

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
“ ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ ”»

Факультет физики

Турьшев Константин Евгеньевич

**Транспорт в топологических контактах с
участием майорановских нулевых мод**

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

по направлению подготовки 03.04.02 Физика

Образовательная программа «Физика»

Научный руководитель
д.ф.-м.н.
Ю. Г. Махлин

Москва, 2025

Рассматривается длинный, узкий джозефсоновский контакт на поверхности объёмного топологического изолятора, окружённый покрытием из магнитного материала. В магнитном поле в подобных топологических контактах образуются джозефсоновские вихри с локализованными на них майорановскими нулевыми модами. Особый интерес представляет процесс выхода вихря из контакта вместе с локализованной на нём майорановской модой, дающий характерный вклад в ток через контакт. В рассматриваемой системе магнитное покрытие открывает щель в спектре поверхностных возбуждений топологического изолятора вокруг контакта, тем самым локализуя покидающую контакт майорановскую нулевую моду на его внешней границе и позволяя получить аналитические результаты для соответствующего вклада в ток.

Содержание

1	Введение	3
2	Система	4
2.1	Зазор	5
2.2	Внешний край	6
3	Нулевая мода на краю и чётность числа вихрей	7
4	Задача рассеяния	9
4.1	Разделение масштабов	9
4.2	План решения	10
4.3	Сшивка с решением в зазоре	11
4.4	Фаза гибридизации	12
4.5	Второй тип вихрей	14
5	Энергия гибридизации нулевых мод при целом нечётном потоке	15
6	Вышележащие моды и полный ток	19
6.1	Квантовое измерение	20
7	Заключение	21
	Список литературы	22

1 Введение

Согласно теоретическим предсказаниям, майорановские нулевые моды должны обладать множеством интересных свойств, например, неабелевой квантовой статистикой. Были предложены разнообразные способы их реализации в физике конденсированного состояния [1, 2], и ведутся попытки достоверно подтвердить их существование экспериментально.

В работе [3] была предложена реализация майорановских мод на основе гибридных структур топологический изолятор - сверхпроводник - магнетик (TI-S-M). На поверхности объёмного топологического изолятора имеются возбуждения с бесщелевым спектром. И сверхпроводящее, и магнитное покрытия приводят к открытию щели в области под ними. На границе же между областями со сверхпроводящим и магнитным покрытиями оказывается локализована одномерная киральная майорановская мода. В [4] рассматривался джозефсоновский контакт-интерферометр, в котором из-за участия таких одномерных майорановских мод возникало разбиение процесса передачи куперовской пары между сверхпроводниками на пространственно разделённые процессы передачи электрона и дырки, что приводило к дробной периодичности зависимости ток-фазового соотношения от магнитного поля.

С помощью таких гибридных структур также можно реализовывать нульмерные нулевые майорановские моды. Способ их реализации заключается в пропускании магнитного потока через зазор между сверхпроводниками на поверхности топологического изолятора [5]. В таком длинном джозефсоновском S-TI-S контакте в магнитном поле образуются джозефсоновские вихри, на которых локализованы нульмерные майорановские нулевые моды. В длинных джозефсоновских контактах магнитное поле проявляется, в первую очередь, в линейно меняющейся вдоль контакта разности фаз, что приводит к фраунгоферовской, или близкой к ней, зависимости критического тока от магнитного потока, в частности, к нулевому критическому току при целом числе квантов потока. Это означает, что более тонкие эффекты, дающие малый вклад в ток по сравнению с основным вкладом в фраунгоферовскую картину, удобно наблюдать на целых потоках. Ток через джозефсоновский контакт характеризуется его поведением при глобальном изменении разности фаз сверхпроводников – ток пропорционален производной энергии по глобальной разности фаз. В S-TI-S контактах изменение глобальной разности фаз приводит к движению вихрей вдоль контакта (а значит и локализованных на них нулевых майорановских мод). Пока вихрь находится внутри контакта, это соответствует пространственному переносу состояний на вихре без изменения их энергии, что не даёт вклада в ток. Особый же интерес представляет поведение системы при подведении вихря к краю контакта. В зависимости от устройства края, при этом может происходить гибридизация майорановской нулевой моды на вихре с другой майорановской нулевой модой, дающая вклад в ток; например, в [5] рас-

сма тривался такой контакт с двухсторонней геометрией, где гибри дизация происходила между нулевыми модами на двух вихрях, одновременно подхо дящих к краю с разных сторон образца. Главным результатом было то, что вклад в ток от гибри дизации майорановских нулевых мод приводил к ненулевому критическому току при целом потоке через контакт.

Длинные S-TI-S контакты в магнитном поле также представляют интерес как потенциальная платформа для экспериментов с обведением (braiding) майорановских нулевых мод одна вокруг другой [6]. В последнее время такие системы активно изучаются экспериментально [7, 8, 9]. В работе [7] исследовался вариант подобной системы с односторонней геометрией – джо зефсоновский контакт, состоящий из двух сверхпроводящих электродов на поверхности объёмного топологического изолятора. В ней наблюдалось исчезновение нечётных нулей фраунгоферовской картины, предположительно, связанное с майорановскими нулевыми модами. В отличие от [5], ток при чётных значениях потока оставался нулевым. Важная разница между этими системами состоит в том, что в односторонней геометрии при выводе вихря из контакта у него нет парного вихря, и соответствующая майора новская мода уходит на всю поверхность топологического изолятора вне контакта.

Для теоретического изучения такого случая в данной работе рассматрива ется модель, в которой S-TI-S контакт окружен магнетиком. Это приводит к тому, что покидающая контакт нулевая мода остаётся локализованной на его внешней границе, что позволяет подробно изучить процесс выхода вихря из контакта.

