

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”»

Факультет физики

Турьшев Константин Евгеньевич

**Ток через джозефсоновский контакт между  
майорановскими краевыми модами**

Выпускная квалификационная работа  
по направлению подготовки 03.03.02 Физика  
Образовательная программа «Физика»

Научный руководитель  
д.ф.-м.н.  
Ю. Г. Махлин

Москва, 2023

Исследуется джозефсоновский контакт между двумя сверхпроводящими плёнками, лежащими на поверхности объёмного топологического изолятора. Между сверхпроводящими берегами лежит плёнка из изолирующего магнетика. На границах сверхпроводящих берегов и магнитной плёнки локализованы одномерные киральные майорановские нулевые моды. Ток через контакт переносится киральными дираковскими модами, локализованными на двух доменных стенках магнитной плёнки. В настоящей работе изучается влияние гибридизации дираковских мод на соотношение ток-фаза данного контакта.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Майорановские нулевые моды в структурах TI-S-M</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Гибридизация дираковских мод в магнитной прослойке</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Рассеяние в магнитной прослойке</b>	<b>12</b>
5.1	Квазиклассическое приближение . . . . .	12
5.2	Теория возмущений . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Вычисление тока</b>	<b>17</b>
6.1	Выражение тока через майорановские операторы . . . . .	18
6.2	Связь между майорановскими модами . . . . .	19
6.3	Случай отсутствия петель с отражением . . . . .	23
6.4	Случай слабого отражения . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Заключение</b>	<b>27</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>28</b>
<b>8</b>	<b>Приложение 1. Приведение к сумме по мацубаровским частотам</b>	<b>29</b>
<b>9</b>	<b>Приложение 2. Амплитуды при различных параметрах перекрёстков</b>	<b>31</b>

# 1 Введение

В физике конденсированного состояния активно ведётся изучение майорановских нулевых мод [1]. Благодаря своей неабелевой статистике такие состояния потенциально имеют применения в области топологических квантовых вычислений [2]. Наличие майорановских нулевых мод делает основное состояние вырожденным, и его можно использовать как кубит. Пространственно-разделённые нулевые майорановские моды невосприимчивы к шуму, что защищает информацию в таком кубите. Операции, необходимые для проведения вычислений, выполняются с помощью обведения (braiding) одного майорановского возбуждения вокруг другого, что нетривиальным образом преобразует основное состояние. Несмотря на то, что обведение майорановских нулевых мод вокруг друг друга не позволяет реализовать полный набор операций, необходимых для квантовых вычислений, ожидается, что оставшиеся операции имеют более высокий порог чувствительности к ошибкам [1].

Любой дираковский фермион можно формально рассматривать как пару майорановских фермионов, один из которых отвечает за его вещественную часть, а другой – за мнимую. До тех пор, пока имеется вырождение, переводящее майорановские фермионы друг в друга, они вместе ведут себя как дираковский фермион. Это означает, что для реализации майорановских нулевых мод на основе электронов необходимо нарушить сохранение заряда и спиновое вырождение. Сохранение заряда нарушается включением в систему сверхпроводника, поглощающего его избыток.

Простейшей моделью, в которой можно наблюдать возникновение майорановских нулевых мод, является квантовая проволока с бесспиновыми электронами на поверхности сверхпроводника, способная переходить в топологическую фазу с парой нульмерных майорановских нулевых мод локализованных на её концах. [3]

Хотя обведение нульмерных майорановских нулевых мод вокруг друг друга оказывается возможным [4], оно представляет технические сложности. Были предложены различные способы реализации одномерных нулевых майорановских мод [1]. Так как майорановские возбуждения являются собственными античастицами, они должны обладать соответствующей структурой по спину, что наиболее прямым образом реали-

зуется с помощью сверхпроводников р-типа. Тем не менее, была предложена реализация майорановских нулевых мод на основе гибридных структур из сверхпроводника s-типа, топологического изолятора и изолирующего магнетика [5].

Майорановские состояния являются зарядово-нейтральными суперпозициями электрона и дырки, что усложняет их наблюдение. Одним из способов обнаружения одномерных майорановских мод является интерферометрия, основывающаяся на том, что при расщеплении дираковских мод на майорановские и объединении майорановских мод в дираковские может происходить туннелирование заряда в сверхпроводник [1], [6], [7].

Была предложена конструкция обладающего необычным соотношением ток-фаза джозефсоновского контакта между майорановскими краевыми модами, ток через который переносится киральными дираковскими модами. Туннелирование заряда в сверхпроводящие контакты происходит в процессе упомянутых выше расщепления дираковских мод и слияния майорановских. [8]

В данной работе изучается влияние на соотношение ток-фаза конечной ширины такого контакта и возникающей из-за этого гибридизации дираковских киральных мод, переносящих через него заряд. Ожидается, что в дальнейшем рассмотрение такой гибридной структуры с учетом гибридизации мод позволит изучить влияние сверхпроводящего тока, сверхпроводящей фазы и магнетиков друг на друга. Учёт гибридизации позволяет, например, рассматривать задачу о движении доменных стенок под действием проходящего тока в случае, когда магнетик тоже рассматривается как динамическая система.

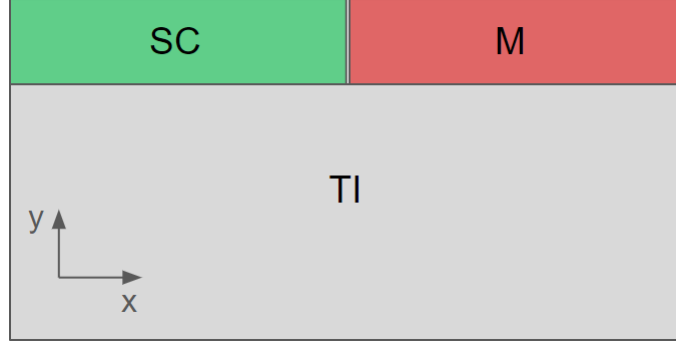


Рис. 1: Гибридная структура, в которой реализуется майорановская нулевая мода. Направлением распространения является ось  $z$ , направленная на читателя.

## 2 Майорановские нулевые моды в структурах TI-S-M

Начнём рассмотрение элементов системы, которую мы изучаем. Топологический изолятор является материалом, имеющим щель в спектре возбуждений в объёме, но бесщелевой спектр поверхностных возбуждений. Гамильтониан поверхностных возбуждений топологического изолятора имеет вид

$$\hat{H}_{TI} = -iv\hat{\sigma}_z\partial_z - iv\hat{\sigma}_x\partial_x, \quad (1)$$

где  $v$  - скорость возбуждений, а  $\sigma$  - спиновые матрицы Паули.

Близость со сверхпроводящей или магнитной плёнкой открывает щель в спектре поверхностных возбуждений топологического изолятора. Гамильтониан поверхностных возбуждений в нотации Намбу принимает вид

$$\hat{H}_{BdG} = v\hat{\tau}_z[-i\hat{\sigma}_z\partial_z - i\hat{\sigma}_x\partial_x] - \hat{\sigma}_y M(x, z) + \Delta(x, z)\hat{\tau}_- + \Delta^*(x, z)\hat{\tau}_+, \quad (2)$$

где  $\tau$  - матрицы Паули, действующие в пространстве Боголюбова-Намбу и перемешивающие частичные и дырочные возбуждения,  $\Delta$  - сверхпроводящее спаривание, наведённое эффектом близости со сверхпроводя-

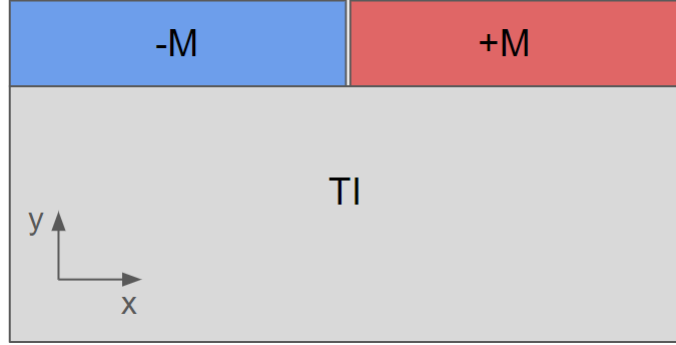


Рис. 2: Структура, содержащая киральную дираковскую моду. Направлением распространения так же является ось  $z$ .

