1 = i\hat{\sigma}_z^1. \quad (35)$$

Если выбрать исходное состояние с $\hat{\sigma}_z^1 = -1$, то $ib_z^{e1}b_z^{e2} = 1$.

Таким образом данной операцией мы подготовили систему к дальнейшему проведению двухкубитных операций. При этом данную подготовку нужно проводить однократно перед началом вычислений, а не перед каждой операцией.

Стоит заметить, что подготовительная операция не идеально точна, так как один из фермионов передается вдоль края. Положим $b_z^{e1}b_z^{e2} = P \cdot i\hat{\sigma}_z^1 + \sqrt{1-P} \cdot i\hat{\sigma}_{\text{ед}}$. В результате точность операции

(33) будет $\sim P^2$, так как в её результат входит произведение двух операторов, переданных вдоль края.

3 Численное моделирование краевых состояний

Для исследования систем конечного размера, а также для анализа влияний различных типов шумов была создана численная модель структуры, описываемой гамильтонианом (1) в В-фазе с приложенным внешним магнитным полем в безвихревом секторе. Основными отличиями данной модели от опубликованных работ [29, 30] является возможность выбирать тип границы образца (zigzag, armchair или прямоугольный образец с двумя сторонами каждого типа) и получение результата эволюции любых начальных условий.

3.1 Поиск собственных состояний

В процессе моделирования создается ориентированный граф, ребра которого соответствуют слагаемым гамильтониана (рис. 6). Диагонализация матрицы смежности данного графа позволяет получить собственные состояния системы (рис. 6) и их энергии.

Знание собственных состояний позволяет вычислить состояние системы с любыми начальными условиями в произвольный момент времени (рис. 7), что позволяет изучать динамику краевых возбуждений.

3.2 Влияние углов

Реальные образцы не могут иметь бесконечную границу, поэтому важно рассмотреть эффекты, возникающие вблизи углов. Так как существует только одно состояние с заданным импульсом, то одномерное рассеяние в данном случае может привести только к набору

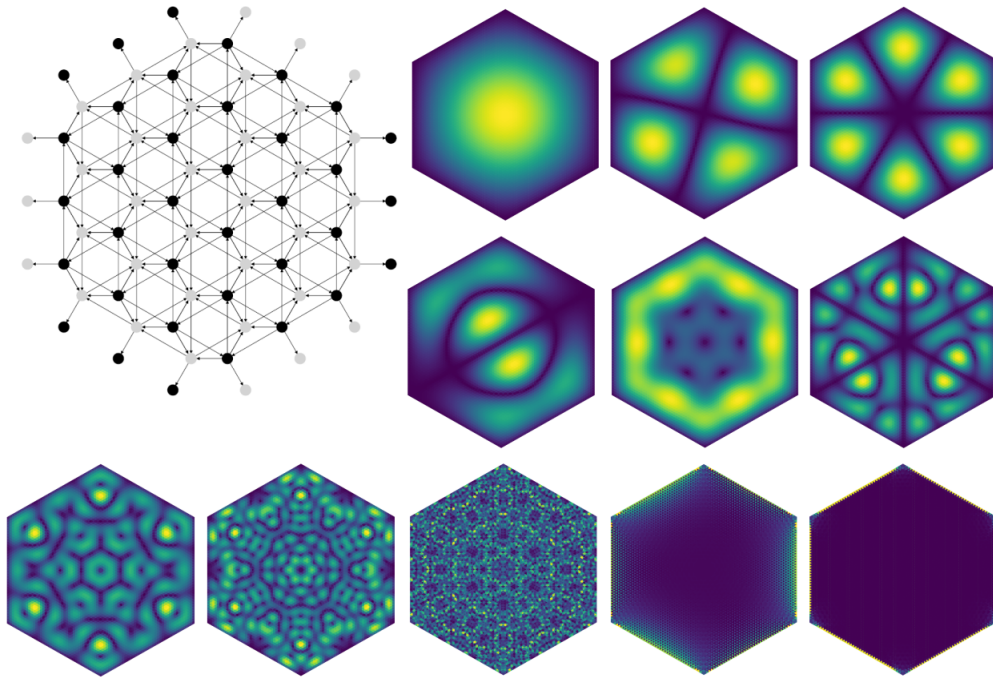


Рис. 6: Графическое представление фермионизованного гамильтониана и примеры различных собственных состояний системы. Направления ребер графа соответствуют порядку фермионных операторов в исследуемом гамильтониане, толщина ребра - силе взаимодействия (J или κ). Приведены объемные собственные состояния с энергиями -5.998 , -5.990 , -5.985 , -5.981 , -5.971 , -5.930 , -5.874 , -5.677 и -3.354 и краевые собственные состояния с энергиями -0.250 и -0.005 . Модуль амплитуды собственных состояний максимален в желтых областях и минимален в синих. Граф приведен для образца с 54 спинами и периметром 18 узлов. Собственные состояния приведены для системы с 9600 спинами (и периметром 240 узлов) при $J = 1$, $\kappa = 0.027$.

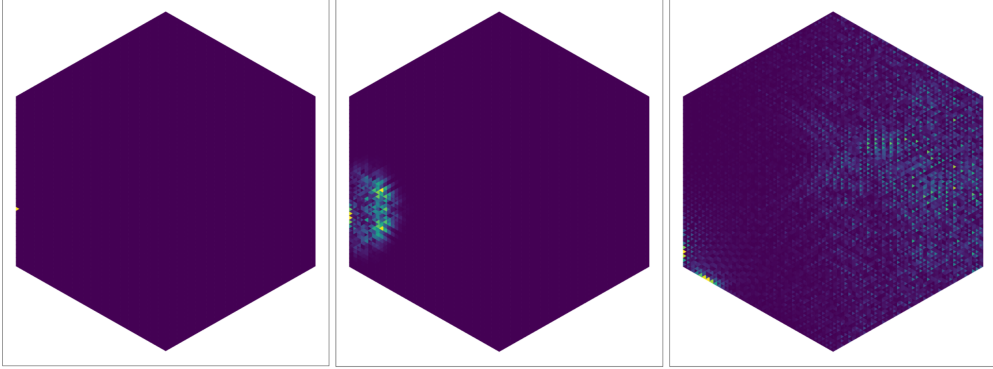


Рис. 7: Пример эволюции точечного возбуждения. Фермион частично излучается в объем, оставшаяся часть продолжает движение вдоль границы.

фазы при прохождении поворота.

Зная точный спектр краевой моды $\varepsilon(q) = 12\kappa \sin(q)$ можно аналитически получить эволюцию волнового пакета без учета эффектов поворота. Пусть $\Psi(j, t)$ - амплитуда волновой функции на j -ом узле в момент времени t . Эволюцию волновой функции можно записать как

$$\Psi(j, t) = \sum_q \Psi(q) e^{iqj} e^{-i\varepsilon(q)t}. \quad (36)$$

Видно, что в приближении линейного спектра эволюция краевой моды эквивалентна сдвигу исходного пакета на $\frac{t\varepsilon_j}{q_j} \approx v_g t$ узлов. При этом из-за нелинейности спектра форма волнового пакета будет искажаться (рис. 10).

При прохождении угла набирается дополнительная фаза $\Delta\varphi(q)$ и в результате прохождения поворота волновая функция имеет вид

$$\Psi(j, t) = \sum_q \Psi(q) e^{iqj} e^{-i\varepsilon(q)t} e^{i\Delta\varphi(q)}, \quad (37)$$

то есть сдвиг q -ой моды волнового пакета становится равным $\frac{t\varepsilon(q) - \Delta\varphi(q)}{q}$.

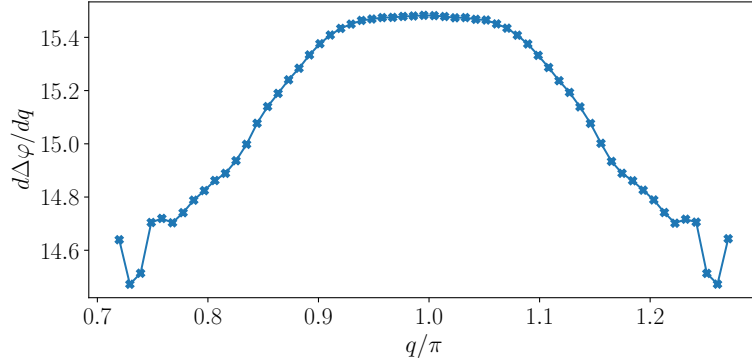


Рис. 8: Зависимость $\frac{d\Delta\varphi}{dq}$ - изменение «эффективной длины» края образца для разных q_x .

Зависимость $\Delta\varphi(q)$ можно получить, изучив фазы численно полученных собственных состояний. На (рис. 8) изображены численные результаты для величины $20 - \partial\Delta\varphi(q)/\partial q$. Видно, что производная фазы слабо зависит от волнового вектора, поэтому при прохождении угла не возникает дополнительных изменений формы волнового пакета. При этом величина $\Delta\varphi(q)$ также зависит от параметра κ (рис. 9).

Если подставить данное изменение фазы, то теоретическое выражение (37) будет хорошо описывать форму волнового пакета, полученную в результате прямой симуляции (рис. 10).

3.3 Образец с линейным спектром краевых состояний

При движении волнового пакета вдоль края нелинейность спектра краевых мод (16) приводит к изменению формы пакета (рис. 10). Избежать подобного искажения можно, сделав спектр краевой моды линейным во всей области $(2\pi/3, 4\pi/3)$. Выпрямление спектра можно получить, добавив зависимость магнитного поля от расстояния

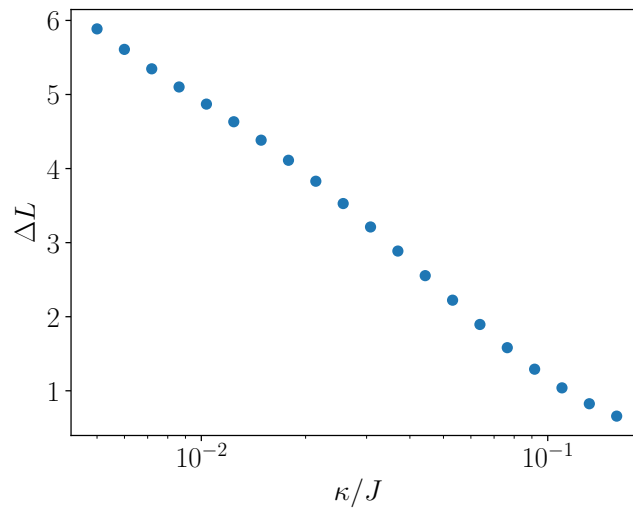


Рис. 9: Изменение эффективной длины края при $q = 0$ для различных значений κ .