2 Система

Мы будем рассматривать длинный и узкий джозефсоновский S-TI-S кон такт в магнитном поле (см. рис. 1). Гамильтониан Боголюбова-де Жена поверхностных возбуждений топологического изолятора в такой системе имеет вид

$$\hat{H}_{BdG} = v\hat{\tau}_z \left[\hat{\sigma}_z \left(\hat{p}_z - \frac{e}{c} A_z \hat{\tau}_z \right) + \hat{\sigma}_x \left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} A_x \hat{\tau}_z \right) \right] - M\hat{\sigma}_y + |\Delta|\hat{\tau}_{\Phi(\mathbf{r})} \quad (1)$$

$$\hat{\tau}_{\Phi(\mathbf{r})} = \hat{\tau}_x \cos \Phi(\mathbf{r}) + \hat{\tau}_y \sin \Phi(\mathbf{r}) \quad (2)$$

где $\hat{\sigma}$ – спиновые матрицы Паули, $\hat{\tau}$ – матрицы Паули в пространстве Боголюбова-Намбу, а M и $|\Delta|$ равны нулю вне соответствующих областей, под магне тиком и под сверхпроводниками соответственно. Мы будем рассматривать случай нулевого химического потенциала $\mu = 0$, для которого возможно получить аналитические результаты. Далее мы рассмотрим две наиболее важные для нас части системы – зазор между сверхпроводниками и внеш ний край контакта, граничащий с магнетиком.

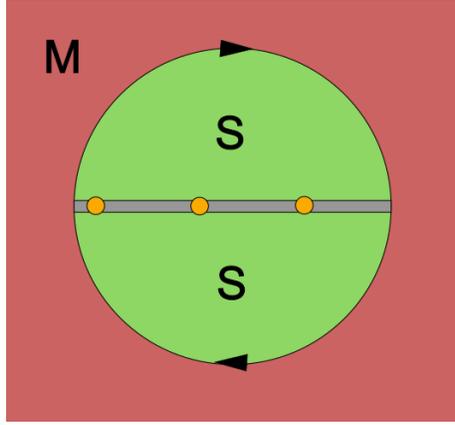


Рис. 1: Вид сверху, сверхпроводящие и магнитные покрытия лежат на объёмном топологическом изоляторе. Намагниченность магнитного покрытия направлена перпендикулярно поверхности топологического изолятора. Стрелками обозначено направление распространения киральной краевой майорановской моды, оранжевыми точками – положение джозефсоновских вихрей с нульмерными нулевыми майорановскими модами на них.

2.1 Зазор

Перейдём к рассмотрению зазора между сверхпроводниками длины L_{gap} и ширины W_{gap} . В случае узкого контакта с шириной зазора W_{gap} меньше длины когерентности $\xi = v/|\Delta|$, в зазоре между сверхпроводниками имеются две майорановские подщелевые моды с эффективным гамильтонианом [5]

$$\hat{H}_{eff} = -iv(\hat{\chi}_r \partial_z \hat{\chi}_r) + iv(\hat{\chi}_l \partial_z \hat{\chi}_l) + i\hat{\chi}_l \hat{\chi}_r |\Delta| \cos \frac{\varphi}{2} \quad (3)$$

где z – координата вдоль зазора, $\varphi = \varphi_0 + 2\pi \frac{z}{l_B}$ – локальная разность фаз сверхпроводников, расстояние между вихрями $l_B = L_{gap} \cdot \frac{\Phi_0}{\Phi_B} = \frac{\Phi_0}{BW_{gap}}$, а $\hat{\chi}_{l,r}$ – операторы поперечных майорановских мод. В точке $\varphi = \pi$ их профили принимают значение [3]

$$|\chi_r\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\frac{|\Delta|}{v}|x|}, \quad |\chi_l\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{|\Delta|}{v}|x|} \quad (4)$$

где x – координата поперёк зазора.

Гамильтониан (3) можно переписать как

$$\hat{H}_{eff} = (\hat{\chi}_r, \hat{\chi}_l) \left\{ -iv\hat{\rho}_z\partial_z + \frac{|\Delta|}{2}\hat{\rho}_y \cos \frac{\varphi}{2} \right\} \begin{pmatrix} \hat{\chi}_r \\ \hat{\chi}_l \end{pmatrix} \quad (5)$$

где $\hat{\rho}$ - матрицы Паули в пространстве подщелевых мод.

В джозефсоновских вихрях – вблизи точек с $\varphi = \pi + 2\pi n$ (оранжевые точки на рис. 1) – уравнение на уровни принимает вид

$$\left\{ -iv\hat{\rho}_z\partial_z \pm \frac{1}{2}\gamma z\hat{\rho}_y \right\} |\chi\rangle = \varepsilon |\chi\rangle, \quad \gamma = \pi \frac{|\Delta|}{l_B} = \frac{\pi v}{l_B \xi} \quad (6)$$

Возводя его в квадрат, получаем спектр

$$\varepsilon_{n,\rho_x} \propto \pm \sqrt{n + \frac{1 \pm \rho_x}{2}} \quad (7)$$

где уровню с $\varepsilon = 0$ соответствует локализованная майорановская нулевая мода,

$$|\chi_0\rangle \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{\gamma z^2}{4v}} \quad (8)$$

Мы будем рассматривать случай, в котором майорановские нулевые моды в зазоре хорошо отделены друг от друга, что соответствует расстоянию между вихрями много больше масштаба локализации нулевых мод, $l_B \gg v/\sqrt{\gamma} \sim \sqrt{l_B \xi}$. Получаем, что нас интересует случай $l_B \gg \xi$.

2.2 Внешний край

Внешний край рассматриваемого контакта является TI-S-M структурой, в однородном случае содержащей одномерную киральную майорановскую моду с линейным спектром [3]

$$\varepsilon = vp \quad (9)$$

Нас же будет интересовать случай достаточно гладкого, но криволинейного внешнего края, замыкающегося через рассеяние на двух краях зазора. Сразу отметим, что длина периметра контакта $L > 2Nl_B$, где N - число квантов магнитного потока через контакт.