щей плёнкой, а  $M$  - взаимодействие с магнитной плёнкой. В следующих главах мы будем использовать систему единиц с  $v = 1$ .

Рассмотрим гибридную структуру из контактирующих сверхпроводящей и магнитной плёнок на поверхности трёхмерного топологического изолятора (рис. 1). Из решения уравнения Боголюбова - де Жена с гамильтонианом (2) следует, что на границе плёнок локализована киральная майорановская нулевая мода [5]

$$\chi = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ ie^{i\Phi_{sc}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-\theta(x)\frac{M}{v}x + \theta(-x)\frac{|\Delta|}{v}x + ipz} \quad (3)$$

имеющая низкоэнергетический спектр

$$\varepsilon = vp. \quad (4)$$

Для создания интерференционного устройства также необходима структура, поддерживающая нулевые дираковские моды. На рис. 2 изображена структура из топологического изолятора и магнетика с доменной стенкой, содержащая киральную дираковскую моду [8], также имеющую спектр (4):

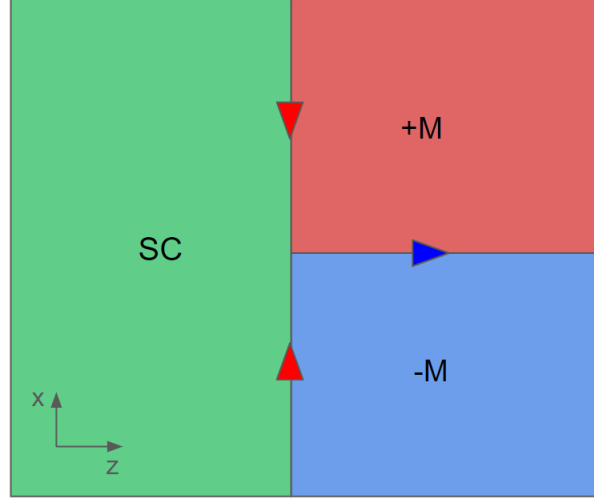


Рис. 3: Перекрёсток со слиянием майорановских мод в дираковскую. Майорановские моды отмечены красными стрелками, дираковская - синей.

$$\psi = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-\frac{M}{v}|x|+ipz} \quad (5)$$

Теперь рассмотрим перекрёстки, на которых происходит слияние приведённых выше майорановских мод в дираковские (рис. 3). В приближении рассеяния, не зависящего от энергии [7], самый общий вид матрицы рассеяния такого перекрёстка выглядит как

$$\begin{pmatrix} \psi_\varepsilon \\ \psi_{-\varepsilon}^\dagger \end{pmatrix} = S_{fuse} \begin{pmatrix} \eta_\varepsilon \\ \chi_\varepsilon \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$S_{fuse} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad (7)$$

где параметр  $\alpha$  зависит от геометрии перекрёстка.

Аналогично, самым общим видом матрицы рассеяния для перекрёстка, на котором происходит расщепление дираковской моды на две майорановские, является [7]



$$\begin{pmatrix} \eta_\varepsilon \\ \chi_\varepsilon \end{pmatrix} = S_{split} \begin{pmatrix} \psi_\varepsilon \\ \psi_{-\varepsilon}^\dagger \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$S_{split} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha'} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha'} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

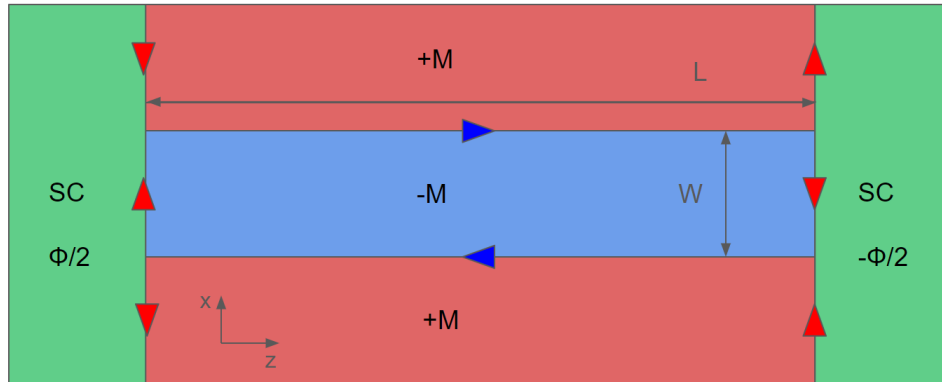


Рис. 4: Рассматриваемый джозефсоновский контакт. Вид сверху, магнетик с двумя доменными стенками и два сверхпроводника лежат на поверхности топологического изолятора. Красным отмечены киральные майорановские моды, синим - киральные дираковские.

### 3 Постановка задачи

В работе [8] был рассмотрен джозефсоновский контакт, имеющий строение интерферометра, изображённый на рис. 4. По границам сверхпроводящих берегов в поверхностном слое топологического изолятора движутся киральные майорановские моды, а по доменным стенкам - киральные дираковские. Ток через такой контакт определяется слиянием майорановских мод и расщеплением дираковских на четырёх перекрёстках, в процессе которых происходит туннелирование заряда в сверхпроводник. Следуя работе [8], мы рассматриваем случай совпадающих параметров  $\alpha = \alpha'$  на всех перекрёстках.

Мы рассматриваем данный контакт в случае, когда около сверхпроводящих берегов контакта дираковские моды всё ещё не гибридизуются, но могут гибридизоваться вдали от них, например из-за уменьшения расстояния между доменными стенками. Такая постановка позволяет разделить задачу на две части - нахождение возникающего из-за гибридизации рассеяния в магнитной прослойке и нахождение соотношения ток-фаза при известной матрице рассеяния (рис. 5). При рассмотрении тока мы будем работать в терминах майорановских операторов, а дираковские моды рассматривать как их пары.

## 4 Гибридизация дираковских мод в магнитной прослойке

Рассмотрим магнитную прослойку контакта, представляющую собой магнитную плёнку с двумя доменными стенками на поверхности топологического изолятора. Гамильтониан такой системы выглядит как

$$\hat{H} = -i\hat{\sigma}_z\partial_z - i\hat{\sigma}_x\partial_x - M(x)\hat{\sigma}_y. \quad (10)$$

где  $M$  имеет ступенчатый вид с шириной центрального домена  $W$ :

$$M(x) = \text{sgn}(|x| - W/2) \cdot M \quad (11)$$

Выделим поперечную часть гамильтониана и найдём её собственные значения. Нас интересуют подщелевые собственные состояния с  $|\varepsilon_x| < M$ :

$$\hat{H}_x = -i\hat{\sigma}_x\partial_x - M(x)\hat{\sigma}_y \quad (12)$$

В области с фиксированным  $M$  собственные вектора такого оператора выглядят как

$$[-i\hat{\sigma}_x\partial_x - M\hat{\sigma}_y] \begin{pmatrix} i[M + \kappa] \\ \varepsilon_x \end{pmatrix} e^{-\kappa x} = \varepsilon_x \begin{pmatrix} i[M + \kappa] \\ \varepsilon_x \end{pmatrix} e^{-\kappa x}, \quad (13)$$

где  $\varepsilon_x^2 = M^2 - \kappa^2$ .