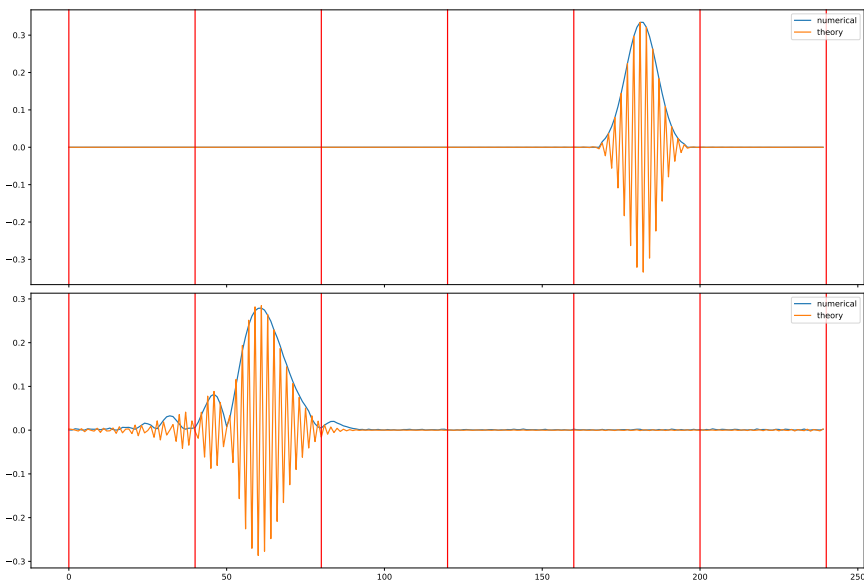


Рис. 10: Сравнение численных результатов с аналитическими после полутора оборотов. Верх - начальное состояние, низ - конечное состояние. Волновой пакет движется слева направо, концы отрезка имеют периодические граничные условия. Вертикальные прямые соответствуют расположению углов шестиугольника. Периметр образца - 240 узлов.

Получается нелинейный спектр. Заданием конкретного магнитного поля h_z на каждом из рядов получить линейный спектр для краевой моды (поля h_x и h_y одинаковы во всем образце). Рассмотрим дополнительное возмущение вида \tilde{V} , соответствующее добавочному магнитному полю.

Его вклад в спектр краевой моды имеет вид

$$\varepsilon^{(\tilde{V})}(q_x) = \sum_k u_j \tilde{V}_{jk} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \tilde{V}_{k \ k} u_k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} u_{k+2} \tilde{V}_{k+2 \ k} u_k = \quad (42)$$

$$= 4C^2 \sum_{l=0}^{\infty} (\kappa_{2l} + 2\kappa_{2l+2}) \sin \frac{q_x}{2} \left(2 \cos \frac{q_x}{2} \right)^{2l+1}, \quad (43)$$

Предположим, что вдалие от края магнитное поле однородно и в середине образца $\kappa = \kappa_b$. Данное поле создает в объеме щель $6\sqrt{3}\kappa_b$. Искажение поля вблизи должно привести к линейному спектру, концы которого совпадут с величиной щели

$$\varepsilon(q_x) = 18\sqrt{3}\kappa_b \left(1 - \frac{q_x}{\pi} \right). \quad (44)$$

Искажение поля на краю, описываемое формулой (43), должно привести к поправке к спектру краевой моды

$$\varepsilon^{(\tilde{V})}(q_x) = \varepsilon(q_x) - \varepsilon^{(1)}(q_x) = 12\kappa_b \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{q_x}{\pi} \right) - \sin q_x \right]. \quad (45)$$

Для коэффициентов κ_{2l} , согласно (45), выполняется соотношение

$$4C^2 \sum_{l=0}^{\infty} (\kappa_{2l} + 2\kappa_{2l+2}) \left(2 \cos \frac{q_x}{2} \right)^{2l+1} = 12\kappa_b \left[\frac{3\sqrt{3}}{2 \sin \frac{q_x}{2}} \left(1 - \frac{q_x}{\pi} \right) - 2 \cos \frac{q_x}{2} \right]. \quad (46)$$

Замена $2 \cos \frac{q_x}{2} = z$, $\sin \frac{q_x}{2} = \sqrt{1 - z^2/4}$, $q_x = 2 \arccos \frac{z}{2}$ упрощает данное соотношение

$$\sum_{l=0}^{\infty} (\kappa_{2l} + 2\kappa_{2l+2}) z^{2l+1} = \frac{3\kappa_b}{1 - z^2} \left[\frac{3\sqrt{3} \left(1 - 2 \frac{\arccos(z/2)}{\pi}\right)}{\sqrt{4 - z^2}} - z \right]. \quad (47)$$

Аналитическое выражение для коэффициентов разложения правой части по степеням z чрезвычайно громоздко, однако они могут быть найдены численно. Несколько первых условий на поправки к κ (физически их можно считать поправками к h_z , при условии сохранения h_x и h_y неизменными)

$$\begin{aligned} \kappa_0 + 2\kappa_2 &= -0.51902\kappa_b, \\ \kappa_2 + 2\kappa_4 &= -0.105523\kappa_b, \\ \kappa_4 + 2\kappa_6 &= -0.022824\kappa_b. \end{aligned} \quad (48)$$

Видно, что с увеличением номера ряда поправки к полю быстро затухают (рис. 11), что позволяет создать в линейный спектр краевых состояний в образце небольшого размера.

3.4 Система с беспорядком

Следующим шагом является исследование влияния беспорядка в системе на собственные состояния и их эволюцию. Для создания беспорядка все константы взаимодействия J и κ умножались на случайные числа, полученные из нормального распределения $\mathcal{N}(1, \sigma)$. Аналогичные системы с другими граничными условиями и распределениями случайных величин неоднократно исследовались в последнее время [29, 30].

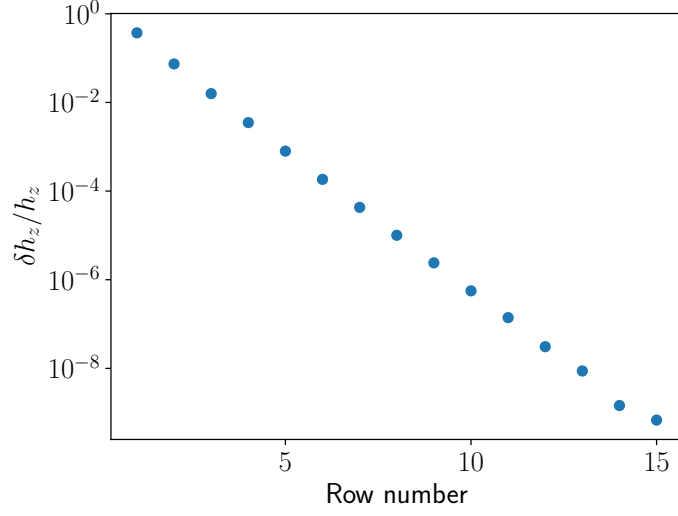


Рис. 11: Зависимость модуля поправки к магнитному полю, создающей линейный спектр краевой моды от ряда.

Одним из эффектов, возникающих в присутствии беспорядка, является локализация. Для оценки степени локализации было найдено среднее значение IPR

$$I_2 = \left\langle \sum_k \sum_{i=1}^N |\psi_i^k|^4 \right\rangle \quad (49)$$

для всех состояний системы и среднее IPR 10 краевых состояний с минимальным модулем энергии (рис. 12). Именно эти краевые состояния определяют основную динамику низкоэнергетичного волнового пакета при распространении вдоль края.

Видно, что с ростом беспорядка краевые состояния локализуются слабее, чем объемные. Наличие в системе сильного беспорядка, достаточного для локализации объемных состояний, не препятствует движению вдоль края системы. В силу киральности краевых состояний они не могут локализоваться и могут лишь деформироваться,

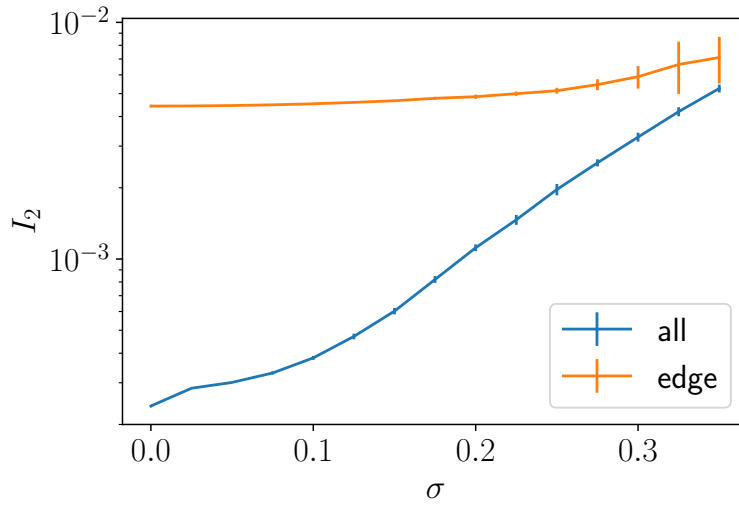


Рис. 12: Зависимость среднего IPR (49) от степени беспорядка для объемных и для краевых состояний системы. В каждой точке отмечены среднее значение и среднеквадратичное отклонение на выборке из 15 случайных образцов, содержащих 9600 узлов. Результаты приведены для $J = 1$, $\kappa = 0.027$.

обходя краевые дефекты, что позволяет им эффективно передавать информацию даже при наличии беспорядка.

В разделе 5 данная симуляция будет использоваться для изучения влияния беспорядка на точность проведения квантовых операций, описанных в разделе 2.

4 Взаимодействие края и внешнего кубита

Нелинейность спектра краевых мод приводит к искажению волнового пакета во время движения. Для уменьшения потерь при передаче информации волновой пакет должен быть локализован в узкой области импульсного пространства вблизи $q_x = \pi$. В данном разделе показано два способа обмена s -фермиона внешнего кубита с линейной комбинацией s -фермионов края, образующей широкий волновой пакет в координатном пространстве.

4.1 Древообразная структура

Рассмотрим следующую структуру подключения внешнего кубита к краю (рис. 13), left. До начала проведения операции все голубые связи включены, а зеленая - выключена. Типы связей выбраны таким образом, что желтые кубиты эффективно являются частью решетки модели Китаева.