Эффективное уравнение для распространения краевой моды принимает вид

$$\langle \chi_\perp(l_\parallel) | v\hat{\tau}_z\hat{\sigma}_\parallel \left(\hat{p}_\parallel - \frac{e}{c}A_\parallel\hat{\tau}_z \right) | \chi_\perp(l_\parallel) \rangle \chi_\varepsilon(l_\parallel) = \varepsilon\chi_\varepsilon(l_\parallel) \quad (10)$$

где l_\parallel – координата вдоль края, а $|\chi_\perp\rangle$ – поперечный профиль подщелевой моды в точке l_\parallel . Имеет смысл выразить $|\chi_\perp\rangle$ через его значение в некоторой точке отсчёта:

$$|\chi_{\perp}(l_{\parallel})\rangle = e^{-i\hat{\sigma}_y\phi_{\parallel}/2 - i\hat{\tau}_z\Phi/2} |\chi_{\perp}(0)\rangle \quad (11)$$

Здесь ϕ_{\parallel} – угол, между направлениями распространения в точках l_{\parallel} и 0, а Φ – фаза сверхпроводника в точке l_{\parallel} , отсчитанная от значения в точке отсчёта. Если выбрать точку отсчёта так, чтобы направление \mathbf{e}_{\parallel} было сонаправлено оси z , $|\chi_{\perp}(0)\rangle$ будет выражаться как

$$|\chi_{\perp}(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ie^{i\Phi} \end{pmatrix} e^{-\theta(x_{\perp})\frac{M}{v}x_{\perp} + \theta(-x_{\perp})\frac{|\Delta|}{v}x_{\perp}} \quad (12)$$

Профиль $|\chi_{\perp}(l_{\parallel})\rangle$ обладает свойствами

$$\hat{\tau}_z\hat{\sigma}_{\parallel}|\chi_{\perp}\rangle = |\chi_{\perp}\rangle, \quad \langle\chi_{\perp}|\hat{\tau}_z|\chi_{\perp}\rangle = 0, \quad \langle\chi_{\perp}|\hat{\sigma}_{\parallel}|\chi_{\perp}\rangle = 0 \quad (13)$$

Подставляя (11) в уравнение (10), локально приходим к результату, аналогичному однородному случаю:

$$-iv\partial_{\parallel}\chi_{\varepsilon} = \varepsilon\chi_{\varepsilon} \quad (14)$$

3 Нулевая мода на краю и чётность числа вихрей

В зависимости от точного условия квантования, на краю контакта может существовать нулевая майорановская мода. С помощью топологических соображений можно показать, что нулевая мода имеется в случае, когда в контакте нечётное число вихрей, и отсутствует при чётном числе вихрей.

Начнём рассмотрение со случая целого магнитного потока через контакт и нулевой разности фаз сверхпроводников на краях зазора. В таком случае при рассмотрении краевой моды про существование зазора можно забыть, и условие квантования краевой моды определяется её фазой Берри, которую легко получить из выражения (11). Имеем фазу Берри, равную π , связанную с подстройкой спина по направлению движения, а также фазу $\pi \cdot N$ от подстройки псевдоспина в пространстве Боголюбова-Нambu под локальную фазу сверхпроводника, где N – число квантов магнитного потока внутри контакта.

Таким образом, при целом потоке через контакт и нулевой разности фаз сверхпроводников на краях зазора нулевая мода на краю существует при нечётном числе вихрей:

$$\varepsilon_{odd} = \frac{v}{L} \cdot 2\pi n \quad (15)$$

и не существует при чётном:

$$\varepsilon_{even} = \frac{v}{L} \cdot 2\pi(n + 1/2) \quad (16)$$

Далее можно продолжить этот вывод на случай произвольных разностей фаз на краях и потока через контакт. Будем, мысленно, непрерывно менять пространственную зависимость фазы сверхпроводников; при непрерывном преобразовании системы, майорановская нулевая мода не может получить ненулевую энергию без парной нулевой майорановской моды из-за симметрии уравнения Боголюбова-де Жена:

$$\left\{ \hat{\tau}_y \hat{\sigma}_y K, \hat{H}_{BdG} \right\} = 0 \quad (17)$$

Кроме края, в данной системе имеются нулевые майорановские моды на вихрях внутри зазора. Вихрь оказывается на краю при разности фаз на нём, близкой к π . До тех пор, пока этого не происходит, у нулевой моды на краю нет пары, и она не может исчезнуть при таком непрерывном преобразовании.

Итак, мы можем начать со случая целого потока и нулевой разности фаз на краях зазора, когда на краю имеется нулевая мода, и непрерывным преобразованием перейти в ситуацию с произвольным потоком и разностями фаз на краях. Если число вихрей при этом остаётся прежним, это возможно сделать, не подводя их к краю зазора; в таком случае майорановская нулевая мода на краю не может ни исчезнуть, ни появиться в результате такого преобразования. Получаем, что её наличие на краю определяется чётностью числа вихрей внутри контакта.

Этот результат, на самом деле, является ожидаемым. В связи с упомянутой симметрией уравнения Боголюбова-де Жена, майорановские нулевые моды не могут образовываться поодиночке. При входе вихря внутрь контакта на нём появляется нулевая майорановская мода - это значит, что либо она изначально была на краю и вошла в контакт вместе с вихрем, либо что образовалась пара нулевых майорановских мод, одна из которых осталась на внешнем крае. Если исчезновение нулей критического тока при целых потоках в работе [7] действительно связано именно с гибридизацией майорановских нулевых мод, это объясняет, почему в ней наблюдалось исчезновение именно нечётных нулей, в отличие от предсказаний [5] для двусторонней геометрии – при отсутствии парной моды снаружи контакта, выходящая из контакта мода продолжает оставаться нулевой майорановской модой и вклада в ток давать не может.

Ниже мы будем рассматривать процесс ввода/вывода вихря через край контакта. Приведённые выше соображения требуют, чтобы фаза рассеяния на крае зазора при нулевой энергии была равна либо 0, либо π , пока рядом с краем нет вихря, и меняла значение при вводе/выводе вихря через этот

край – действительно, мы можем производить описанные выше непрерывные преобразования так, чтобы разность фаз на одном из краёв оставалась постоянной, и тогда это означает, что фаза рассеяния на другом крае обязана оставаться постоянной сама по себе. Переход между двумя случаями состоит в плавном изменении фазы рассеяния от 0 до π (или наоборот) при подведении вихря к краю. Энергию гибридизации нулевых мод мы будем искать как энергию краевой моды с наименьшей по абсолютному значению энергией.