Производя шивку на доменных стенках и требуя затухание вдаль от них, находим собственные значения

$$\varepsilon_x = \pm M e^{-\kappa W} \quad (14)$$

где коэффициент затухания  $\kappa$  определяется из уравнения

$$\kappa = M [1 - e^{-2\kappa W}]^{1/2}. \quad (15)$$

Собственное значение поперечной части гамильтониана  $\varepsilon_x$  в дальнейшем оказывается основным интересующим нас параметром гибридизации. В полную же энергию для однородного по  $z$  случая  $\varepsilon_x$  входит как масса:

$$\varepsilon = \pm \sqrt{p^2 + \varepsilon_x^2}. \quad (16)$$

С точностью до нормировки собственные состояния  $\hat{H}_x$  принимают вид

$$\begin{aligned}
\xi_{\pm} = & \theta(-W/2 - x) \cdot e^{\kappa W/2} \left( \frac{M - \kappa}{\mp i |\varepsilon_x|} \right) e^{\kappa x} + \\
& + \theta(x - W/2) \cdot \left[ \frac{M}{\kappa} e^{-\kappa W} + \left( 1 - \frac{M}{\kappa} \right) e^{\kappa W} \right] e^{\kappa W/2} \left( \frac{M + \kappa}{\mp i |\varepsilon_x|} \right) e^{-\kappa x} + \\
& + \theta(W/2 - |x|) \left[ \frac{M}{\kappa} e^{-\kappa W/2} \left( \frac{-M + \kappa}{\mp i |\varepsilon_x|} \right) e^{-\kappa x} + \left[ 1 - \frac{M}{\kappa} \right] e^{\kappa W/2} \left( \frac{-M - \kappa}{\mp i |\varepsilon_x|} \right) e^{\kappa x} \right]
\end{aligned} \tag{17}$$

В пределе хорошо изолированных мод  $MW \gg 1$ :

$$\kappa \approx M \left[ 1 - \frac{1}{2} e^{-2MW} \right] \tag{18}$$

$$\varepsilon_x \approx \pm M e^{-MW} \tag{19}$$

В пределе слабо изолированных мод  $MW \ll 1$ :

$$\kappa \approx 2M^2 W \tag{20}$$

$$\varepsilon_x \approx \pm M [1 - 2M^2 W^2] \tag{21}$$

Таким образом, гибридизация приводит к расщеплению рассматриваемых нулевых мод, эквивалентному возникновению эффективной массы. Как и ожидалось, в пределе хорошо изолированных мод гибридизация экспоненциально мала по  $MW$ . При малых расстояниях между доменными стенками спектр (16) стремится к спектру надщелевых возбуждений.

## 5 Рассеяние в магнитной прослойке

### 5.1 Квазиклассическое приближение

Начнём рассмотрение задачи рассеяния со случая плавно меняющейся в пространстве степени гибридизации. Стационарное уравнение Шрёдингера можно записать в виде

$$-i\partial_z\psi = \hat{\sigma}_z \left[ \varepsilon - \hat{H}_x(z) \right] \psi. \quad (22)$$

Обратим внимание, что оператор  $\hat{H}_x$  обладает следующими симметриями:

$$\left\{ \hat{\sigma}_z, \hat{H}_x \right\} = 0 \qquad \left\{ K, \hat{H}_x \right\} = 0 \quad (23)$$

где оператор комплексного сопряжения  $K$  введён так, что

$$[K, \hat{\sigma}_z] = 0 \qquad [K, \hat{\sigma}_x] = 0 \qquad \{K, \hat{\sigma}_y\} = 0 \quad (24)$$

При достаточно плавном пространственном изменении  $\hat{H}_x$  переходами в надщелевые поперечные состояния можно пренебречь. Перейдём к базису зависящих от  $z$  собственных состояний  $\hat{H}_x$ :

$$\hat{H}_x(z) |\xi_{\pm}(z)\rangle = \pm \varepsilon_x(z) |\xi_{\pm}(z)\rangle \qquad \hat{\sigma}_z |\xi_{\pm}(z)\rangle = |\xi_{\mp}(z)\rangle \quad (25)$$

$$\psi(z) = a_+(z) |\xi_+(z)\rangle + a_-(z) |\xi_-(z)\rangle \quad (26)$$

$$-i\partial_z \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon + \varepsilon_x \\ \varepsilon - \varepsilon_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \langle \xi_+ | \partial_z | \xi_+ \rangle & \langle \xi_+ | \partial_z | \xi_- \rangle \\ \langle \xi_- | \partial_z | \xi_+ \rangle & \langle \xi_- | \partial_z | \xi_- \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} \quad (27)$$

Благодаря симметриям (23) слагаемое, отвечающее за связность преобразования, исчезает. Общие условия на матрицу второго слагаемого выглядят как

$$Re \langle \xi_{\pm} | \partial_z | \xi_{\pm} \rangle = \frac{1}{2} \left[ \langle \xi_{\pm} | \partial_z | \xi_{\pm} \rangle + \langle \xi_{\pm} | \partial_z | \xi_{\pm} \rangle^* \right] = \frac{1}{2} \partial_z \langle \xi_{\pm} | \xi_{\pm} \rangle = 0 \quad (28)$$

$$\langle \xi_{\pm} | \partial_z | \xi_{\mp} \rangle + \langle \xi_{\mp} | \partial_z | \xi_{\pm} \rangle^* = \partial_z \langle \xi_{\pm} | \xi_{\mp} \rangle = 0 \quad (29)$$

В данном случае удобно использовать другой оператор комплексного сопряжения, выражающийся через уже введённый (23) как  $\hat{\sigma}_z K$ . Так как  $[\hat{\sigma}_z K, \hat{H}_x] = 0$ , оператор  $\hat{H}_x$  при таком выборе комплексного сопряжения является вещественным, и его собственные состояния можно также выбрать вещественными:

$$\hat{\sigma}_z K | \xi_{\pm} \rangle = | \xi_{\pm} \rangle, \quad (30)$$

что не противоречит (25), так как оператор  $\hat{\sigma}_z$  тоже вещественен в данном случае:  $[\hat{\sigma}_z K, \hat{\sigma}_z] = 0$ .

Вместе с ограничениями (28) и симметрией  $\hat{\sigma}_z | \xi_{\pm} \rangle = | \xi_{\mp} \rangle$ , вещественность собственных состояний приводит к исчезновению данной матрицы:

$$Im \langle \xi_{\pm} | \partial_z | \xi_{\pm} \rangle = -Im \langle \xi_{\pm} | K^\dagger \hat{\sigma}_z^2 K \partial_z | \xi_{\pm} \rangle = -Im \langle \xi_{\pm} | \partial_z | \xi_{\pm} \rangle = 0 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi_{\pm} | \partial_z | \xi_{\mp} \rangle &= - \langle \xi_{\mp} | K^\dagger \hat{\sigma}_z^2 K \partial_z | \xi_{\pm} \rangle = \\ &= - \langle \xi_{\mp} | \partial_z | \xi_{\pm} \rangle = - \langle \xi_{\pm} | \hat{\sigma}_z \partial_z | \xi_{\pm} \rangle = - \langle \xi_{\pm} | \partial_z | \xi_{\mp} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Описанные выше свойства можно напрямую проверить на явном выражении для  $\xi_{\pm}$ , приведённом выше (17) в согласованном с данными рассуждениями виде.

Таким образом второе слагаемое в (27) исчезает, и мы приходим к уравнению

$$-i \partial_z \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon + \varepsilon_x \\ \varepsilon - \varepsilon_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Диагонализуем матрицу в правой части уравнения. Так как такое преобразование неоднородно по  $z$ , снова возникнет дополнительное слагаемое, отвечающее за связность, но плавность изменения потенциала позволит пренебречь недиагональными элементами возникающей матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_x}{\varepsilon + \varepsilon_x}} & -\sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_x}{\varepsilon + \varepsilon_x}} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$iU^{-1}\partial_z U = \frac{i}{2} \ln' \left( \begin{bmatrix} \varepsilon - \varepsilon_x \\ \varepsilon + \varepsilon_x \end{bmatrix}^{1/2} \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\partial_z \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \ln' \left( \begin{bmatrix} \varepsilon - \varepsilon_x \\ \varepsilon + \varepsilon_x \end{bmatrix}^{1/2} \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \quad (37)$$

Квазиклассические решения, соответствующие в области без гибридизации состояниям с определённым направлением распространения, выглядят как

$$\psi_{\pm} = \frac{e^{\pm i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon + \varepsilon_x \\ \varepsilon - \varepsilon_x \end{bmatrix}^{1/4} \xi_+ \pm \begin{bmatrix} \varepsilon - \varepsilon_x \\ \varepsilon + \varepsilon_x \end{bmatrix}^{1/4} \xi_- \right\} e^{\pm i \operatorname{sgn}(\varepsilon) \int dz \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_x^2}} \quad (38)$$

Обход (комплексной) точки остановки  $\varepsilon - \varepsilon_x = 0$  преобразует решения как

$$\psi_+ \rightarrow \psi_- \quad \psi_- \rightarrow -\psi_+, \quad (39)$$

Тогда отражение от линейной точки остановки и надбарьерное отражение не имеют дополнительной фазы отражения, а амплитуды туннелирования и надбарьерного отражения выражаются как

$$t_{\text{tunnel}} = \exp \left( i \operatorname{sgn}(\varepsilon) \int_{-L/2}^{+L/2} dz \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_x^2(z)} \right), \quad (40)$$

$$r_{\text{overbarrier}} = \exp \left( 2i \operatorname{sgn}(\varepsilon) \int_{-L/2}^{z_0} dz \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_x^2(z)} \right), \quad (41)$$

где  $z_0$  в формуле для надбарьерного отражения это ближайшая к действительной оси комплексная точка остановки.