После фермионизации гамильтониана полученной структуры (2) пространство состояний разделяется на различные сектора, определяемые значением операторов $\hat{u}^{ij} = 1$ на ребрах. В результате численного анализа было показано, что основному состоянию соответствует сектор в котором все $\hat{u}^{ij} = 1$. При этом, однако, энергия возникновения вихрей уменьшается с ростом размера структуры (рис. 14), что ограничивает допустимый размер волнового пакета.

Внешний кубит (красная точка) задается произвольным образом, поэтому зеленому ребру соответствует произвольный оператор \hat{u}^g , аналогичный операторам u^1, u^2 из предыдущего раздела.

Процесс записи на край производится следующим образом. В ис-

ходный момент все синие и зеленое взаимодействия отключаются. Затем на фиксированное время включается zz -взаимодействие λ_1 и состояния кубитов, которые оно соединяет, меняются местами согласно (26).

$$c^{\text{ext}} \mapsto \hat{u}^g c^1. \quad (50)$$

На следующем шаге включаются взаимодействия λ_2 и λ_3 .

$$H = \lambda_2 \sigma_y^1 \sigma_y^2 + \lambda_3 \sigma_x^1 \sigma_x^3. \quad (51)$$

На фермионном языке при отсутствии вихрей $u^{ij} = 1$ этот гамильтониан выглядит как

$$H = i\lambda_2 c^1 c^2 + i\lambda_3 c^1 c^3 = i\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} c^1 c^{23}, \quad (52)$$

где введен новый фермион $c^{23} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}} (\lambda_2 c^2 + \lambda_3 c^3)$. Как было показано выше (26), подобное взаимодействие с силой $\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}$, включенное на время $\pi / \left(4\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}\right)$ приводит к обмену состояний c^1 и c^{23}

$$c^{\text{ext}} \mapsto \frac{\hat{u}^g}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}} (\lambda_2 c^2 + \lambda_3 c^3). \quad (53)$$

Теперь можно включить взаимодействия λ_4 и λ_5 (положим $\lambda_4 = \lambda_5$) кубитов 2 и 3 со спинами края. За время $\pi / (4\lambda_4)$ произойдет новый обмен и состояние внешнего кубита перейдет в суперпозицию двух краевых фермионов

$$c^{\text{ext}} \mapsto \frac{\hat{u}^g}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}} (\lambda_2 c^{e1} + \lambda_3 c^{e2}). \quad (54)$$

В результате данной последовательности квантовых операций получен простейший волновой пакет, форма которого зависит от отно-

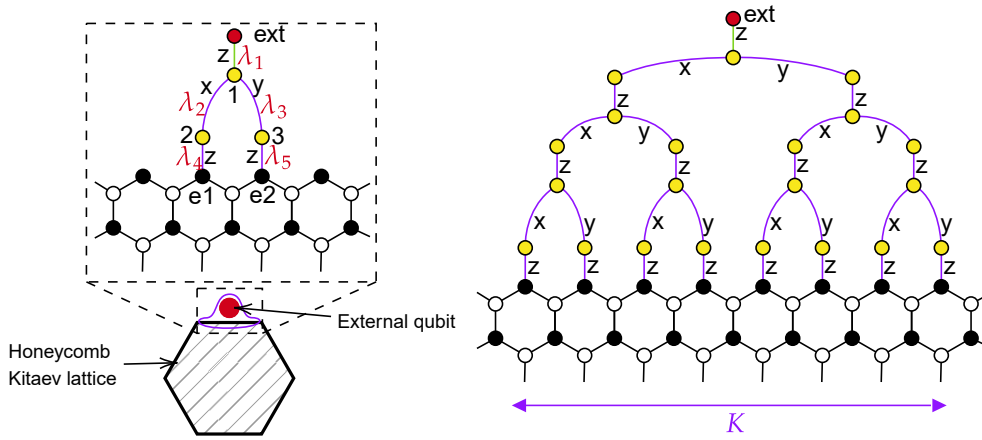


Рис. 13: Left: Взаимодействие внешнего управляемого кубита (красный круг) с краем решетки модели Китаева. Синие и зеленые α -ребра обозначают $\sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha$ управляемые взаимодействия ($\alpha = x, y, z$). Right: Расширенная структура, позволяющая записывать на край и считывать с края более широкие пакеты.

шения λ_2/λ_3 . Выполнение операций в обратном порядке позволяет записать состояние краевого волнового пакета на внешний кубит.

Алгоритм можно обобщить для получения более широких волновых пакетов произвольной формы (рис. 13), right. Используя древовидную структуру можно получить волновой пакет, являющийся суперпозицией K краевых фермионов

$$c^{\text{ext}} \rightarrow \hat{u}^g \sum_{i=1}^K \alpha_i c^{e_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^K \alpha_i^2 = 1 \quad (55)$$

коэффициенты перед которыми будут определяться соотношением констант взаимодействия.

Для пакетов разной ширины численно было найдено оптимальное перекрытие (рис. 15). Видно, что с увеличением ширины пакета точность передачи увеличивается.

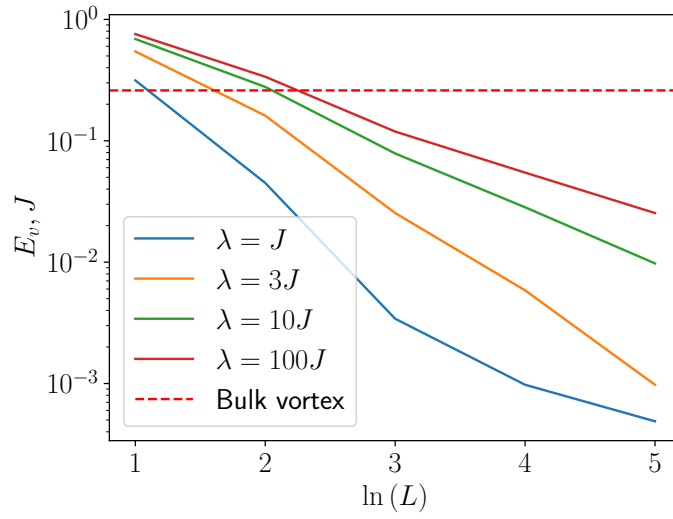


Рис. 14: Энергия возникновения пары вихрей в древообразной структуре для различных констант голубых взаимодействий (в единицах J). Наиболее низкоэнергетичный вихрь возникает в самой крупной ячейке дерева.

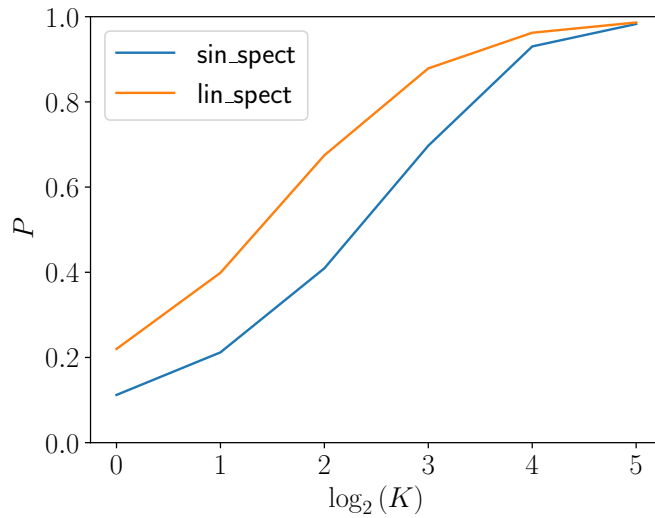


Рис. 15: Перекрытие для различных размеров записывающей структуры K . Уменьшение перекрытия вызвано влиянием дисперсии и взаимодействием с объемными модами и ослабевает с увеличением ширины волнового пакета. Приведены данные для двух образцов с синусоидальным и линейным спектрами с периметром 120 узлов.

4.2 Точечное подключение кубита

Получим форму волнового пакета, возникающую при точечном подключении внешнего кубита c_1 . Между кубитом и одним из спинов края включено взаимодействие с силой λ . Собственные состояния основного гамильтониана, с которыми происходит взаимодействие - это краевые состояния, характеризуемые импульсами q_x и объемные состояния, характеризуемые волновым вектором \mathbf{q} . c -фермион можно представить в виде линейной комбинации объемных и краевых состояний

$$c_{e1} = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{dq_x}{2\pi} \sqrt{1 - 4 \cos^2 \left(\frac{q_x}{2} \right)} \psi_{q_x} + \int_{BZ} d\mathbf{q} \psi_{\mathbf{q}} \quad (56)$$

Найдем эволюцию амплитуды на внешнем узле, используя золотое правило Ферми, полагая, что объемные состояния не возбуждаются

$$\dot{c}_1 = -\frac{\gamma}{2} c_1, \quad (57)$$

$$\gamma = 2\pi \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{dq_x}{2\pi} \lambda^2 \left[\sqrt{1 - 4 \cos^2 \left(\frac{q_x}{2} \right)} \right]^2 \delta(v_g(\pi - q_x)) = \frac{\lambda^2}{v_g}, \quad (58)$$

$$c_1(t) = e^{-\gamma t/2}. \quad (59)$$

Теперь посмотрим, в пакет какой формы происходит эта запись. Амплитуда состояния (56) на крайнем ряду узлов равна произведению амплитуды состояния на крайнем узле на вес этого состояния. Мы будем учитывать только состояния с энергией $< \Delta$, что ограничит область применимости итогового ответа случаями $\lambda \lesssim \Delta$. В

данном приближении можно учитывать только краевые состояния, так как большинство объемных состояний в этом случае быстро осциллируют, а небольшое количество объемных состояний с энергией $\sim \Delta$ входят ответ с коэффициентом $1/S$.

$$\psi_e(q_x) = A \left(1 - 4 \cos^2 \left(\frac{q_x}{2}\right)\right), \quad \frac{2\pi}{3} < q_x < \frac{4\pi}{3} \quad (60)$$

Выберем нормировку таким образом, что на больших масштабах данный пакет эквивалентен δ -функции в координатном пространстве

$$A^{-1} = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{dq_x}{2\pi} \left(1 - 4 \cos^2 \left(\frac{q_x}{2}\right)\right) = \frac{1}{3\pi} (3\sqrt{3} - \pi) \quad (61)$$

В координатном пространстве этой комбинации краевых состояний соответствует волновой пакет

$$\psi(x) = A \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{dq_x}{2\pi} \left(1 - 4 \cos^2 \left(\frac{q_x}{2}\right)\right) e^{iq_x x} = A \frac{e^{-i\pi x} (\sqrt{3}x \cos(\frac{\pi x}{3}) - \sin(\frac{\pi x}{3}))}{\pi x (x^2 - 1)} \quad (62)$$

Таким образом в каждый момент времени запись состояния внешнего происходит в волновой пакет данной формы. При этом все, что было записано на край, движется со скоростью v_g вдоль края. В результате запись происходит в движущийся пакет. При этом

$$\delta c_{e1}(\delta t) = 2\lambda\delta t c_1 = 2\lambda\delta t \exp(-\gamma t/2), \quad \gamma = \frac{\lambda^2}{v_g} \quad (63)$$

Так как амплитуда состояния на внешнем кубите постоянно уменьшается, то в результате координатном пространстве получается сверт-

ка с экспонентой

$$\Psi(x) = \lambda \int_0^{\infty} dt \psi(v_g t - x) e^{i(v_g t - x)} e^{-\gamma t/2} = \quad (64)$$

$$= \frac{\lambda A}{\pi v_g} \int_0^{\infty} du \frac{(\sqrt{3}x \cos(\frac{\pi}{3}(u-x)) - \sin(\frac{\pi}{3}(u-x)))}{(u-x)((u-x)^2 - 1)} e^{-\frac{\gamma u}{2v_g}} \quad (65)$$

Данный интеграл не выражается в элементарных функциях, однако численное интегрирование дает результаты, хорошо совпадающие с формой пакета в прямой симуляции для разных констант взаимодействия λ (рис. 16).