4 Задача рассеяния

4.1 Разделение масштабов

Начнём решение задачи рассеяния краевой моды с рассмотрения масштабов. Нас интересует случай, когда вихрь находится на расстоянии $\lesssim \sqrt{l_B \xi}$ от края зазора - на таких расстояниях происходит гибридизация вихря с краевой модой.

В глубине зазора нас интересуют лишь подщелевые моды. Сложность же решения задачи рассеяния на крае зазора путем сшивки решений заключается в том, что вблизи края в зазоре (и не только в нём) необходимо учитывать надщелевые поперечные моды, проникающие вглубь зазора на расстояния $\lesssim \xi \ll \sqrt{l_B \xi}$. В таком случае имеет смысл отдельно рассматривать рассеяние в области перекрёстка масштаба $\sim \xi$ и отражение в зазоре на расстояниях $\gg \xi$ от перекрёстка.

Теперь обсудим область перекрёстка. Характерное время прохождения перекрёстка возбуждением $t_{\text{junction}} \sim \xi/v = |\Delta|^{-1}$. Соответственно, рассеяние на нём зависит от энергии на масштабе $\sim |\Delta|$, чем мы можем пренебречь, так как нас интересуют подщелевые моды с энергией $\varepsilon \ll |\Delta|$. Так как $\xi \ll l_B$, мы также можем пренебречь неоднородностью фаз сверхпроводников в области перекрёстка. Разность фаз сверхпроводников на краю при интересующих нас расстояниях от края до вихря оказывается равной π с точностью до поправки $\sim \frac{\sqrt{l_B \xi}}{l_B} = \sqrt{\frac{\xi}{l_B}} \ll 1$. Рассматривая отклонение разности фаз от π как возмущение, получаем, что $t_{\text{junction}} |\Delta| [\cos(\Delta\Phi/2) - \cos(\pi/2)] \sim t_{\text{junction}} |\Delta| \sqrt{\frac{\xi}{l_B}} = \sqrt{\frac{\xi}{l_B}} \ll 1$ и им можно пренебречь.

Далее мы воспользуемся тем, что мы рассматриваем случай $\mu = 0$ (приведённые рассуждения применимы при $\mu t_{\text{junction}} = \mu/|\Delta| \ll 1$). Пока что мы получили, что в области перекрёстка достаточно рассматривать рассеяние без учёта магнитного поля и с разностью фаз сверхпроводников $\Delta\Phi = \pi$. При $\mu = 0$ в области перекрёстка также имеется симметрия

$$\left[\hat{\tau}_\Phi \hat{\sigma}_y, \hat{H}_{BdG} \right] = 0 \quad (18)$$

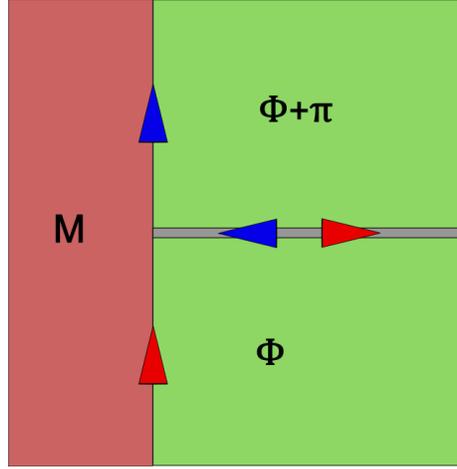


Рис. 2: Область перекрёстка. Стрелками обозначены направления движения майорановских мод.

Оказывается, что для входящей и выходящей краевых майорановских мод оператор данной симметрии принимает разные значения, см. (12):

$$\hat{\tau}_\Phi \hat{\sigma}_y |\chi_\Phi\rangle = |\chi_\Phi\rangle, \quad \hat{\tau}_\Phi \hat{\sigma}_y |\chi_{\Phi+\pi}\rangle = -\hat{\tau}_{\Phi+\pi} \hat{\sigma}_y |\chi_{\Phi+\pi}\rangle = -|\chi_{\Phi+\pi}\rangle \quad (19)$$

это означает, что входящая мода не может перейти в выходящую в области перекрёстка - для этого ей необходимо уйти вглубь зазора на расстояния, на которых данная симметрия нарушается магнитным полем (см. рис. 2).

4.2 План решения

Таким образом, мы поняли, что задача рассеяния распадается на три части: движение по краю, рассеяние на перекрёстке, отражение в зазоре. Решить рассеяние на перекрёстке прямолинейным подходом всё ещё не представляется возможным. Тем не менее, оказывается, что приведённые в разделах (3, 4.1) наблюдения содержат всю необходимую для нас информацию про перекрёсток.

Так как зависимость рассеяния на перекрёстке от энергии можно пренебречь, мы можем начать с нулевой энергии и воспользоваться тем, что из топологических соображений фаза рассеяния на перекрёстке вместе с зазором на нулевой энергии обязана быть равна либо 0, либо π , и менять значение при пересечении разности фаз $\Delta\Phi = \pi$. Это в том числе должно быть верно для случая однородной, произвольно близкой к π разности фаз в зазоре – про этот случай можно думать, как про вихрь, отделённый от края мелким, но очень длинным барьером. Теперь нам достаточно заменить

в нём отражение в зазоре на случай, который нас на самом деле интересует – с вихрем вблизи края и при интересующей нас энергии ε . Изменение фазы отражения в зазоре и будет интересующим нас изменением фазы рассеяния в процессе гибридизации.

4.3 Сшивка с решением в зазоре

Перейдём к рассмотрению отражения в зазоре. Имеем уравнение (6):

$$\left(-i\hat{\rho}_z\partial_z + \frac{1}{2}\gamma z\hat{\rho}_y\right)|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle \quad (20)$$

Здесь и далее мы работаем в единицах $v = 1$ и восстанавливаем скорость поверхностных возбуждений топологического изолятора в итоговом ответе. Существует два типа вихрей с разным знаком перед γ ; пока что положим знак положительным.