## 5.2 Теория возмущений

Уравнение (33) верно не только для случая плавно меняющейся степени гибридизации, но и для любого другого, в котором можно пренебречь переходами в надщелевые поперечные состояния. Это позволяет использовать его для нахождения амплитуды отражения в первом порядке теории возмущений по  $\varepsilon_x$ . Перейдя к базису, соответствующему в области без рассеяния отдельным киральным модам, получаем уравнение

$$-i\hat{\sigma}_z\partial_z\psi = \varepsilon\psi - \varepsilon_x(z)\hat{\sigma}_y\psi, \quad (42)$$

являющееся проекцией уравнения Шрёдингера на подпространство подщелевых мод.

Найдём запаздывающую функцию Грина данного уравнения. Она задаётся как решение уравнения

$$[\varepsilon + i\hat{\sigma}_z\partial_z]\hat{G}_\varepsilon = \delta(z). \quad (43)$$

Кроме того, необходимо зафиксировать её вид, отвечающий именно запаздывающей функции Грина:

$$\hat{G}_\varepsilon(z > 0) = \begin{pmatrix} \# & \# \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$\hat{G}_\varepsilon(z < 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \# & \# \end{pmatrix} \quad (45)$$

Интегрируя (43) около  $z = 0$ , получаем условие

$$\hat{G}_\varepsilon(+0) - \hat{G}_\varepsilon(-0) = -i\hat{\sigma}_z \quad (46)$$

откуда находим

$$\hat{G}_\varepsilon(z) = -ie^{i\hat{\sigma}_z\varepsilon z} \begin{pmatrix} \theta(z) & 0 \\ 0 & \theta(-z) \end{pmatrix} \quad (47)$$

Пользуясь найденной функцией Грина и рассматривая  $\varepsilon_x\hat{\sigma}_x$  в (42) как возмущение, получаем амплитуды отражения в первом приближении:

$$r_l(\varepsilon) = e^{i\varepsilon L} \int_{-L/2}^{+L/2} dz' \varepsilon_x(z') e^{2i\varepsilon z'} \quad (48)$$



$$r_r(\varepsilon) = -e^{i\varepsilon L} \int_{-L/2}^{+L/2} dz' \varepsilon_x(z') e^{-2i\varepsilon z'} \quad (49)$$

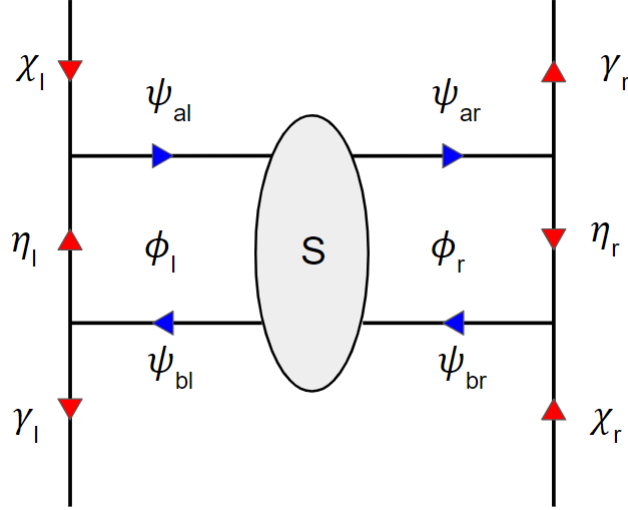


Рис. 5: Обозначения для всех участвующих мод. За начало отсчёта для  $\chi_l, \eta_l, \gamma_l$  выбран левый верхний перекрёсток, а для  $\chi_r, \eta_r, \gamma_r$  - нижний правый. Также отмечены фазы Ааронова-Бома  $\phi_{l,r}$  магнитных потоков, протекающих через контакт по разные стороны от области рассеяния.

## 6 Вычисление тока

В данной главе мы будем работать в терминах майорановских операторов  $\chi_l, \eta_l, \gamma_l$  на левом берегу контакта и  $\chi_r, \eta_r, \gamma_r$  на правом (см. рис. 5). Для входящих мод  $\chi_{l,r}$  предполагается равновесное распределение

$$\langle \chi_l(\varepsilon) \chi_l^\dagger(\varepsilon) \rangle = n_F(\varepsilon), \quad \langle \chi_r(\varepsilon) \chi_r^\dagger(\varepsilon) \rangle = n_F(\varepsilon). \quad (50)$$

Для удобства мы будем формально отсчитывать все майорановские моды на одном берегу от одной точки. Для левого берега выберем за начало отсчета левый верхний перекрёсток, для правого - правый нижний.

Рассеяние в этой главе будем считать известным и описывать его уравнением

$$\begin{pmatrix} \psi_{ar} \\ \psi_{br} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_a & r_r \\ r_l & t_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{al} \\ \psi_{bl} \end{pmatrix}, \quad (51)$$

где  $\psi_{al,bl}$  - дираковские моды на левом берегу контакта, а  $\psi_{ar,br}$  - на правом.

Мы будем считать, что магнитный поток не течёт через область рассеяния. Полная фаза Ааронова-Бома  $\phi_{AB}$  при этом распадается на сумму фаз  $\phi_l$  на левой и  $\phi_r$  на правой частях контура. Фазы Ааронова-Бома связаны с создающими их потоками [8] как  $\phi_{AB} = \pi f / \Phi_0$ , где  $f$  - магнитный поток, протекающий через соответствующую часть контура, а  $\Phi_0$  - квант магнитного потока.

## 6.1 Выражение тока через майорановские операторы

Перейдём к изучению влияния рассеяния в магнитной прослойке на соотношение ток-фаза данного контакта. Ток через контакт будем вычислять как разность токов через верхний и нижний каналы в области без рассеяния. Запишем ток около левого контакта и выразим его через операторы майорановских мод на левой границе:

$$j = \langle \psi_{al}^\dagger \psi_{al} \rangle - \langle \psi_{bl}^\dagger \psi_{bl} \rangle \quad (52)$$

$$\psi_{al}(\varepsilon) = e^{i(\alpha - \frac{\Phi}{4})} \frac{\eta_l(\varepsilon) + i\chi_l(\varepsilon)}{\sqrt{2}} \quad \psi_{ar}(\varepsilon) = e^{-i(\alpha - \frac{\Phi}{4})} e^{-i\varepsilon W} \frac{\eta_r(\varepsilon) - i\gamma_r(\varepsilon)}{\sqrt{2}} \quad (53)$$

$$\psi_{bl}(\varepsilon) = e^{-i(\alpha + \frac{\Phi}{4})} e^{-i\varepsilon W} \frac{\eta_l(\varepsilon) - i\gamma_l(\varepsilon)}{\sqrt{2}} \quad \psi_{br}(\varepsilon) = e^{i(\alpha + \frac{\Phi}{4})} \frac{\eta_r(\varepsilon) + i\chi_r(\varepsilon)}{\sqrt{2}} \quad (54)$$

$$j_\varepsilon = \frac{1}{2} (\chi_l^\dagger \chi_l - \gamma_l^\dagger \gamma_l) + \frac{i}{2} (\eta_l^\dagger \chi_l - \chi_l^\dagger \eta_l) + \frac{i}{2} (\eta_l^\dagger \gamma_l - \gamma_l^\dagger \eta_l) \quad (55)$$

Фазы сверхпроводящих берегов  $\pm \Phi/2$  в выражениях (53) восстановлены с помощью калибровочного преобразования.