Заметим, что если $\gamma \ll v_g$, то $\psi(v_g t - x)$ можно заменить на $\delta(v_g t - x)$ и в результате $\Psi(x) \approx \frac{\lambda}{v_g} e^{-\frac{\gamma x}{2v_g}}$.

Несимметричность волновых пакетов приводит к снижению точности передачи информации (рис. 17). При этом для некоторых λ волновой пакет получается довольно симметричным, что позволяет достичь довольно большой точности $P = 0.978$.

4.3 Волновой пакет произвольной формы

Рассмотрим теперь, как эволюционирует состояние на внешнем кубите при непостоянной константе взаимодействия $\lambda(t)$, равной 0 на $\pm\infty$. Считаем, что процесс записи начинается при $t = -\infty$. Тогда

$$\dot{c}_1(t) = -\lambda(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \gamma(t') dt'\right). \quad (66)$$

Именно с такой скоростью состояние записывается на край. В

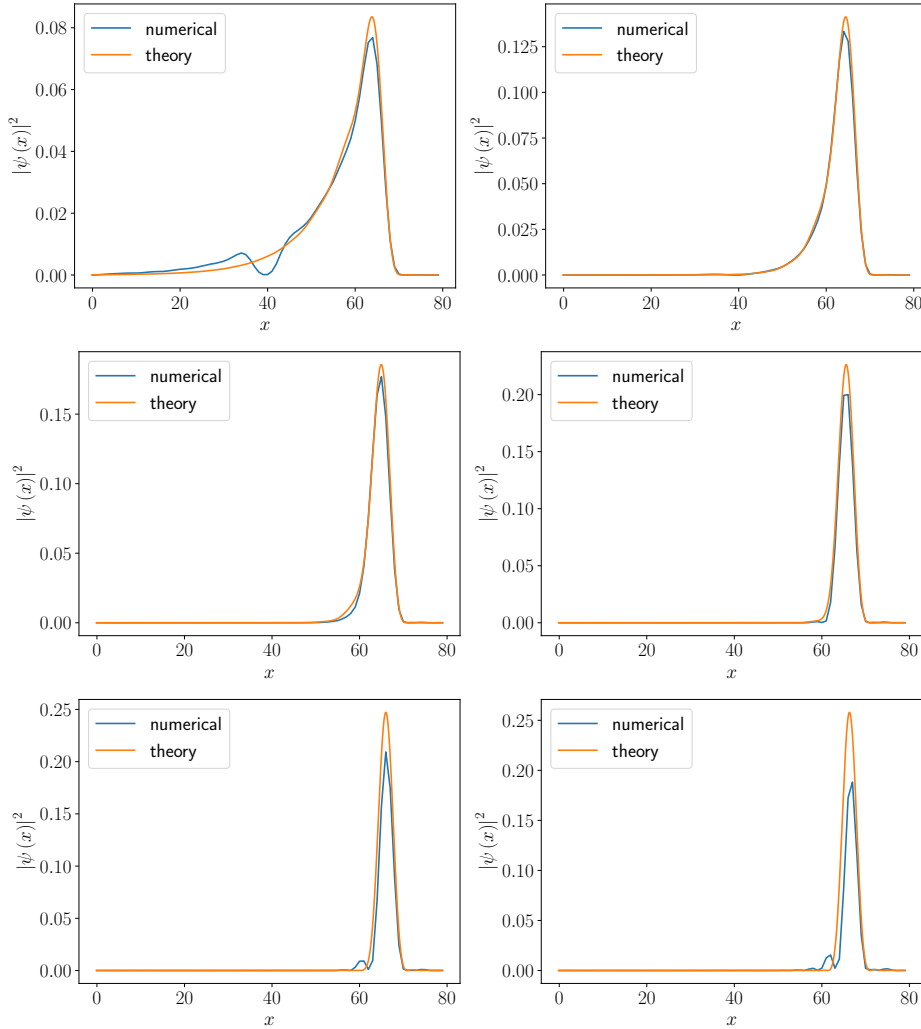


Рис. 16: Сравнение формулы (65) волновыми пакетами, полученными в численной симуляции для $\lambda = 0.04, 0.06, 0.08, 0.11, 0.14, 0.17$ и $\kappa = 0.027$ и длиной стороны в 40 узлов. В точке $x = 40$ находится угол границы, что и приводит к проседанию амплитуды для численных результатов вблизи этой области. При больших значениях λ различия формы численного и аналитического пакетов вызваны возбуждением объемных мод, а различия в нормировке - тем, что мода в численной симуляции сосредоточена не только на крайнем ряду узлов.

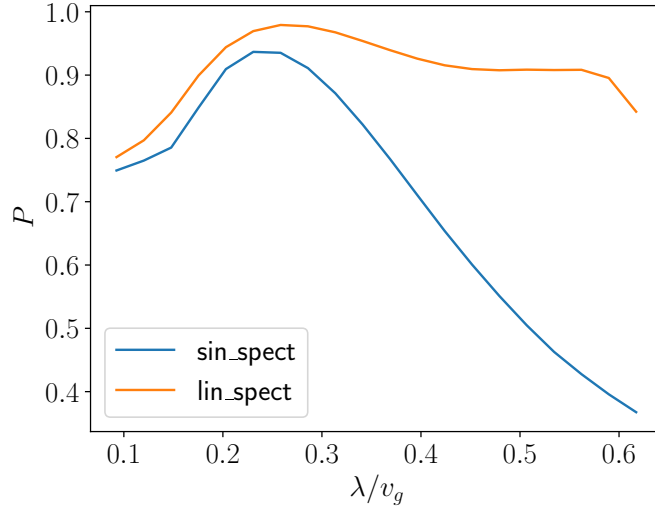


Рис. 17: Максимальная амплитуда состояния на конечном кубите в зависимости от силы λ постоянного взаимодействия края и внешнего кубита. Приведены результаты для образцов с линейным и синусоидальным спектрами.

результате

$$\Psi^{\lambda(t)}(x) = \frac{1}{v_g} \int_{-\infty}^{\infty} dt \psi(v_g t - x) e^{i(v_g t - x)\lambda(t)} \exp\left(-\frac{1}{2v_g} \int_{-\infty}^t \lambda^2(t') dt'\right). \quad (67)$$

Так как $\psi(x) e^{ix}$ - четная функция, то если

$$W(t) = \lambda(t) \exp\left(-\frac{1}{v_g} \int_{-\infty}^t \lambda^2(t') dt'\right) \quad (68)$$

- тоже четная функция, то волновой пакет будет симметричным. Для симметричного волнового пакета, согласно теореме об обратимости, чтение будет происходить совершенно аналогично записи, что приведет к передаче информации без потерь. Соответственно, любой сим-

метричный волновой пакет будет приводить к передаче информации без потерь в идеальной системе.

При движении пакета любой длины из-за нелинейности спектра его форма будет искажаться. Однако данный эффект можно компенсировать, создав изначально искаженный пакет. Знание спектра краевой моды позволяет нам предсказать эволюцию любого пакета Ψ . Пусть $U(h_x, h_y, h_z, s)$ - оператор эволюции волнового пакета при перемещении на расстояние s вдоль края в модели Китаева с приложенным магнитным полем (h_x, h_y, h_z) . Тогда пакет $U(h_x, h_y, h_z, s)\Psi$, созданный в точке s в поле $(-h_x, -h_y, -h_z)$, при достижении точки 0 эволюционирует в Ψ . Подобным образом можно контролировать финальную форму пакета.

5 Шум и беспорядок

Реальные структуры, описываемые моделью Китаева, могут подвергаться воздействию внешних шумов, а также могут иметь постоянные неоднородности. Важно оценить влияние данных эффектов на движение волновых пакетов вдоль края, и, соответственно, на точность проведения квантовых операций.

5.1 Влияние однородного беспорядка на передачу информации

Предположим, что все связи в модели Китаева синхронно флуктуируют от эксперимента к эксперименту. Физически подобная ситуация реализуется, например, при изменении однородного магнитного поля, действующего на всю систему. Будем считать, что относительное изменение величины связи мало и весь гамильтониан умножается на константу $1 + \chi$, где $|\chi| \ll 1$.

В этом случае собственные состояния гамильтониана в процессе эволюции остаются неизменными, и меняются только собственные энергии данных состояний. Каждое состояние эволюционирует как

$$i \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon (1 + \chi) \psi_\varepsilon. \quad (69)$$

Тогда эволюция собственного состояния с энергией ε имеет вид

$$\psi_\varepsilon(t) = \exp(-i\varepsilon t(1 + \chi)) \psi_\varepsilon(0). \quad (70)$$

Эволюцию любого начального состояния системы можно пред-

ставить как

$$\Psi(t) = V \exp[-iEt(1 + \chi)] V^{-1} \Psi(0), \quad (71)$$

где V - матрица собственных векторов гамильтониана, E - диагональная матрица собственных значений, а экспонента берется поэлементно, а не в матричном виде.