Будем рассматривать случай, когда край зазора находится слева – в таком случае нас интересует затухающее направо решение. Возведём уравнение в квадрат:

$$\left(-\partial_z^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 z^2 - \frac{1}{2}\gamma\hat{\rho}_x\right)|\psi\rangle = \varepsilon^2|\psi\rangle \quad (21)$$

Его необходимо дополнить граничными условиями:

$$|\psi(z_0)\rangle = |\psi_0\rangle, \quad \partial_z|\psi(z_0)\rangle = \left(-\frac{1}{2}\gamma z_0\hat{\rho}_x + i\varepsilon\hat{\rho}_z\right)|\psi_0\rangle \quad (22)$$

Второе из этих условий восстанавливается по исходному уравнению (до возведения в квадрат). Можно обратить внимание, что знак энергии, нигде не фигурирующий в уравнении на ε^2 , фиксируется именно этим условием.

Приведём уравнение к стандартному виду:

$$\left(\gamma^{-1}\partial_z^2 - \frac{1}{4}\gamma z^2 + \frac{1}{2}\rho_x + \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right)\psi_{\rho_x}(z) = 0 \quad (23)$$

с затухающим при $z \rightarrow +\infty$ решением

$$\psi_{\rho_x}(z) = U\left(\sqrt{\gamma}z, -\frac{1}{2}\rho_x - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right) \quad (24)$$

где U - функция параболического цилиндра в соответствии со справочником [10].

Запишем гран. условие в базисе $\hat{\rho}_x$:

$$|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_x, \quad |\psi'_0\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\gamma z_0 \alpha + i\varepsilon\beta \\ \frac{1}{2}\gamma z_0 \beta + i\varepsilon\alpha \end{pmatrix}_x \quad (25)$$

Произведём сшивку:

$$\frac{\psi'_+(z_0)}{\psi_+(z_0)} = \sqrt{\gamma} \frac{U'(\sqrt{\gamma}z_0, -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma})}{U(\sqrt{\gamma}z_0, -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma})} = -\frac{1}{2}\gamma z_0 + i\varepsilon \frac{\beta}{\alpha} \quad (26)$$

$$\frac{\psi'_-(z_0)}{\psi_-(z_0)} = \sqrt{\gamma} \frac{U'(\sqrt{\gamma}z_0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma})}{U(\sqrt{\gamma}z_0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma})} = \frac{1}{2}\gamma z_0 + i\varepsilon \frac{\alpha}{\beta} \quad (27)$$

Каждое из этих уравнений даёт связь α и β . Нам достаточно взять любое из них – они согласованы по построению, что несложно проверить явно. Из уравнения (27) получаем:

$$\alpha = -i \frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \left(\frac{U'(\sqrt{\gamma}z_0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma})}{U(\sqrt{\gamma}z_0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma})} - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}z_0 \right) \beta \quad (28)$$

Далее воспользуемся свойством функции U параболического цилиндра [10] чтобы переписать полученный результат:

$$\frac{d}{dz} \left(e^{-z^2/4} U(z, a) \right) = -e^{-z^2/4} U(z, a-1) \quad (29)$$

$$U'(z, a) - \frac{1}{2}zU(z, a) = -U(z, a-1) \quad (30)$$

В итоге получаем:

$$\alpha = i \frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \cdot \frac{U(\sqrt{\gamma}z_0, -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma})}{U(\sqrt{\gamma}z_0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma})} \cdot \beta \quad (31)$$

Это соотношение фиксирует вид решения, соответствующего отражению падающей слева волны от правой стенки вихря, в точке z_0 относительно его центра – то есть оно содержит всю информацию об отражении.

4.4 Фаза гибридизации

Теперь нам нужно извлечь из полученного решения добавочную фазу рассеяния по сравнению с однородным случаем на нулевой энергии. В однородном случае имеется уравнение

$$\left(-i\hat{\rho}_z \partial_z \mp \frac{1}{2}\lambda\hat{\rho}_y \right) |\psi\rangle = 0 \quad (32)$$

где минус перед λ соответствует центру вихря внутри зазора, а плюс - центру вне зазора. Перепишем это уравнение как

$$\partial_z |\psi\rangle = \pm \frac{1}{2} i \hat{\rho}_z \hat{\rho}_y \lambda |\psi\rangle = \pm \frac{1}{2} \lambda \hat{\rho}_x |\psi\rangle \quad (33)$$

Тогда его решение принимает вид

$$|\psi\rangle \propto \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{-\lambda z} \quad (34)$$

Так как оператор скорости в таком уравнении это $\hat{\rho}_z$, первое слагаемое соответствует входящей в зазор компоненте, а второе - выходящей. Соответственно, множитель перед вторым слагаемым играет роль амплитуды отражения. При проходе вихря через край полная фаза рассеяния должна измениться на π ; удобно это изменение фазы приписать имеющейся здесь смене знака. Эту фазу удобно включить в добавочную фазу, вызванную гибридизацией, которую мы ищем - в итоге мы должны получить плавный переход от 0 к π .