Так как майорановские состояния являются суперпозицией электрона и дырки и имеют вырождение  $\eta(-\varepsilon) = \eta^\dagger(\varepsilon)$ , имеет смысл рассматривать именно сумму  $j_\varepsilon + j_{-\varepsilon}$ , ведь  $j_\varepsilon$  и  $j_{-\varepsilon}$  отвечают одним и тем же входящим возбуждениям:

$$j_{-\varepsilon} = \frac{1}{2} (\chi_l \chi_l^\dagger - \gamma_l \gamma_l^\dagger) + \frac{i}{2} (\eta_l \chi_l^\dagger - \chi_l \eta_l^\dagger) + \frac{i}{2} (\eta_l \gamma_l^\dagger - \gamma_l \eta_l^\dagger) \quad (56)$$

$$j_\varepsilon + j_{-\varepsilon} = \text{Im} \left\langle [\chi_l, \eta_l^\dagger] \right\rangle + \text{Im} \left\langle [\gamma_l, \eta_l^\dagger] \right\rangle \quad (57)$$

Получающиеся слагаемые отвечают за туннелирование заряда при слиянии майорановских возбуждений на верхнем левом перекрёстке и расщеплении дираковского на нижнем левом перекрёстке. Пользуясь тем, что левые и правые входящие моды  $\chi_{l,r}$  не скоррелированы, можно разделить ток на вклады от левых и правых входящих возбуждений. При учёте только правых входящих майорановских возбуждений ток у левого контакта течёт лишь через нижний перекрёсток, ведь на верхнем никакого заряженного возбуждения не образуется. Тогда спектральная плотность тока принимает вид

$$j_\varepsilon + j_{-\varepsilon} = \text{Im} \left\langle [\gamma_l^{(r)}, \eta_l^{(r)\dagger}] \right\rangle - \text{Im} \left\langle [\gamma_r^{(l)}, \eta_r^{(l)\dagger}] \right\rangle, \quad (58)$$

где верхние индексы  $(l), (r)$  означают, что нужно учитывать лишь вклад от соответствующей входящей моды.

Полное выражение для тока имеет вид

$$j = \int_0^\infty d\varepsilon \left( J_\varepsilon^{(r)} \left\langle [\chi_r(\varepsilon), \chi_r^\dagger(\varepsilon)] \right\rangle - J_\varepsilon^{(l)} \left\langle [\chi_l(\varepsilon), \chi_l^\dagger(\varepsilon)] \right\rangle \right) \quad (59)$$

Подставляя средние коммутаторов  $\chi_{l,r}$  и пользуясь тем, что  $J_\varepsilon^{(l,r)}$  получаются нечётными по  $\varepsilon$ , приводим ток к удобному виду:

$$\left\langle [\chi_l(\varepsilon), \chi_l^\dagger(\varepsilon)] \right\rangle = \left\langle [\chi_r(\varepsilon), \chi_r^\dagger(\varepsilon)] \right\rangle = n_F(\varepsilon) - n_F(-\varepsilon) \quad (60)$$

$$j = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \cdot n_F(\varepsilon) \left( J_\varepsilon^{(r)} - J_\varepsilon^{(l)} \right) \quad (61)$$

## 6.2 Связь между майорановскими модами

Перейдём к нахождению операторов  $\eta_{l,r}, \gamma_{l,r}$ . Для этого будем считать  $\chi_{l,r}$  и  $\eta_{l,r}$  известными, и перейдя по замкнутым петлям получим уравнения самосогласования:

$$\eta_l = A_l \chi_l + B_l \chi_r + C_l \eta_r + D_l \eta_l \quad (62)$$

$$\eta_r = A_r \chi_r + B_r \chi_l + C_r \eta_l + D_r \eta_r \quad (63)$$

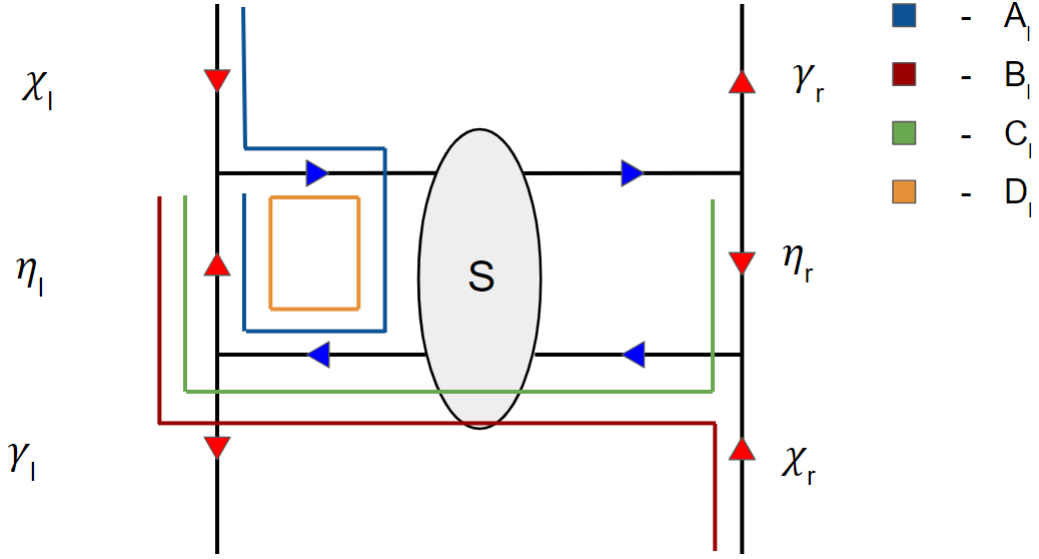


Рис. 6: Переходы между майорановскими модами, которым соответствуют амплитуды  $A_l, B_l, C_l, D_l$ .

где  $A, B, C, D$  - амплитуды переходов между майорановскими операторами (см. рис. 6), которые будут найдены ниже. Получаем:

$$\eta_l = \left[ 1 - \frac{C_l C_r}{[1 - D_l][1 - D_r]} \right]^{-1} \left[ \frac{A_l \chi_l + B_l \chi_r}{1 - D_l} + \frac{C_l}{1 - D_l} \cdot \frac{A_r \chi_r + B_r \chi_l}{1 - D_r} \right] \quad (64)$$

$$\eta_r = \left[ 1 - \frac{C_l C_r}{[1 - D_l][1 - D_r]} \right]^{-1} \left[ \frac{A_r \chi_r + B_r \chi_l}{1 - D_r} + \frac{C_r}{1 - D_r} \cdot \frac{A_l \chi_l + B_l \chi_r}{1 - D_l} \right] \quad (65)$$

Найдём амплитуды  $A, B, C, D$ . Для этого воспользуемся равенствами (53) и уравнением рассеяния (51), а так же свойством

$$r(\varepsilon) = r^*(-\varepsilon) \quad t(\varepsilon) = t^*(-\varepsilon) \quad (66)$$

следующим из симметрии  $\{K, \hat{H}\} = 0$  в области рассеяния.

Получаем:

$$\begin{pmatrix} \eta_r \\ \gamma_r \end{pmatrix} = t_a(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} \begin{pmatrix} \cos\left(2\alpha + \frac{\phi_{AB}}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) & -\sin\left(2\alpha + \frac{\phi_{AB}}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) \\ -\sin\left(2\alpha + \frac{\phi_{AB}}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) & -\cos\left(2\alpha + \frac{\phi_{AB}}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_l \\ \chi_l \end{pmatrix} + r_r(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} \begin{pmatrix} \cos(2\alpha + \phi_r) & -\sin(2\alpha + \phi_r) \\ -\sin(2\alpha + \phi_r) & -\cos(2\alpha + \phi_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_r \\ \chi_r \end{pmatrix}, \quad (67)$$

$$\begin{pmatrix} \eta_l \\ \gamma_l \end{pmatrix} = t_b(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} \begin{pmatrix} \cos\left(2\alpha + \frac{\phi_{AB}}{2} + \frac{\Phi}{2}\right) & -\sin\left(2\alpha + \frac{\phi_{AB}}{2} + \frac{\Phi}{2}\right) \\ -\sin\left(2\alpha + \frac{\phi_{AB}}{2} + \frac{\Phi}{2}\right) & -\cos\left(2\alpha + \frac{\phi_{AB}}{2} + \frac{\Phi}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_r \\ \chi_r \end{pmatrix} + r_l(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} \begin{pmatrix} \cos(2\alpha + \phi_l) & -\sin(2\alpha + \phi_l) \\ -\sin(2\alpha + \phi_l) & -\cos(2\alpha + \phi_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_l \\ \chi_l \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Напомним, что амплитуды рассеяния  $r(\varepsilon), t(\varepsilon)$  включают в себя динамические фазы рассеяния от берега до берега.