Усредним результат эволюции по реализациям беспорядка

$$\langle \Psi(t) \rangle = V \langle \exp[-iEt(1 + \chi)] \rangle V^{-1} \Psi(0). \quad (72)$$

Предположим, что χ - гауссова величина с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Тогда для случайной величины $e^{i\chi\epsilon t}$ плотность вероятности имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int d\chi e^{i\chi\epsilon t - \frac{\chi^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{\epsilon^2 t^2 \sigma^2}{2}}. \quad (73)$$

Для гауссова волнового пакета шириной \tilde{w} распределение по модам

$$\Psi(k) = \frac{1}{(\pi\tilde{w}^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{k^2}{2\tilde{w}^2}\right). \quad (74)$$

При этом $\varepsilon(k) \approx -v_g k$, что позволяет вычислить перекрытие начального и конечного состояний

$$\langle P \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{\pi\tilde{\sigma}^2}} \exp\left(-\frac{k^2}{\tilde{w}^2} - \frac{a^2 v_g^2 t^2 k^2}{2}\right) = \left(1 + \frac{v_g^2 t^2 \tilde{w}^2}{2} \sigma^2\right)^{-1/2}. \quad (75)$$

Вспомним, что $v_g t = S$ - расстояние, пройденное модой, а $\frac{1}{\tilde{w}} = w$

- ширина пакета в координатном пространстве. То есть

$$\langle P \rangle = \left(1 + \frac{S^2}{2w^2} \sigma^2 \right)^{-1/2}. \quad (76)$$

5.2 δ -коррелированный беспорядок

Теперь рассмотрим δ -коррелированный беспорядок в связях, также меняющийся от эксперимента к эксперименту. Предположим, что все константы флуктуируют с фиксированной дисперсией $\langle \delta J_{ij}^2 \rangle = \sigma_J^2 J^2$, $\langle \delta \kappa_{ij}^2 \rangle = \sigma_\kappa^2 \kappa^2$.

5.2.1 Энергии вихрей для δ -коррелированного беспорядка

В обыкновенной модели Китаева основное состояние системы соответствует безвихревому сектору. Для начала проверим, сохраняется ли это свойство при наличии флуктуаций в константах связи.

Для фиксированной реализации беспорядка найдем минимальную энергию возбуждения пары вихрей в соседних ячейках, перебрав все сектора с такими вихрями. Зависимость минимальной энергии от степени беспорядка изображена на (рис. 18). Видно, что в широкой области значений основное состояние остается безвихревым.

5.2.2 Влияние беспорядка на передачу информации

При передаче квантовой информации с помощи края важно считать состояние с края в момент максимального перекрытия ожидаемого волнового пакета с реальным. Для проведения численного эксперимента предположим, что пакет считывается после совершения полного оборота в том же месте и тем же способом, что и запись. В

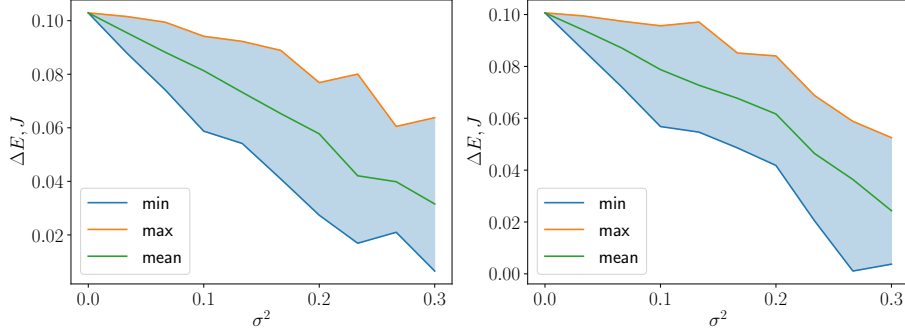


Рис. 18: Минимальная энергия возбуждения пары вихрей для образцов, состоящих из 150 и 294 узлов.

результате для перекрытия начального и конечного состояний получилась следующая зависимость (рис. 19). При этом время оборота увеличивается с ростом беспорядка (рис. 20).

Найдем аналитически перекрытие для случая оптимального конечного положения пакета. В первом порядке теории возмущений каждое состояние получает поправку к энергии

$$\varepsilon^{(1)}(q_x) = V_{q_x q_x} \quad (77)$$

Где $V_{q_x q_x}$ - усреднение по беспорядку данного краевого состояния. Оно практически полностью локализовано на крайнем ряду узлов (рис. 3)а, что значительно упрощает вычисления.

$$\langle \varepsilon^{(1)}(q_x) \rangle = 0, \quad \langle (\varepsilon^{(1)}(q_x))^2 \rangle = \frac{\kappa^2}{L} \tilde{q}_x^2 (128\sigma_J^2 + 48\sigma_\kappa^2) \quad (78)$$

Видно, что $\langle (\varepsilon^{(1)}(q_x))^2 \rangle \sim \varepsilon^2(q_x) \sigma^2$, то есть в первом приближении флуктуации энергий собственных состояний совпадают с (69).

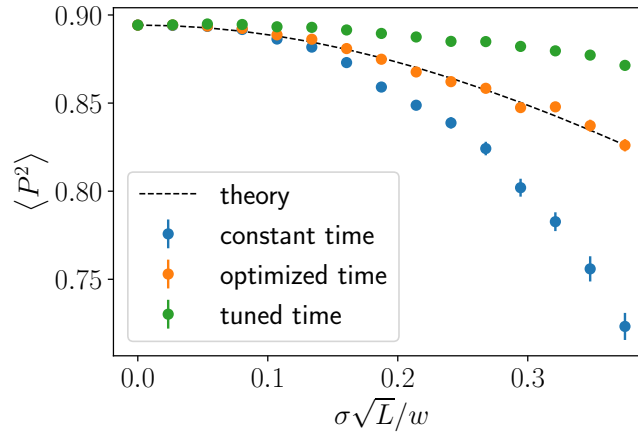


Рис. 19: Зависимость перекрытия начального и конечного состояний от степени беспорядка. Изображены результаты трех способов считывания. В случае constant time считывание происходило в тот же момент, что и в идеальной системе. В случае optimized time считывание происходило в момент времени, максимизирующий среднее по всем реализациям перекрытие. В случае tuned time время движения подбиралось отдельно для каждой реализации беспорядка. Результаты приведены для выборки из 300 случайных образцов содержащих 2400 узлов.

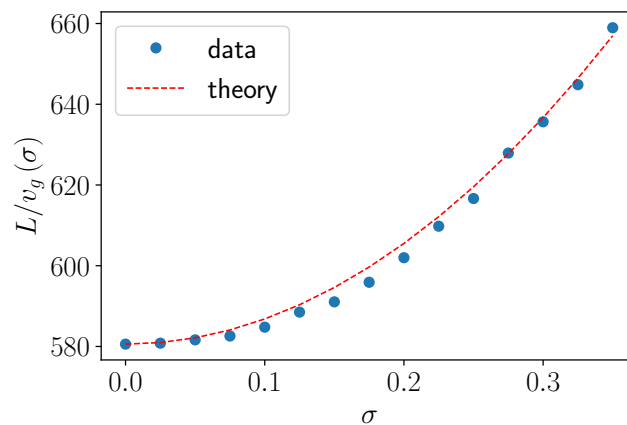


Рис. 20: Оптимальное время оборота в системе из 2400 узлов.

Воспользовавшись результатом из прошлого раздела

$$\langle P^2 \rangle = P_0^2 \left(1 + \frac{(8\sigma_J^2 + 3\sigma_\kappa^2) L}{9w^2} \right)^{-1/2}. \quad (79)$$

Для второй поправки

$$\langle \varepsilon_b^{(2)}(q_x) \rangle = -\varepsilon(q_x) \sigma_J^2 \sum_{E_{q'}} \frac{4J^2}{V |E_{q'}|^2}, \quad \langle \langle \langle (\varepsilon_b^{(2)})^2 \rangle \rangle \rangle \sim \frac{\kappa^2 q_x^2 \sigma^4}{S} \quad (80)$$

Данную сумму можно найти численно, используя собственные энергии объемных состояний модели Китаева без беспорядка. Для $\kappa/J = 0.027$

$$\frac{1}{V} \sum_{E_i} \frac{4J^2}{E_i^2} \approx 1.074, \quad (81)$$

$$\langle \delta v_g^{(2)} \rangle = -1.074 v_g^{(0)} \sigma_J^2. \quad (82)$$

Таким образом вторая поправка дает постоянный вклад $\sim \sigma_J^2$ в групповую скорость и приводит к замедлению волнового пакета. Данная формула хорошо описывает полученные численные результаты (рис. 20). Видно, что флуктуации второй поправки (80) малы по параметру σ^2 и при вычислении оптимального перекрытия ими можно пренебречь.

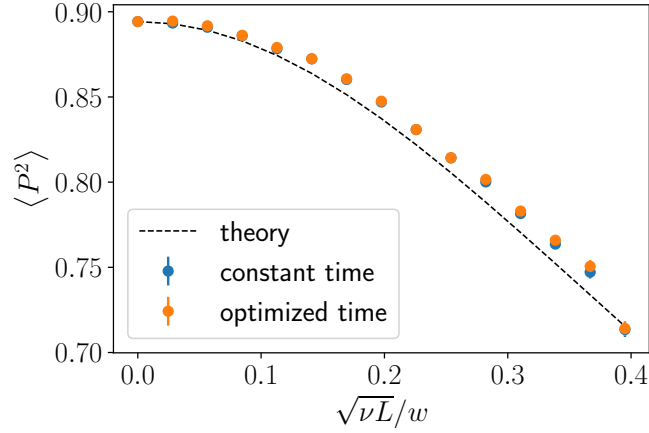


Рис. 21: Перекрытие в случае δ -коррелированного $1/f$ шума. Синим изображено перекрытие для времени останковки $t = 580.58$, а желтым - за оптимально подобранное увеличенное время.

5.3 δ -коррелированный в пространстве $1/f$ шум

Аналогичные измерения можно провести и для системы, в которой каждая связь в гамильтониане меняется со временем. Результаты симуляции показывают, что в данном случае также происходит замедление моды, что приводит к увеличению времени оборота. На графике (рис. 21) изображена зависимость перекрытия для двух времен останковки - для времени оборота в идеальной системе и для оптимально подобранного времени.

В данном случае беспорядок меняется со временем, но при этом изменение за время прохождения волнового пакета мало, что объясняет возможность использования полученных выше формул (79) и (82).