Нам осталось применить результаты для сшивки с решением в вихре и найти новую фазу отражения:

$$|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 + \beta/\alpha \\ 1 - \beta/\alpha \end{pmatrix} \quad (35)$$

тогда амплитуда отражения

$$r = \frac{1 - \beta/\alpha}{1 + \beta/\alpha} = -\frac{1 - \alpha/\beta}{1 + \alpha/\beta} \quad (36)$$

и добавочная фаза

$$\varphi_{hyb} = -2 \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \cdot \frac{U\left(\sqrt{\gamma}z_0, -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right)}{U\left(\sqrt{\gamma}z_0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right)} \right\} \quad (37)$$

где z_0 - координата края зазора относительно центра вихря. Обратим внимание на то, как в полученное выражение входит энергия. При $\varepsilon^2 \ll \gamma$ можно пренебречь энергией в параметрах U , но под арктангенсом остаётся множитель $\gamma/\sqrt{\varepsilon}$; этот множитель в том числе обеспечивает нечётность фазы рассеяния по энергии, необходимую из симметрии уравнения Боголюбова-де Жена. На малых энергиях тогда получаем

$$\varphi_{hyb} \approx -2 \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \cdot \frac{U\left(\sqrt{\gamma}z_0, -\frac{1}{2}\right)}{U\left(\sqrt{\gamma}z_0, \frac{1}{2}\right)} \right\} \quad (38)$$

$$U\left(\sqrt{\gamma}z, -\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{4}\gamma z^2} \quad (39)$$

$$U\left(\sqrt{\gamma}z, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{4}\gamma z^2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}z\right) \quad (40)$$

$$\varphi_{hyb}(\varepsilon) \approx -2 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma z_0^2}}{\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}z_0\right)} \right\} \quad (41)$$

Проверим, что до подведения и после выхода вихря мы получаем правильные результаты. До подведения $z_0 < 0$, $\sqrt{\gamma}|z_0| \gg 1$:

$$\varphi_{hyb}(\varepsilon) \approx -2 \arctan \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\gamma z_0^2} \right\} \approx 0 \quad (42)$$

Хоть под арктангенсом и стоит большой параметр $\sqrt{\gamma}/\varepsilon$, там также есть сильно затухающая экспонента.

После выхода $z_0 > 0$, $\sqrt{\gamma}z_0 \gg 1$:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma z_0^2}}{\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}z_0\right)} \sim \sqrt{\gamma}z_0 \quad (43)$$

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \cdot \sqrt{\gamma}z_0 = \frac{\gamma z_0}{\varepsilon} \sim \frac{|\Delta|}{\varepsilon} \gg 1 \quad (44)$$

$$\varphi_{hyb}(\varepsilon) \approx -\pi \quad (45)$$

4.5 Второй тип вихрей

Теперь рассмотрим случай другого знака в уравнении (20):

$$\left(-i\hat{\rho}_z\partial_z - \frac{1}{2}\gamma z\hat{\rho}_y\right)|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle \quad (46)$$

После возведения в квадрат отличие заключается в знаке при $\hat{\rho}_y$:

$$\left(-\partial_z^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 z^2 + \frac{1}{2}\gamma\hat{\rho}_x\right)|\psi\rangle = \varepsilon^2|\psi\rangle \quad (47)$$

А условия сшивки выглядят как

$$|\psi(z_0)\rangle = |\psi_0\rangle, \quad \partial_z|\psi(z_0)\rangle = \left(\frac{1}{2}\gamma z_0\hat{\rho}_x + i\varepsilon\hat{\rho}_z\right)|\psi_0\rangle \quad (48)$$

Уравнение на связь α и β :

$$\frac{\psi'_-(z_0)}{\psi_-(z_0)} = \sqrt{\gamma} \frac{U' \left(\sqrt{\gamma} z_0, -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \right)}{U \left(\sqrt{\gamma} z_0, -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \right)} = -\frac{1}{2} \gamma z_0 + i \varepsilon \frac{\alpha}{\beta} \quad (49)$$

$$i \varepsilon \frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{U' \left(\sqrt{\gamma} z_0, -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \right)}{U \left(\sqrt{\gamma} z_0, -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \right)} + \frac{1}{2} \sqrt{\gamma} z_0 \right) = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{U' \left(\sqrt{\gamma} z_0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \right)}{U \left(\sqrt{\gamma} z_0, -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \right)} \quad (50)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = -i \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{U \left(\sqrt{\gamma} z_0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \right)}{U \left(\sqrt{\gamma} z_0, -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \right)} \quad (51)$$

Фаза гибридизации:

$$\varphi_{hyb}^- = 2 \arctan \left\{ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{U \left(\sqrt{\gamma} z_0, \frac{1}{2} \right)}{U \left(\sqrt{\gamma} z_0, -\frac{1}{2} \right)} \right\} = \pi \cdot \text{sgn}(\varepsilon) + \varphi_{hyb} \quad (52)$$

Таким образом, если сменить тип обеих вихрей на краях (что сохраняет чётность числа вихрей внутри), мы получим ту же картину – как и должны.

5 Энергия гибридизации нулевых мод при целом нечётном потоке

Перейдём к рассмотрению энергии гибридизации нулевых майорановских мод при целом нечётном потоке. При целом потоке центры двух вихрей с разных сторон контакта одновременно пересекают край зазора – один вихрь контакт покидает, а другой в него входит. Для определённости выберем на левом вихре положительный знак перед γ в уравнении (6). Тогда при нечётном числе вихрей в контакте на правом перекрёстке знак будет отрицательным. Действительно, на каждом следующем вихре знак перед γ противоположен предыдущему, а при учёте повернутой на 180 градусов ориентации правого перекрёстка относительно левого, знак меняется дважды – из-за смены направления отсчёта z и из-за смены знака разницы фаз при перестановке сверхпроводников местами.

В итоге энергия гибридизации нулевых мод определяется условием квантования краевой моды:

$$L\varepsilon + \varphi_{hyb}(\varepsilon, z_0) + \varphi_{hyb}(\varepsilon, -z_0) + \pi \cdot \text{sgn}(\varepsilon) = 2\pi n \quad (53)$$

где также учтено, что при движении вихрей на левом z_0 будет расти, а на правом – убывать. В итоге приходим к уравнению

$$L\varepsilon + \varphi_{hyb}(\varepsilon, z_0) + \varphi_{hyb}(\varepsilon, -z_0) = -\pi \cdot \text{sgn}(\varepsilon) \quad (54)$$

Подставим в полученное уравнение выражение для фазы гибридизации (41):

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{1}{L} \left[2 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma z_0^2}}{\text{erfc}(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}z_0)} \right\} + \right. \\ \left. + 2 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma z_0^2}}{\text{erfc}(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}z_0)} \right\} - \right. \\ \left. -\pi \cdot \text{sgn}(\varepsilon) \right] \quad (55) \end{aligned}$$

Внимательно посмотрим на аргументы арктангенсов в полученном уравнении. Как функции z_0 один аргумент монотонно возрастает, другой - убывает. При этом при $z_0 = 0$ их аргументы уже велики; это значит, что при $z_0 > 0$ можно оставить лишь один из них, а второй положить равным $\pi/2$. При $z_0 < 0$ они меняются местами. Физически это означает, что при целом потоке процессы слияния майорановских нулевых мод и их обратного разделения на вихрях на двух концах зазора происходят строго последовательно – нулевая мода на выходящем вихре гибридизуется чуть раньше, чем центры вихрей пересекут края зазора, а нулевая мода на входящем вихре образуется чуть позже.