Таким образом,

$$A_l = a_l r_l(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} = -r_l(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} \sin(2\alpha + \phi_l) \quad (69)$$

$$B_l = b_l t_b(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} = -t_b(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} \sin\left(2\alpha + \frac{\phi_{AB}}{2} + \frac{\Phi}{2}\right) \quad (70)$$

$$C_l = c_l t_b(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} = t_b(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} \cos\left(2\alpha + \frac{\phi_{AB}}{2} + \frac{\Phi}{2}\right) \quad (71)$$

$$D_l = d_l r_l(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} = r_l(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} \cos(2\alpha + \phi_l) \quad (72)$$

$$A_r = a_r r_r(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} = -r_r(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} \sin(2\alpha + \phi_r) \quad (73)$$

$$B_r = b_r t_a(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} = -t_a(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} \sin\left(2\alpha + \frac{\phi_{AB}}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) \quad (74)$$

$$C_r = c_r t_a(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} = t_a(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} \cos\left(2\alpha + \frac{\phi_{AB}}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) \quad (75)$$

$$D_r = d_r r_r(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} = r_r(\varepsilon)e^{i\varepsilon W} \cos(2\alpha + \phi_r). \quad (76)$$

$$(77)$$

Также из-за важности амплитуды перехода по петле, определяемой произведением  $C_l C_r$ , полезно ввести параметр

$$c = c_l c_r = \frac{\cos(4\alpha + \phi_{AB}) + \cos \Phi}{2} \quad (78)$$

Обобщение выражений для амплитуд на случай отличающихся  $\alpha$  на разных перекрёстках приведено в приложении.

Операторы же  $\gamma_{l,r}$  выражаются согласно (67, 68) как

$$\gamma_l = -C_l \chi_r - D_l \chi_l + A_l \eta_l + B_l \eta_r \quad (79)$$

$$\gamma_r = -C_r \chi_l - D_r \chi_r + A_r \eta_r + B_r \eta_l. \quad (80)$$

Подставляя выражения для  $\gamma, \eta$  в (81), получаем полное выражение:

$$J_\varepsilon^{(r)} - J_\varepsilon^{(l)} = \text{Im} \left\{ \left[ -C_l + A_l \frac{B_l[1 - D_r] + C_l A_r}{[1 - D_l][1 - D_r] - C_l C_r} + B_l \frac{A_r[1 - D_l] + C_r B_l}{[1 - D_l][1 - D_r] - C_l C_r} \right] \cdot \left[ \frac{B_l[1 - D_r] + C_l A_r}{[1 - D_l][1 - D_r] - C_l C_r} \right]^* - \left[ -C_r + A_r \frac{B_r[1 - D_l] + C_r A_l}{[1 - D_l][1 - D_r] - C_l C_r} + B_r \frac{A_l[1 - D_r] + C_l B_r}{[1 - D_l][1 - D_r] - C_l C_r} \right] \cdot \left[ \frac{B_r[1 - D_l] + C_r A_l}{[1 - D_l][1 - D_r] - C_l C_r} \right]^* \right\} \quad (81)$$

Для того, чтобы получить ток, текущий через контакт, необходимо умножить это выражение на  $n_F(\varepsilon)$  и проинтегрировать по энергиям (61). Зависимость от энергии входит в (81) через амплитуды  $A, B, C, D$ . Данное выражение имеет достаточно сложную аналитическую структуру, но в некоторых случаях возможно привести интегрирование (61) к сумме по мацубаровским частотам, о чём пойдёт речь ниже.

Данное выражение позволяет проанализировать периодичность тока по магнитным потокам. Фазы  $\phi_{l,r}$  входят только в амплитуды  $A_{l,r}, D_{l,r}$ , и

исходя из вида этих амплитуд период по  $\phi_{l,r}$  составляет  $2\pi$ . Суммарная же фаза  $\phi_{AB}$  входит в амплитуды  $B_{l,r}, C_{l,r}$  как  $\phi_{AB}/2$  и требует дополнительного рассмотрения. При сдвиге  $\phi_l$  или  $\phi_r$  на период, суммарная фаза так же сдвигается как  $\phi_{AB} \rightarrow \phi_{AB} + 2\pi$  и амплитуды  $B_{l,r}, C_{l,r}$  меняют знак. Так как они входят в (81) только в четных комбинациях, это не нарушает  $2\pi$ -периодичность.

В однородном магнитном поле потоки пропорциональны площадям соответствующих контуров, и периодичность определяется положением области рассеяния. В случае рассеяния в достаточно широкой области ожидается, что периодичность по магнитному потоку исчезнет.

Период по разности фаз сверхпроводящих берегов  $\Phi$  остаётся  $2\pi$ .

### 6.3 Случай отсутствия петель с отражением

При значениях фаз Ааронова-Бома  $\phi_l = \pm\phi_r = -2\alpha \pm \pi/2$ , задача вычисления тока значительно упрощается. Амплитуды прохождения майорановских фермионов по петлям с участием рассеяния  $D_l = D_r = 0$ , что приводит к выражению для вклада в ток от правых входящих мод

$$J_\varepsilon^{(r)} = Im \left\{ \left[ -C_l + A_l \frac{B_l + C_l A_r}{1 - C_l C_r} + B_l \frac{A_r + C_r B_l}{1 - C_l C_r} \right] \left[ \frac{B_l + C_l A_r}{1 - C_l C_r} \right]^* \right\}, \quad (82)$$

и аналогичному для вклада от левых входящих мод

$$J_\varepsilon^{(l)} = Im \left\{ \left[ -C_r + A_r \frac{B_r + C_r A_l}{1 - C_l C_r} + B_r \frac{A_l + C_l B_r}{1 - C_l C_r} \right] \left[ \frac{B_r + C_r A_l}{1 - C_r C_l} \right]^* \right\}. \quad (83)$$

Рассмотрим точечное, симметричное относительно поворота на  $\pi$  рассеяние ровно в середине магнитной прослойки с такими фазами Ааронова-Бома. В промежуточных вычислениях оставим лишь вклад от правых входящих мод, после чего восстановим полный ток в конечном выражении. Раскроем амплитуды  $A, B, C, D$  в выражении (82) через соответствующие им коэффициенты и амплитуды рассеяния и упростим его:



$$\begin{aligned}
J_\varepsilon^{(r)} = \text{Im} \left\{ \left[ \frac{-b_l^2 a_r r t^2 e^{i\varepsilon/2E_T} + b_l^3 c_r t^4 e^{i\varepsilon/E_T} - b_l^2 c a_r r t^4 e^{i\varepsilon/2E_T}}{1 - c^2 t^4} + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{(b_l^2 t^2 + c_l^2 t^2 r^2) a_l r e^{i\varepsilon/2E_T} - b_l c_l a_l a_r r^2 t^2 e^{i\varepsilon/E_T}}{1 - c^2 t^4} \right] \left[ \frac{1}{1 - c t^2 e^{i\varepsilon/E_T}} + \frac{1}{1 - c t^2 e^{-i\varepsilon/E_T}} - 1 \right] + \right. \\
\left. + \frac{c_l b_l t^2 - c_l^2 a_r r e^{i\varepsilon/2E_T}}{1 - c t^2 e^{i\varepsilon/E_T}} \right\} \quad (84)
\end{aligned}$$

Интеграл (61) в данном случае приводится (см. приложение) к сумме по мацубаровским частотам  $\omega_n = 2\pi T(n + 1/2)$ . Получаем:

для случая  $\phi_l = -\phi_r = \pi/2$ :

$$j = 4 \frac{e}{\hbar} \pi T t^2 \sin \Phi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\omega_n/E_T}}{2 - (1 + \cos \Phi) t^2 e^{-\omega_n/E_T}} \quad (85)$$