5.4 Однородный в пространстве шум

Предположим, вся связи в модели Китаева синхронно меняются со временем. В этом случае собственные состояния гамильтониана в процессе эволюции остаются неизменными, и меняются только собственные энергии данных состояний. Каждое состояние эволюционирует как

$$i \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon (1 + \xi(t)) \psi_\varepsilon \quad (83)$$

Тогда эволюция собственного состояния с энергией ε имеет вид

$$\psi_\varepsilon(t) = \exp \left(-i\varepsilon \int_0^t dt' (1 + \xi(t')) \right) \psi_\varepsilon(0). \quad (84)$$

Таким образом перекрытие зависит только от величины $\chi(t) = \int_0^t dt' (\xi(t'))$, что позволяет описать эволюцию формулой (70). В результате перекрытие выражается формулой, аналогичной (76)

$$P = \left(1 + \frac{2\pi^2 S^2}{\sigma^2} \langle \chi^2(t) \rangle \right)^{-1/2} \quad (85)$$

где $\langle \chi^2(t) \rangle$.

Определим аналитическую зависимость $\langle \chi^2(t) \rangle$

$$\langle \chi^2(t) \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} \langle \xi_\omega^2 \rangle \left(\frac{\sin(\omega t/2)}{\omega/2} \right)^2, \quad (86)$$

где $\langle \xi_\omega^2 \rangle = \int dt \langle \xi(0) \xi(t) \rangle e^{i\omega t}$ - спектральная плотность шума.

Для коротко скорректированного шума

$$\langle \chi^2(t) \rangle \approx \langle \xi_{\omega=0}^2 \rangle \cdot t, \quad (87)$$

а для $1/f$ шума $\langle \xi_\omega^2 \rangle = \nu / |\omega|$

$$\langle \chi^2(t) \rangle \approx \frac{\nu}{\pi} t^2 \ln \frac{1}{\omega_{\text{ir}} t}, \quad (88)$$

где ω_{ir} - частота ультрафиолетовой обрезки.

5.5 Оптимальная форма волнового пакета

Попробуем выбрать форму волнового пакета, полученного в разделе 4.3. Во-первых, операция должна происходить за конечное время, соответственно функция $W(t)$ должна быть отличной от 0 только на ограниченном интервале. Обозначим его границы как $\pm t_b$. Так как за это время состояние внешнего кубита должно полностью записаться на край, то, согласно (66),

$$\int_{-t_b}^{t_b} dt W^2(t) = 1. \quad (89)$$

Найдем форму волнового пакета, наиболее устойчивую к воздействию внешних шумов и беспорядка. Как было получено нами ранее, основной эффект беспорядка проявляется в неопределенности положения волнового пакета в пространстве. Будем считать, что она описывается распределением $R(\xi)$. В результате средняя точность операции выражается как

$$\langle P^2 \rangle = \int d\xi R(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{\lambda(t)}(x) \Psi^{\lambda(t)}(x + \xi) \right]^2. \quad (90)$$

Нас интересуют только квантовые операции с точностью, близкой

к 1, поэтому будем считать, что $R(\xi)$ отлична от нуля только для малых значений беспорядка. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x) \Psi(x + \xi) \approx \quad (91)$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\Psi^2(x) + \xi \Psi(x) \Psi'(x) + \frac{\xi^2}{2} \Psi(x) \Psi''(x) \right). \quad (92)$$

Первое слагаемое - это нормировка волновой функции, второе - полная производная и её интегрирование даст 0, третье слагаемое удобно продифференцировать по частям

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x) \Psi(x + \xi) \approx 1 - \frac{\xi^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\Psi'(x))^2. \quad (93)$$

Тогда

$$\langle P^2 \rangle \approx 1 - \int d\xi \xi^2 R(\xi) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx (\Psi'(x))^2. \quad (94)$$

Статистика шума не зависит от формы волнового пакета, поэтому необходимо минимизировать последний множитель. Распишем его

ЯВНО

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (\Psi'(x))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial}{\partial x} C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi(y) W(y+x) \right]^2 = \quad (95)$$

$$= C^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi(y) \psi(z) W'(z+x) W'(y+x). \quad (96)$$

Предположим, что групповая скорость велика по сравнению с $\lambda(t)$. В этом случае $\psi(y)$ и $\psi(z)$ меняются значительно быстрее, чем $W'(x)$ и могут быть заменены на δ -функции (это условие можно записать как $v_g \gg 1/t_b$). Тогда необходимо минимизировать $\int_{-t_b}^{t_b} dt \left(W' \left(\frac{x}{v_g} \right) \right)^2$. Экстремум подобного действия с учетом нулевых граничных условий и нормировки достигается для

$$W(x) = \cos \left(\frac{\pi x}{2t_b} \right), \quad \int_{-t_b}^{t_b} dt \left(W' \left(\frac{x}{v_g} \right) \right)^2 = \frac{\pi^2}{4t_b^2 v_g^2}. \quad (97)$$

В результате

$$\langle P^2 \rangle = 1 - \frac{\pi^2}{4t_b^2 v_g^2} \langle \xi^2 \rangle, \quad (98)$$

где величину $w = 2t_b v_g / \pi$ можно назвать шириной пакета. В случае рассмотренных выше беспорядков статистика смещения имеет вид

$$\xi = \frac{\delta v_g^{(1)}}{v_g} L, \quad \langle \xi^2 \rangle = \frac{L^2}{v_g^2} \frac{\langle (\varepsilon^{(1)}(q_x))^2 \rangle}{q_x^2}. \quad (99)$$

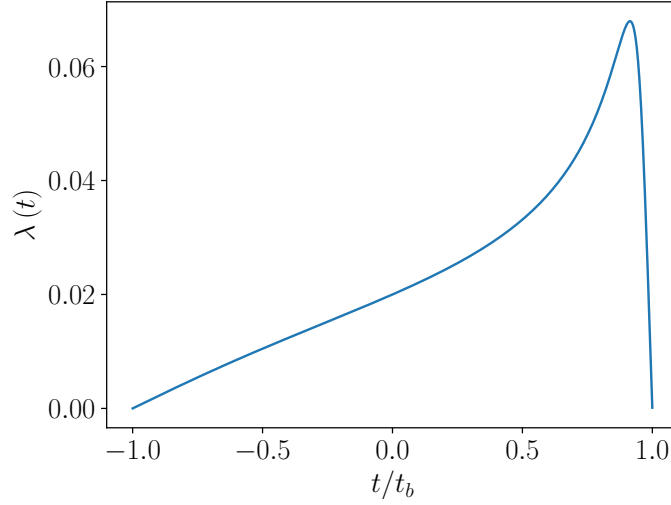


Рис. 22: Временная зависимость взаимодействия $\lambda(t)$, приводящая к записи волнового пакета оптимальной формы (97).

Таким образом для гауссова шума

$$\langle P^2 \rangle = 1 - \frac{L}{w^2} \frac{(8\sigma_J^2 + 3\sigma_\kappa^2)}{9}. \quad (100)$$

Данный результат отличается от выражения для гауссова волнового пакета тем, что здесь w ограничивает область, в которой пакет отличен от 0, а в прошлом случае w было средним отклонением для нормального распределения.

Используя формулу (68) можно численно найти временную зависимость силы взаимодействия, приводящую к записи на край волнового пакета оптимальной формы (97). Полученная зависимость имеет вид (рис. 22).

Все рассмотренные в данном разделе неоднородности приводят к степенному спаданию точности квантовой операции. Несмотря на топологическую защищенность краевых состояний, беспорядок создает неопределенность в их положении, что приводит к ошибкам

при записи состояния на внешний кубит.

6 Дополнительные эффекты в модели Китаева

Реальные системы, помимо беспорядка, имеют другие отличия от идеальной модели Китаева. Помимо основных связей в модели Китаева неизбежно будут присутствовать дополнительные спиновые взаимодействия [31]. Также могут возникать вакансии на месте отсутствующих узлов [32].

6.1 Учет дополнительных взаимодействий

При добавлении к гамильтониану модели Китаева слабых спиновых взаимодействий других типов спектр объемных и краевых мод в магнитном поле изменится. Подобные взаимодействия можно унитарным преобразованием свести к обычной модели Китаева, однако оно изменит операторы σ (103), (105), (рис. 23). Таким образом при включении магнитного поля в гамильтониан войдут слагаемые, соединяющие узлы одной подрешетки, фермионный вид которых полностью соответствует слагаемым порядка κ в точной модели Китаева. Однако, в отличие от точной модели (7), они пропорциональны первой степени приложенного поля, причем связи в каждом из трех направлений зависят только от соответствующей компоненты поля.

6.1.1 Фермионное представление возмущения

Вид спиновых взаимодействий ограничен симметричными соображениями, что позволяет упростить анализ произвольных взаимодействий.

Согласно рассуждениям, приведенных в [31], подобные вклады

могут быть учтены калибровочным преобразованием гамильтониана. Пусть исходный гамильтониан H состоит из двух частей - гамильтониана модели Китаева H_0 и дополнительных взаимодействий V . Рассмотрим преобразование $U = e^{iS}$, которое так преобразует гамильтониан, что в новом базисе собственные состояния $|\psi\rangle$ будут совпадать с собственными состояниями $|\psi_0\rangle$ гамильтониана H_0 :

$$|\psi\rangle = U |\psi_0\rangle . \quad (101)$$

U , как и любой другой физический оператор, действующий на произвольное состояние модели Китаева, можно разбить на операторы, действующие на состояния с фиксированным количеством потоков $U = \sum_{k=0}^{\infty} U_{2k}$. Тогда операторы σ_i^α в результате такого преобразования переходят в

$$\sigma_i^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}_i^\alpha \equiv U^\dagger \sigma_i^\alpha U = \sum_{k,k'} U_{2k'}^\dagger \sigma_i^\alpha U_{2k} = \sum_k \tilde{\sigma}_{i,2k}^\alpha . \quad (102)$$

В общем виде после преобразования σ_i^α можно представить как

$$\tilde{\sigma}_i^\alpha = (iZc_i b_i^\alpha + \dots) + (f_{ijk}^\alpha i c_j c_k + \dots) . \quad (103)$$

где первая скобка содержит произведения фермионов, содержащие b^α , а вторая скобка - только комбинации из c -фермионов (при малости дополнительных взаимодействий Z близко к 1, а остальные коэффициенты малы).