$z_0 > 0$:

$$|\varepsilon| \approx \frac{2}{L} \arctan \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\gamma}}{|\varepsilon|} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma z_0^2}}{\text{erfc}(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}z_0)} \right\} \quad (56)$$

$$\frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\gamma}} \tan \left\{ \frac{L|\varepsilon|}{2} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma z_0^2}}{\text{erfc}(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}z_0)} \quad (57)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\gamma}} \partial_L \cos \left\{ \frac{L|\varepsilon|}{2} \right\} = \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\gamma}} \sin \left\{ \frac{L|\varepsilon|}{2} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma z_0^2}}{\text{erfc}(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}z_0)} \cos \left\{ \frac{L|\varepsilon|}{2} \right\} \quad (58)$$

$$\partial_L \ln \cos \left\{ \frac{L|\varepsilon|}{2} \right\} = -\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma z_0^2}}{\text{erfc}(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}z_0)} \quad (59)$$

$$\cos \left\{ \frac{L|\varepsilon|}{2} \right\} = \exp \left(-\frac{L\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma z_0^2}}{\text{erfc}(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}z_0)} \right) \quad (60)$$

$$|\varepsilon| = \frac{2}{L} \arccos \left\{ \exp \left(-\frac{L\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma z_0^2}}{\text{erfc}(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}|z_0|)} \right) \right\} \quad (61)$$

В итоге получаем:

$$\boxed{|\varepsilon| = \frac{2v}{L} \arccos \left\{ \exp \left(-\frac{L\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\gamma z_0^2} \right) \right\}} \quad (62)$$

Или через исходные параметры:

$$\boxed{|\varepsilon| = \frac{2v}{L} \arccos \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{L}{\sqrt{l_B \xi}} \cdot \exp \left[-\frac{\pi l_B}{2\xi} \left(\frac{\Delta\Phi}{2\pi} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right) \right\}} \quad (63)$$

где $0 < \Delta\Phi < 2\pi$ - разность фаз сверхпроводников на левом крае зазора.

Энергия гибридизации при подведении вихря к краю монотонно меняется от 0 до π/L , что соответствует нашим ожиданиям. После того, как центры вихрей пересекли края зазора, на вошедшем вихре начинает локализовываться новая майорановская нулевая мода, и энергия гибридизации совершает симметричное изменение обратно до нуля. Беря производную от энергии гибридизации, получаем соответствующий вклад в ток через контакт (см. рис. 3).

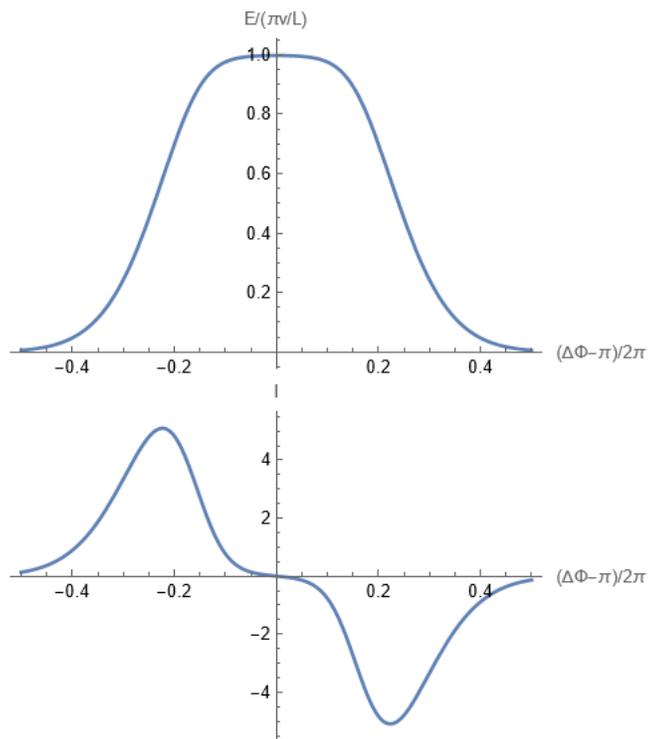


Рис. 3: Сверху – зависимость энергии гибридизации нулевых майорановских мод от разности фаз на краю, снизу – соответствующий вклад в ток. $L = 8$ мкм, $l_B = 3$ мкм, $\xi = 100$ нм.

6 Вышележащие моды и полный ток

Перейдём к обсуждению полного тока через контакт при целом нечётном потоке. Для этого необходимо учесть, что кроме гибридизации нулевых мод, также происходит гибридизация и вышележащих. Численно решая уравнение

$$L\varepsilon + \varphi_{hyb}(\varepsilon, z_0) + \varphi_{hyb}(\varepsilon, -z_0) = \pi + 2\pi n \quad (64)$$

получаем зависимость уровней энергии от фазы. Суммируя их и беря производную, приходим к зависимости полного тока от фазы, рис. 4. Как видим, в отличие от двусторонней геометрии, вклад гибридизации нулевых мод не основной, но всё ещё заметный. В такой системе критический ток будет ненулевым при всех целых потоках, аналогично двусторонней геометрии, хоть при чётных потоках в этом и не будут участвовать нулевые майорановские моды. Подчеркнём, что это не противоречит приведённому объяснению исчезновения лишь нечётных нулей в [7]; относительная важность вкладов от нулевых и вышележащих мод зависит от более тонких деталей системы – в том числе можно предположить, что в этом играет роль киральность краевой моды в рассматриваемом нами варианте системы.