и для случая  $\phi_l = \phi_r = -\pi/2$ :

$$j = 4 \frac{e}{\hbar} \pi T t^2 \sin \Phi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\omega_n/E_T}}{2 + t^2(1 - \cos \Phi) e^{-\omega_n/E_T}} \quad (86)$$

При нулевой температуре суммирование переходит в интегрирование, и мы приходим к результатам:

$\phi_l = -\phi_r = \pi/2$ :

$$j(T = 0) = -2 \frac{e}{\hbar} E_T \sin \Phi \cdot \frac{\ln \left( 1 - t^2 \frac{1 + \cos \Phi}{2} \right)}{1 + \cos \Phi} \quad (87)$$

$\phi_l = \phi_r = -\pi/2$ :

$$j(T = 0) = 2 E_T \frac{e}{\hbar} \sin \Phi \cdot \frac{\ln \left( 1 + t^2 \frac{1 - \cos \Phi}{2} \right)}{1 - \cos \Phi} \quad (88)$$

В данных случаях результаты отличаются от полученных в [8] при таких же полных фазах Ааронова-Бома  $\phi_{AB}$  лишь наличием в них коэффициента прохождения  $t^2$ . В выражении (87) видно, что наличие отражения

устраняет логарифмическую расходимость  $\partial_{\Phi} j$ , присутствующую в случае без рассеяния.

## 6.4 Случай слабого отражения

Другим случаем, когда можно привести выражение для тока к сумме по мацубаровским частотам, является случай слабого отражения. После разложения знаменателей (81) по  $r_{l,r}$ , их структура упрощается до рассмотренной в приложении, и предполагая  $|r_{l,r}|$  слабо зависящими от энергии, мы получаем выражение для поправки первого порядка:

$$j \approx j_{(0)} + j_{(1)}^{(r)} - j_{(1)}^{(l)} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} j_{(1)}^{(r)} = & -2\pi T \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{c_l b_l d_l r_l(i\omega_n) e^{-W\omega_n} + c_l^2 a_r r_r(i\omega_n) e^{-W\omega_n}}{1 - c_l c_r e^{-\omega_n/E_T}} + \right. \\ & + c_l^2 c_r b_l \left[ 1 - \frac{c_r^2 b_l^2}{1 - c_l^2 c_r^2} \right] \frac{[d_l r_l(i\omega_n) e^{-W\omega_n} + d_r r_r(i\omega_n) e^{-W\omega_n}] e^{-\omega_n/E_T}}{[1 - c_l c_r e^{-\omega_n/E_T}]^2} + \\ & \left. + \frac{c_l^2 c_r^3 c_l^3}{1 - c_l^2 c_r^2} \cdot \frac{[d_l r_l(i\omega_n) e^{-W\omega_n} + d_r r_r(i\omega_n) e^{-W\omega_n}] e^{-3\omega_n/E_T}}{[1 - c_l c_r e^{-\omega_n/E_T}]^2} \right\} + \\ & + \frac{b_l^2}{1 - c_l^2 c_r^2} a_r I_{0r} + \frac{b_l^3 c_r}{1 - c_l^2 c_r^2} [d_l I_{1l} + d_r I_{1r}] - \\ & - \frac{b_l^2 c_r}{1 - c_l^2 c_r^2} [b_l d_l I_{-1l} + c_l a_r I_{-1r}] + \\ & + \frac{b_l^3 c_l c_r^2}{[1 - c_l^2 c_r^2]^2} [d_l (I_{2l} - I_{0l}) + d_r (I_{2r} - I_{0r})], \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned}
j_{(1)}^{(l)} = & -2\pi T \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re} \left\{ \frac{c_r b_r d_r r_r(i\omega_n) e^{-W\omega_n} + c_r^2 a_l r_l(i\omega_n) e^{-W\omega_n}}{1 - c_l c_r e^{-\omega_n/E_T}} + \right. \\
& + c_r^2 c_l b_r \left[ 1 - \frac{c_l^2 b_r^2}{1 - c_l^2 c_r^2} \right] \frac{[d_l r_l(i\omega_n) e^{-W\omega_n} + d_r r_r(i\omega_n) e^{-W\omega_n}] e^{-\omega_n/E_T}}{[1 - c_l c_r e^{-\omega_n/E_T}]^2} + \\
& \left. + \frac{c_r^2 c_l^3 c_r^3}{1 - c_l^2 c_r^2} \cdot \frac{[d_l r_l(i\omega_n) e^{-W\omega_n} + d_r r_r(i\omega_n) e^{-W\omega_n}] e^{-3\omega_n/E_T}}{[1 - c_l c_r e^{-\omega_n/E_T}]^2} \right\} + \\
& + \frac{b_r^2}{1 - c_l^2 c_r^2} a_l I_{0l} + \frac{b_r^3 c_l}{1 - c_l^2 c_r^2} [d_l I_{1l} + d_r I_{1r}] - \\
& - \frac{b_r^2 c_l}{1 - c_l^2 c_r^2} [b_r d_r I_{-1r} + c_r a_l I_{-1l}] + \\
& + \frac{b_r^3 c_r c_l^2}{[1 - c_l^2 c_r^2]^2} [d_l (I_{2l} - I_{0l}) + d_r (I_{2r} - I_{0r})], \tag{91}
\end{aligned}$$

записанные через вспомогательные интегралы, так же приведённые к суммам по мацубаровским частотам:

$$\begin{aligned}
I_{Nl,r} = & \text{Im} \int n_F(\varepsilon) d\varepsilon \cdot r_{l,r}(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} e^{iN\varepsilon/E_T} \left( \frac{1}{1 - ce^{i\varepsilon/E_T}} + \frac{1}{1 - ce^{-i\varepsilon/E_T}} - 1 \right) = \\
& = -2\pi T \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re} \left\{ \frac{r_{l,r}(i\omega_n) e^{-W\omega_n} e^{-N\omega_n/E_T}}{1 - ce^{-\omega_n/E_T}} - r_{l,r}(i\omega_n) e^{-W\omega_n} e^{-N\omega_n/E_T} + \right. \\
& \left. + \frac{1 - c^{N+1} e^{(N+1)\omega_n/E_T}}{1 - ce^{\omega_n/E_T}} r_{l,r}(i\omega_n) e^{-W\omega_n} e^{-N\omega_n/E_T} - c^{N+1} \frac{r_{l,r}(-i\omega_n) e^{-W\omega_n} e^{-\omega_n/E_T}}{1 - ce^{-\omega_n/E_T}} \right\} \tag{92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{-Nl,r} = & 2\pi T \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re} \left\{ \frac{r_{l,r}(-i\omega_n) e^{-W\omega_n} e^{-N\omega_n/E_T}}{1 - ce^{-\omega_n/E_T}} - r_{l,r}(-i\omega_n) e^{-W\omega_n} e^{-N\omega_n/E_T} + \right. \\
& \left. + \frac{1 - c^N e^{N\omega_n/E_T}}{1 - ce^{\omega_n/E_T}} r_{l,r}(-i\omega_n) e^{-W\omega_n} e^{-N\omega_n/E_T} - c^N \frac{r_{l,r}(i\omega_n) e^{-W\omega_n}}{1 - ce^{-\omega_n/E_T}} \right\} \tag{93}
\end{aligned}$$

## 7 Заключение

Мы нашли гибридизацию дираковских мод в магнитной прослойке рассматриваемого контакта и изучили имеющиеся в ней симметрии. Были построены приближения для рассеяния в магнитной прослойке в случае слабой степени гибридизации и в случае плавно меняющейся в пространстве степени гибридизации. Найдена связь между майорановскими модами на берегах контакта с учётом рассеяния в магнитной прослойке. Была найдена спектральная плотность тока при произвольном рассеянии в центре и проведён анализ периодичности тока по магнитному потоку. Выражение для полного тока было упрощено до суммы по мацубаровским частотам в случае особых значений фаз Ааронова-Бома при точечном рассеянии в середине магнитной прослойки и вычислено явно при нулевой температуре. В рассмотренных случаях отличие случая с гибридизацией от результатов работы [8] сводится к присутствию в выражении коэффициента прохождения, размывающего особенность соотношения ток-фаза. Так же удалось привести к сумме по мацубаровским частотам поправку для тока в случае слабого отражения.