Из соображений симметрии, в [31] показано, что вклад, содержащий ровно два c -фермиона, должен иметь вид

$$\tilde{\sigma}_{i,0}^\alpha = i \sum_{j,k} f_{ijk}^\alpha (c_j c_k + c_{h_\alpha(k)} c_{h_\alpha(j)}) . \quad (104)$$

Где $h_\alpha(k)$ - индекс узла, симметричного узлу k , относительно прямой, проведенной через узел i в направлении α . Чем больше расстояние между узлами i и j, k , тем более высокий порядок взаимодействия приведет к такому коэффициенту в разложении. Таким образом основной вклад вносит слагаемое, содержащее соседние с i узлы

$$\frac{i}{2} f \epsilon^{\alpha\nu\lambda} c_{i+s_i\hat{\nu}} c_{i+s_i n\hat{\lambda}}. \quad (105)$$

где $\hat{\alpha}$ - вектор, соединяющий два узла на концах ребра α -типа ($\alpha = x, y, z$), а $s_i = 1$ для черных и $s_i = -1$ для белых узлов ((рис. 23)), n . Аналогично рассуждениям о приложении поля к точной модели Китаева (8), такая комбинация c -фермионов порождается комбинацией σ -матриц вида

$$\sigma_i^\alpha \prod_{\nu \neq \mu} \sigma_{i+s_i\hat{\nu}}^\nu. \quad (106)$$

(Например $\sigma_{k-1}^x \sigma_k^z \sigma_{k+1}^y$.)

6.1.2 Оценка коэффициента

Симметрия модели допускает 4 типа взаимодействия между соседними спинами. Одно из них из них - гамильтониан модели Китаева, а остальные три типа могут входить в возмущение.

$$V_H = J_H \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \cdot \sigma_j, \quad (107)$$

$$V_c = J_c \sum_{\mu(\nu\gamma)} \sum_{\langle ij \rangle^\mu} (\sigma_i^\nu \sigma_j^\gamma + \sigma_i^\gamma \sigma_j^\nu), \quad (108)$$

$$V_{\Gamma'} = J_{\Gamma'} \sum_{\mu(\nu\gamma)} \sum_{\langle ij \rangle^\mu} (\sigma_i^\mu \sigma_j^\gamma + \sigma_i^\gamma \sigma_j^\mu + \sigma_i^\nu \sigma_j^\mu + \sigma_i^\mu \sigma_j^\nu). \quad (109)$$

Первое возмущение - Гейзенберговское, второе соответствует перекрестному взаимодействию вдоль ребра α , не содержащему операторы σ^α , а третье - перекрестному взаимодействию, содержащему σ^α .

Вычислим коэффициент f в выражении (105) для различных комбинаций данных взаимодействий. Так как каждое слагаемое содержит произведение на соседних узлах, то в первом порядке ни одно из трех взаимодействий, домноженное на σ_i^α не даст выражение (106), в которое входят три узла.

Во втором порядке возмущение (109) дает возможность получить (106). Например

$$V_{\Gamma'}^2 \sigma_2^z \sim (\sigma_1^x \sigma_2^z) (\sigma_3^y \sigma_2^z) \sigma_2^z \sim \sigma_1^x \sigma_2^z \sigma_3^y. \quad (110)$$

где нумерация узлов указана на (рис. 24). В данном случае $f \sim J_{\Gamma'}^2 / J^2$.

Покажем, что взаимодействие (107) не даст (106) в любом порядке возмущения. Запишем все на фермионном языке. Для получения (106) нужно домножить $\sigma_2^z = ib_2^z c_2$ на комбинацию множителей вида $b_i^\alpha b_j^\alpha c_i c_j$ и получить $c_1 c_3$. При этом можно делать замены $b_i^\alpha b_j^\alpha = \hat{u}_{ij}$ вдоль ребер α , $b_i^\alpha b_i^\alpha = 1$ и $b_j^x b_j^y b_j^z c_j = 1$. Будем следить за числом операторов b^x , b^y и b^z на всех узлах. Изначально $N(b^z) = 1$, $N(b^x) = N(b^y) = 0$. Первые 3 описанных выше действия сохраняют четность $N(b^\alpha)$, а замена $b_j^x b_j^y b_j^z c_j = 1$ меняет четность всех трех чисел. Конечная ситуация при этом соответствует $N(b^x) = N(b^y) = N(b^z) = 0$, то есть должна отдельно измениться четность $N(b^z)$, чего не может произойти в результате допустимых преобразований. Таким образом возмущение (107) отдельно не может создать комбинацию (106) в любом порядке.

Теперь отдельно рассмотрим возмущение (108). Раскрасим ячей-

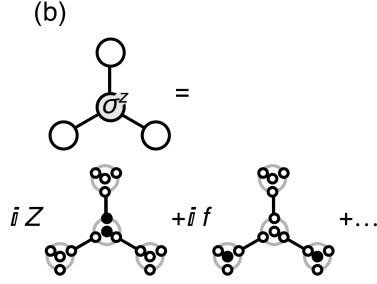


Рис. 23: Представление σ^z -оператора после преобразования

ки решетки в три цвета так, что каждое ребро решетки соединяет два шестиугольника одного цвета (рис. 24). Любое слагаемое из возмущения V_c изменяет состояние двух вихрей в ячейках одного цвета, так как не может содержать операторы σ того же типа, что и ребра. Таким образом любое добавление взаимодействий сохраняет четность числа вихрей каждого цвета. При этом исходный оператор σ^α создает два вихря в соседних узлах, то есть число вихрей двух цветов изначально нечетно и, таким образом, не может быть уменьшено до 0. Соответственно, также как и V_H , возмущение V_c не приводит к появлению искомого слагаемого (106).

Комбинация возмущений (107) и (108) дает ненулевую поправку во втором порядке для каждого из них. (Используя раскраску (рис. 24) можно проверить, что комбинация из трех возмущений не даст искомым вклад.) Например

$$V_H^2 V_c^2 \sigma_2^z \sim (\sigma_2^z \sigma_1^z) (\sigma_2^z \sigma_3^z) (\sigma_2^z \sigma_1^y) (\sigma_2^z \sigma_3^x) \sigma_2^z \sim \sigma_1^x \sigma_2^z \sigma_3^y. \quad (111)$$

соответственно в выражении (105) коэффициент $f \sim J_H^2 J_c^2 / J^4$.

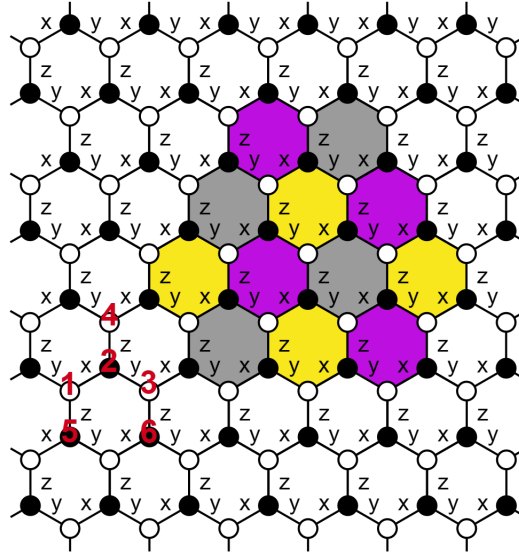


Рис. 24: Нумерация узлов и раскраска ячеек

6.1.3 Взаимодействия через одного

Рассмотрим возможные взаимодействия через одного. Существует три различных направления 1 – 3, 1 – 4, и 3 – 4 (рис. 24). Будем обозначать их по индексу ребра решетки, перпендикулярному им, то есть, соответственно, z , y и x .

В силу симметрии существуют взаимодействия 4-х различных типов, описанных в прошлом разделе. Обозначим их соответственно W_0 , W_H , W_c и $W_{\Gamma'}$ и оценим влияние каждого из них.

W_0 и W_H не будут иметь искомой комбинации в любом порядке, по тем же причинам, что и V_H в прошлом разделе. При этом если к ним добавить V_H , то из этих трех взаимодействий все равно не удастся получить требуемое сочетание.

Комбинация W_0 и V_c даст поправку уже в первом порядке по W_0

и втором по V_c

$$W_0 V_c^2 \sigma_2^z \sim (\sigma_1^z \sigma_3^z) (\sigma_1^y \sigma_2^z) (\sigma_2^z \sigma_3^x) \sigma_2^z \sim \sigma_1^x \sigma_2^z \sigma_3^y. \quad (112)$$

Аналогичное слагаемое возникает и для комбинации W_H и V_c . Невозможность получения связи первого порядка по V_c можно получить, воспользовавшись раскраской и явно проверив единственный доступный вариант.

Возмущение W_c порождает искомую комбинацию уже в первом порядке

$$W_c \sigma_2^z \sim (\sigma_1^x \sigma_3^y) \sigma_2^z. \quad (113)$$

Возмущение $W_{\Gamma'}$ в первом порядке не содержит подходящих слагаемых, но приводит к возникновению (106) во втором

$$W_{\Gamma'}^2 \sigma_2^z \sim (\sigma_1^y \sigma_3^z) (\sigma_1^z \sigma_3^x) \sigma_2^z \sim (\sigma_1^x \sigma_3^y) \sigma_2^z. \quad (114)$$

6.1.4 Влияние на спектр

При включении внешнего магнитного поля h_α в исходной модели к гамильтониану добавляется слагаемое $h_\alpha \sigma_i^\alpha$. После преобразования оно переходит в

$$h_\alpha (iZ c_i b_i^\alpha + \dots) + h_\alpha (f_{ijk}^\alpha i c_j c_k + \dots). \quad (115)$$

При малых полях первое слагаемое дает вклад только в третьем порядке по полю, аналогично ситуации в точной модели Китаева [13]. Второе слагаемое дает ненулевой вклад уже в первом порядке. Его фермионный вид полностью соответствует слагаемым порядка κ в точной модели Китаева, однако в данном случае, коэффициент

перед слагаемым зависит от направления ребра

$$\kappa_\alpha \sim h_\alpha f. \quad (116)$$

Таким образом в эффективном гамильтониане к слагаемым $\kappa \sim h_x h_y h_z / J^2$ добавятся вклады $\kappa_x \sim f h_x$, $\kappa_y \sim f h_y$ и $\kappa_z \sim f h_z$, где коэффициент f зависит от силы добавленных взаимодействий. При повторении вычислений для получения (117) возникнет ненулевая щель уже в первом порядке по полю

$$\Delta = 2\sqrt{3} |\kappa_x + \kappa_y + \kappa_z|. \quad (117)$$

Теперь рассмотрим форму и спектр краевых состояний для разных типов края. Для границы типа zigzag форма основного состояния останется неизменной, так как в первом порядке не зависит от слагаемых порядка κ . Эти поправки изменят величину щели в спектре объемных мод и приведут к добавкам к спектру краевых мод (118), (119). В первом порядке теории возмущений получается, что

$$\varepsilon_1(q_x) = 4(\kappa_x + \kappa_y + \kappa_z) \sin q_x \quad (118)$$

для нулевого краевого поля h_z и

$$\varepsilon_2(q_x) = -\frac{h_z^2}{2J^2} \frac{2\kappa_z \sin q_x + (\kappa_x + \kappa_y) \tan \frac{q_x}{2}}{\cos^2 \frac{q_x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{h_z^2}{4J^2}} \quad (119)$$

для $h_z \neq 0$.