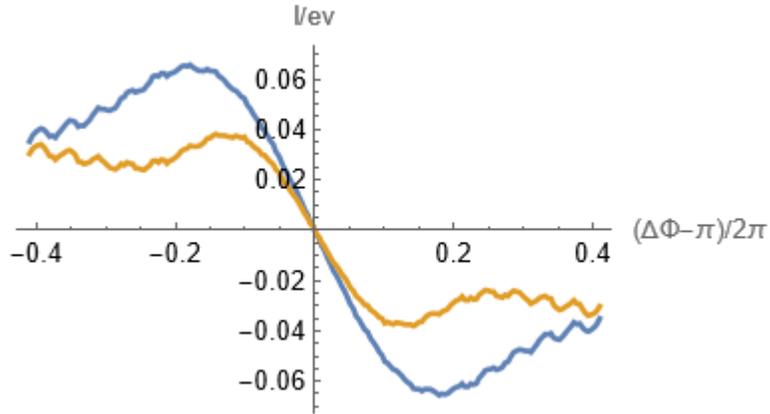


Рис. 4: Зависимость полного тока от фазы на краю зазора при разных состояниях на вихре. Численное решение при $L = 8$ мкм, $l_B = 3$ мкм, $\xi = 100$ нм.

6.1 Квантовое измерение

Каждой имеющейся в системе паре нулевых майорановских мод соответствует двукратное вырождение основного состояния, с помощью которого в топологических квантовых вычислениях предлагается хранить информацию. На рис. 4 изображено два графика тока, каждый из которых соответствует тому, что система находится в одном из двух основных состояний, соответствующих сливающимся (и далее снова расщепляющимся) нулевым майорановским модам – на вихре и на внешнем крае. Их заметное отличие, в том числе по максимальному значению, означает, что в такой системе при целом нечётном потоке через контакт возможно производить квантовое измерение по критическому току в процессе вывода вихря из контакта.

7 Заключение

Таким образом, в данной работе была рассмотрена модель, в которой длинный, узкий джозефсоновский S-TI-S контакт в магнитном поле окружён магнитным покрытием, локализуящим на его крае одномерную киральную майорановскую моду. Это позволило явно продемонстрировать, что в подобных контактах с односторонней геометрией вклад гибридизации майорановских нулевых мод в ток имеется лишь при вводе/выводе нечётного вихря. В случае целого потока, когда центры входящего и выходящего вихрей пересекают край зазора одновременно, оказалось правильным считать, что сначала контакт покидает нулевая мода на выходящем вихре (незадолго до пересечения его центром края зазора), и лишь после этого образуется нулевая мода на входящем (вскоре после пересечения его центром края). Также удалось найти явное аналитическое выражение для соответствующей энергии гибридизации нулевых мод в данной модели при целом потоке, и соответствующий вклад в ток. Численные вычисления показали, что из-за особенностей рассматриваемой модели, вклад гибридизации майорановских нулевых мод в критический ток при целом магнитном потоке через контакт оказался не основным, но заметным. Это в том числе потенциально позволяет проводить квантовое измерение состояния, соответствующего нулевой майорановской моде на джозефсоновском вихре, что представляет интерес для изучения майорановских нулевых мод, например, в экспериментах с их обведением одна вокруг другой как предложено в [6].

Список литературы

- [1] A Yu Kitaev. “Unpaired Majorana fermions in quantum wires”. В: *Physics-Uspekhi* 44.10S (окт. 2001), с. 131–136. ISSN: 1468-4780. DOI: 10.1070/1063-7869/44/10s/s29. URL: <http://dx.doi.org/10.1070/1063-7869/44/10S/S29>.
- [2] Jason Alicea. “New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems”. В: *Reports on Progress in Physics* 75.7 (июнь 2012), с. 076501. ISSN: 1361-6633. DOI: 10.1088/0034-4885/75/7/076501. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501>.
- [3] Liang Fu и C. L. Kane. “Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator”. В: *Physical Review Letters* 100.9 (март 2008). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.100.096407. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.096407>.
- [4] Dmitriy S. Shapiro, Alexander Shnirman и Alexander D. Mirlin. “Current-phase relation and h/e -periodic critical current of a chiral Josephson contact between one-dimensional Majorana modes”. В: *Physical Review B* 93.15 (апр. 2016). ISSN: 2469-9969. DOI: 10.1103/physrevb.93.155411. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.93.155411>.
- [5] Andrew C. Potter и Liang Fu. “Anomalous supercurrent from Majorana states in topological insulator Josephson junctions”. В: *Physical Review B* 88.12 (сент. 2013). ISSN: 1550-235X. DOI: 10.1103/physrevb.88.121109. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.88.121109>.
- [6] Suraj S. Hegde и др. “A topological Josephson junction platform for creating, manipulating, and braiding Majorana bound states”. В: *Annals of Physics* 423 (дек. 2020), с. 168326. ISSN: 0003-4916. DOI: 10.1016/j.aop.2020.168326. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2020.168326>.
- [7] Guang Yue и др. “Signatures of Majorana bound states in the diffraction patterns of extended superconductor–topological insulator–superconductor Josephson junctions”. В: *Physical Review B* 109.9 (март 2024). ISSN: 2469-9969. DOI: 10.1103/physrevb.109.094511. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.109.094511>.
- [8] A. Kudriashov и др. *Non-Reciprocal Current-Phase Relation and Superconducting Diode Effect in Topological-Insulator-Based Josephson Junctions*. 2025. arXiv: 2502.08527 [cond-mat.supr-con]. URL: <https://arxiv.org/abs/2502.08527>.
- [9] Yunxiao Zhang и др. “Ac Josephson effect in Corbino-geometry Josephson junctions constructed on Bi₂Te₃ surface”. В: *Chinese Physics B* 31.10 (окт. 2022), с. 107402. DOI: 10.1088/1674-1056/ac89d4. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1674-1056/ac89d4>.

- [10] Frank W.J.Olver, ред. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, 2010.