## Список литературы

- [1] Jason Alicea. “New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems”. В: *Reports on Progress in Physics* 75.7 (июнь 2012), с. 076501. DOI: 10.1088/0034-4885/75/7/076501. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501>.
- [2] A.Yu. Kitaev. “Fault-tolerant quantum computation by anyons”. В: *Annals of Physics* 303.1 (2003), с. 2–30. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0003-4916\(02\)00018-0](https://doi.org/10.1016/S0003-4916(02)00018-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491602000180>.
- [3] A Yu Kitaev. “Unpaired Majorana fermions in quantum wires”. В: *Physics-Uspokhi* 44.10S (окт. 2001), с. 131. DOI: 10.1070/1063-7869/44/10S/S29. URL: <https://dx.doi.org/10.1070/1063-7869/44/10S/S29>.
- [4] Jason Alicea и др. “Non-Abelian statistics and topological quantum information processing in 1D wire networks”. В: *Nature Physics* 7.5 (май 2011), с. 412–417. ISSN: 1745-2481. DOI: 10.1038/nphys1915. URL: <https://doi.org/10.1038/nphys1915>.
- [5] Liang Fu и C. L. Kane. “Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator”. В: *Phys. Rev. Lett.* 100 (9 март 2008), с. 096407. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.096407. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.096407>.
- [6] Liang Fu и C. L. Kane. “Probing Neutral Majorana Fermion Edge Modes with Charge Transport”. В: *Phys. Rev. Lett.* 102 (21 май 2009), с. 216403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.216403. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.216403>.
- [7] A. R. Akhmerov, Johan Nilsson и C. W. J. Beenakker. “Electrically Detected Interferometry of Majorana Fermions in a Topological Insulator”. В: *Phys. Rev. Lett.* 102 (21 май 2009), с. 216404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.216404. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.216404>.
- [8] Dmitriy S. Shapiro, Alexander Shnirman и Alexander D. Mirlin. “Current-phase relation and  $h/e$ -periodic critical current of a chiral Josephson contact between one-dimensional Majorana modes”. В: *Phys. Rev. B* 93 (15 апр. 2016), с. 155411. DOI: 10.1103/PhysRevB.93.155411. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.93.155411>.

## 8 Приложение 1. Приведение к сумме по мацубаровским частотам

Любой интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon n_F(\varepsilon) f(\varepsilon), \quad (94)$$

где функция  $f$  в верхней или нижней комплексной полуплоскости аналитична и затухает, замыканием контура интегрирования приводится к сумме по мацубаровским частотам  $\omega_n = 2\pi T(n + 1/2)$ . В случае аналитичности в верхней полуплоскости получается выражение

$$I = -2\pi iT \sum_{n=0}^{\infty} f(i\omega_n). \quad (95)$$

Для вычислений, производящихся в данной задаче, нас интересуют интегралы вида

$$I_\lambda = \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon n_F(\varepsilon) \frac{e^{i\lambda\varepsilon/E_T}}{1 - ct^2 e^{i\varepsilon/E_T}} \quad (96)$$

с параметром  $|ct^2| < 1$ .

При  $\lambda > 0$  можно замкнуть контур через верхнюю полуплоскость и получить

$$I_{\lambda>0} = -2\pi T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\omega_n/E_T}}{1 - ct^2 e^{-\omega_n/E_T}}. \quad (97)$$

При  $\lambda < 0$  так сделать уже нельзя. Представим дробь в подинтегральном выражении как

$$\frac{e^{i\lambda\varepsilon/E_T}}{1 - ct^2 e^{i\varepsilon/E_T}} = e^{i\lambda\varepsilon/E_T} \sum_{m=0}^{\infty} (ct^2)^m e^{im\varepsilon/E_T}. \quad (98)$$

Первые несколько слагаемых данного ряда мешают нам замкнуть контур через верхнюю полуплоскость, поэтому рассмотрим их отдельно от остальной суммы. Пусть  $\lambda = -N + \nu$ , где  $0 < \nu < 1$ ; тогда получаем

$$\begin{aligned}
& \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon n_F(\varepsilon) \sum_{m=0}^{N-1} (ct^2)^m e^{-i(N-m-\nu)} = 2\pi T \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} (ct^2)^m e^{-(N-m-\nu)\omega_n/E_T} = \\
& = 2\pi T \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(N-\nu)\omega_n/E_T} \frac{1 - (ct^2)^N e^{N\omega_n/E_T}}{1 - ct^2 e^{\omega_n/E_T}} = 2\pi T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(-N+\nu)\omega_n} - (ct^2)^N e^{\nu\omega_n/E_T}}{1 - ct^2 e^{\omega_n/E_T}}
\end{aligned} \tag{99}$$

$$I_{-N+\nu} = -2\pi T (ct^2)^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\nu\omega_n/E_T}}{1 - ct^2 e^{-\omega_n/E_T}} + 2\pi T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(-N+\nu)\omega_n} - (ct^2)^N e^{\nu\omega_n/E_T}}{1 - ct^2 e^{\omega_n/E_T}} \tag{100}$$

Так же приведём вычисления для интегралов, встречающихся в случае точечного рассеяния в центре:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon n_F(\varepsilon) \text{Im} \left\{ e^{i\varepsilon/E_T} \left[ \frac{1}{1 - ct^2 e^{i\varepsilon/E_T}} + \frac{1}{1 - ct^2 e^{-i\varepsilon/E_T}} - 1 \right] \right\} = \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon n_F(\varepsilon) \text{Im} \left\{ \frac{e^{i\varepsilon/E_T}}{1 - ct^2 e^{i\varepsilon/E_T}} + ct^2 + \frac{c^2 t^4 e^{-i\varepsilon/E_T}}{1 - ct^2 e^{-i\varepsilon/E_T}} \right\} = \\
& = -2\pi T [1 - c^2 t^4] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\omega_n/E_T}}{1 - ct^2 e^{-\omega_n/E_T}} \tag{101}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon n_F(\varepsilon) \text{Im} \left\{ e^{i\varepsilon/2E_T} \left[ \frac{1}{1 - ct^2 e^{i\varepsilon/E_T}} + \frac{1}{1 - ct^2 e^{-i\varepsilon/E_T}} - 1 \right] \right\} = \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon n_F(\varepsilon) \text{Im} \left\{ \frac{e^{i\varepsilon/2E_T}}{1 - ct^2 e^{i\varepsilon/E_T}} + \frac{e^{-i\varepsilon/2E_T}}{1 - ct^2 e^{-i\varepsilon/E_T}} \right\} = \\
& = -2\pi T [1 - ct^2] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\omega_n/2E_T}}{1 - ct^2 e^{-\omega_n/E_T}} \tag{102}
\end{aligned}$$

## 9 Приложение 2. Амплитуды при различных параметрах перекрёстков

В случае, когда параметры  $\alpha$  перекрёстков не совпадают, амплитуды переходов между майорановскими модами выглядят как

$$A_l = a_l r_l(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} = -r_l(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} \sin\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_l\right) \quad (103)$$

$$B_l = b_l t_b(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} = -t_b(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} \sin\left(\alpha_1 + \alpha_4 + \frac{\phi_{AB}}{2} + \frac{\Phi}{2}\right) \quad (104)$$

$$C_l = c_l t_b(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} = t_b(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} \cos\left(\alpha_1 + \alpha_4 + \frac{\phi_{AB}}{2} + \frac{\Phi}{2}\right) \quad (105)$$

$$D_l = d_l r_l(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} = r_l(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} \cos\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_l\right) \quad (106)$$

$$A_r = a_r r_r(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} = -r_r(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} \sin\left(\alpha_3 + \alpha_4 + \phi_r\right) \quad (107)$$

$$B_r = b_r t_a(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} = -t_a(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} \sin\left(\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{\phi_{AB}}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) \quad (108)$$

$$C_r = c_r t_a(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} = t_a(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} \cos\left(\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{\phi_{AB}}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) \quad (109)$$

$$D_r = d_r r_r(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} = r_r(\varepsilon) e^{i\varepsilon W} \cos\left(\alpha_3 + \alpha_4 + \phi_r\right). \quad (110)$$

$$(111)$$