Спектр и распределение краевого состояния для границы типа armchair зависят только от Δ , и, соответственно, описываются теми же формулами, что в исходной модели.

6.2 Влияние вакансий

Вакансии в решетке модели Китаева могут возникать в практических реализациях данной структуры. Поскольку вакансия в бесконечном образце топологически изоморфна граничному состоянию, то на ней образуется краевое состояние с нулевой энергией [29, 32]. В системе конечного размера нулевыми модами на вакансиях взаимодействуют с краевыми состояниями на внешних границах образца. Разность энергий для данных состояний мала, поэтому взаимодействие приводит заметному изменению в динамике краевых мод.

Оценки их влияния на поведение краевых мод были проведены численные исследования точности квантовой операции для разной концентрации случайно расположенных вакансий, аналогичные разделу 5. Наличие даже небольшого числа вакансий приводит к существенному уменьшению точности квантовых операций (рис. 25) и значительно влияет на время передачи информации (рис. 26). При этом беспорядок недостаточно велик для возникновения локализации объемных и краевых состояний (рис. 27).

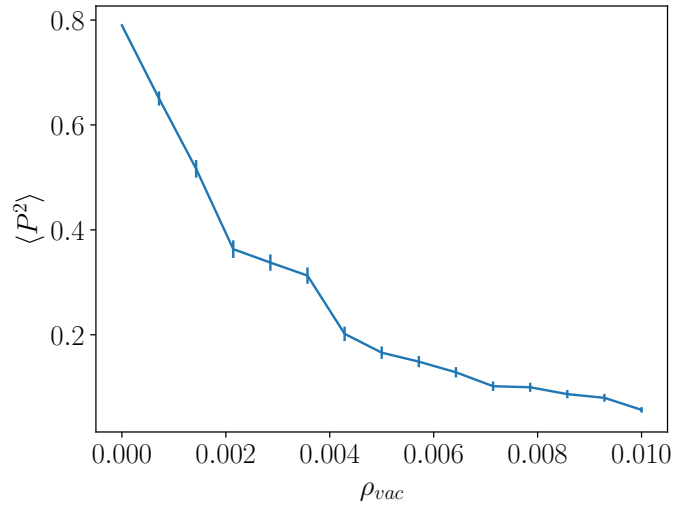


Рис. 25: Зависимость точности квантовой операции от доли вакансий.

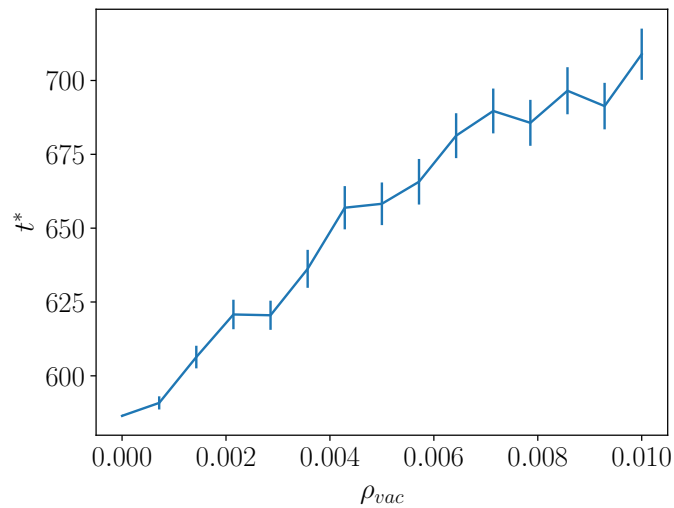


Рис. 26: Зависимость оптимального времени движения пакета от доли вакансий.

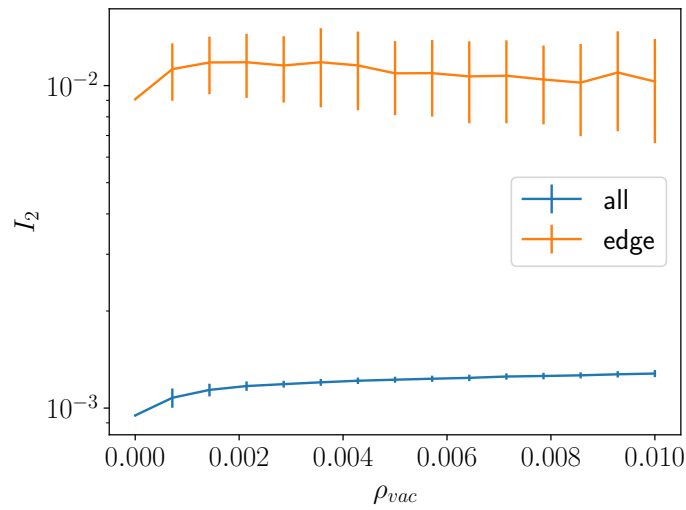


Рис. 27: Зависимость среднего IPR от доли вакансий для всех собственных состояний и для краевых состояний системы из 9600 узлов. Значение каждой точки получено на выборке из 300 случайных реализаций.

Заключение

В данной работе рассмотрен пример использования краевых майорановских мод шестиугольной модели Китаева для передачи и обработки квантовой информации. Приведенный способ реализации двухкубитной операции показывает возможность выполнения квантовых вычислений при помощи краевых состояний в модели Китаева и может быть использован для экспериментального исследования краевых состояний.

В идеальной системе точность подобной квантовой операции, даже с учетом процессов записи и чтения, нелинейности спектра и наличия углов стремится к 1. Рассмотренные виды беспорядка и шума приводят к уменьшению точности, однако в современных сверхпроводниковых реализациях данное снижение не будет являться непреодолимым препятствием для проведения квантовых вычислений. Наи-

большее влияние на проведение квантовых операций оказывают вакансии, поэтому в возможных экспериментальных реализациях необходимо стремиться к минимизации их количества. При этом, несмотря на топологическую защищенность краевых состояний, не удастся добиться экспоненциальной устойчивости к шуму в силу локальности операций чтения и записи на край.

Список литературы

- [1] A. Kitaev, *Ann. Phys.* **303**, 2 (2003).
- [2] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1083 (2008).
- [3] X.-L. Qi, T. L. Hughes, and S.-C. Zhang, *Phys. Rev. B* **82**, 184516 (2010).
- [4] S. B. Chung, X.-L. Qi, J. Maciejko, and S.-C. Zhang, *Phys. Rev. B* **83**, 100512 (2011).
- [5] J. Wang, Q. Zhou, B. Lian, and S.-C. Zhang, *Phys. Rev. B* **92**, 064520 (2015).
- [6] C.-Z. Chen, J. J. He, D.-H. Xu, and K. T. Law, *Phys. Rev. B* **96**, 041118 (2017).
- [7] J. He, T. Liang, Y. Tanaka, and N. Nagaosa, *Commun. Phys.* **2**, 149 (2019).
- [8] B. Lian, X.-Q. Sun, A. Vaezi, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, *PNAS* **115**, 10938 (2018).
- [9] D. Aasen, R. S. K. Mong, B. M. Hunt, D. Mandrus, and J. Alicea, *Phys. Rev. X* **10**, 031014 (2020).
- [10] K. Klocke, D. Aasen, R. S. K. Mong, E. A. Demler, and J. Alicea, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 177204 (2021).
- [11] J. Feldmeier, W. Natori, M. Knap, and J. Knolle, *Phys. Rev. B* **102**, 134423 (2020).

- [12] Y. Lu, P. Virtanen, and T. T. Heikkilä, Phys. Rev. B **106**, 045139 (2022).
- [13] A. Kitaev, Ann. Phys. **321**, 2 (2006).
- [14] S. Trebst and C. Hickey, Phys. Rep. **950**, 1 (2022).
- [15] J. Q. You, X.-F. Shi, X. Hu, and F. Nori, Phys. Rev. B **81**, 014505 (2010).
- [16] M. Sameti and M. J. Hartmann, Phys. Rev. A **99**, 012333 (2019).
- [17] I. Timoshuk and Y. Makhlin, Quantum computations with topological edge states (2023), arXiv:2302.10101 .
- [18] M. Thakurathi, K. Sengupta, and D. Sen, Phys. Rev. B **89**, 235434 (2014).
- [19] D. Aasen, R. S. K. Mong, B. M. Hunt, D. Mandrus, and J. Alicea, Phys. Rev. X **10**, 031014 (2020).
- [20] K. Klocke, D. Aasen, R. S. K. Mong, E. A. Demler, and J. Alicea, Phys. Rev. Lett. **126**, 177204 (2021).
- [21] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin, and H. Weinfurter, Phys. Rev. A **52**, 3457 (1995).
- [22] D. Deutsch, A. Barenco, and A. Ekert, Proc. R. Soc. Lond. A **449**, 669 (1995).
- [23] D. P. DiVincenzo, Phys. Rev. A **51**, 1015 (1995).
- [24] A. Uhlmann, Rep. Math. Phys. **9**, 273 (1976).
- [25] R. Jozsa, J. Mod. Opt. **41**, 2315 (1994).

- [26] Y.-C. Liang, Y.-H. Yeh, P. E. M. F. Mendonça, R. Y. Teh, M. D. Reid, and P. D. Drummond, *Rep. Progr. Phys.* **82**, 076001 (2019).
- [27] Z. Ma, F.-L. Zhang, and J.-L. Chen, *Phys. Rev. A* **78**, 064305 (2008).
- [28] L. H. Pedersen, N. M. Møller, and K. Mølmer, *Phys. Lett. A* **367**, 47 (2007).
- [29] W.-H. Kao and N. B. Perkins, *Ann. Phys.* **435**, 168506 (2021), special issue on Philip W. Anderson.
- [30] J. Nasu and Y. Motome, *Phys. Rev. B* **102**, 054437 (2020).
- [31] X.-Y. Song, Y.-Z. You, and L. Balents, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 037209 (2016).
- [32] W.-H. Kao, J. Knolle, G. B. Halász, R. Moessner, and N. B. Perkins, *Phys. Rev. X* **11**, 011034 (2021).